УДК 515.164.13, 517.91

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАМКНЕНИХ 1-ФОРМ НА ЗАМКНЕНИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ

Н. В. Будницька

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: Nadya_VB@ukr.net

We study closed 1-forms on closed nonoriented surfaces of genus $p \geq 1$, *with isolated zeros, and prove a criterion for topological equivalence of closed 1-forms.*

Исследуются замкнутые 1-формы с изолированными нулями на замкнутых неориентируемых поверхностях рода $p \geq 1$. *Доказан критерий топологической эквивалентности замкнутых 1-форм.*

1. Вступ. У роботі [1] наведено топологічну класифікацію замкнених 1-форм з ізольованими критичними точками та замкненими рекурентними траєкторіями. У роботі [2] встановлено необхідні та достатні умови топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями на орієнтованих поверхнях роду $p \geq 1$. Метою цієї роботи є знаходження необхідних та достатніх умов топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями на неорієнтованих поверхнях роду $p \geq 1$. Для доведення використовуються число обертання Пуанкаре, гомотопічний клас обертання, введений С. Х. Арансоном і В. З. Грінесом [3], орбіта гомотопічного класу обертання, введена С. Х. Арансоном, Е. В. Жужомою, І. А. Тельних [4].

2. Основні означення. Нагадаємо деякі означення з роботи [2]. Нехай M — замкнена поверхня роду p.

Означення 1. *Диференціальною 1-формою на* M *називається вираз* $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, *де* $A(x,y), B(x,y) : M \to \mathbb{R}$ — *гладкі функції,* (x,y) — *локальні координати.*

Позначимо через $N(\omega)$ множину нулів форми ω.

Означення 2. *Крива* $\gamma \subset M$, *що не містить нулів, називається інтегральною кривою форми* ω, *якщо локально вона є рівнем функції* f *такої, що* $\omega = df$.

Ми будемо розглядати лише максимальні інтегральні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і називатимемо їх просто кривими.

Для кожного досить малого околу $O(z)$ точки z крива, що проходить через z, розбиває $O(z)$ на дві частини: додатну $\{v : f(v) - f(z) > 0\}$ і від'ємну $\{v : f(v) - f(z) < 0\}$.

Означення 3. *Диференціальні 1-форми* ω_1 *і* ω_2 *на* M *називаються траєкторно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм* $h : M \to M$, *що відображає нулі в нулі, а криві в криві. При цьому* h *називається траєкторною еквівалентністю. Якщо, крім того,* h *зберігає розбиття кожного малого околу точки* $z \in M \backslash N(\omega)$ *на додатну і від'ємну частини, то його називають топологічною еквівалентністю, а відповідні форми — топологічно еквівалентними.*

Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, а від'ємних — від'ємною підобластю.

Означення 4. *Нуль 1-форми називається ізольованим, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.*

Означення 5. *Інтегральна крива $\gamma : \mathbb{R} \to M$ називається рекурентною, якщо $\gamma \subset \subset \{z \in M : \exists\{t_n\} \to \pm\infty, \gamma(t_n) \to z, n \to \infty\}$.*

З означення 5 випливає, що якщо інтегральна крива є замкненою або скрізь щільною в M, то вона є рекурентною.

1-Форма називається замкненою, якщо $d\omega = 0$. Відомо, що якщо існує функція $f \in \in C^2(G)$, де G — відкрита множина, то $\omega = df$ тоді і тільки тоді, коли ω замкнена в G. Тому далі будемо розглядати такі 1-форми ω, для яких локально існує функція f: $\omega = df$. Відомо [5], що для кожної критичної точки z_0 (крім локального мінімуму і максимуму) існує окіл, у якому функція спряжена з функцією $\mathrm{Re}\,(x+iy)^k$ для деякого числа $k \in N\backslash\{1\}$. Можливі лише два види ізольованих точок: сідло і центр.

У цій роботі будемо розглядати замкнені 1-форми з ізольованими нулями.

Нехай ω — замкнена 1-форма з ізольованими нулями на замкненій поверхні. Об'єднання нулів та інтегральних кривих, що їх з'єднують, будемо розглядати як граф $G(\omega)$, що вкладений у поверхню. При цьому якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна півтраєкторія, то для отримання графа $G(\omega)$ ми обріжемо цю півкриву на деякій відстані від нуля і отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1. Вершинами графа є нулі або вершини валентності 1, а ребрами — інтегральні криві, що їх з'єднують.

Розглянемо тор T^2 як фактор-простір евклідової площини $\mathbb{R}^2$ з координатами x, y по цілочисловій решітці $\mathbb{Z}^2$, яка ізоморфна фундаментальні групі тора. Позначимо через π проекцію $\mathbb{R}^2$ на T^2. Нехай на T^2 задано потік f^t, L — додатна півтраєкторія f^t і $l : x = = x(t), y = y(t), t \in [0, +\infty)$, — її прообраз на $\mathbb{R}^2$.

Відомо [6] (теорема 4.4.), що якщо $x^2(t)+y^2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то існує скінченна або нескінченна границя

$$\nu(L) = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)}, \tag{1}$$

яка не залежить від вибору прообразу l в $\pi^{-1}(L)$. Число $\nu(L)$ називається числом обертання додатної півтраєкторії L потоку f^t на T^2. Аналогічно визначається число обертання від'ємної півтраєкторії. Відмітимо, що число обертання не залежить від вибору півтраєкторії потоку f^t на T^2, прообраз якої на $\mathbb{R}^2$ залишає компактну частину площини. Тому для такого потоку f^t на T^2 можна говорити про одне число, визначене в (1), для будь-якої півтраєкторії, щоб лише її прообраз на $\mathbb{R}^2$ залишав компактну частину площини. Таке число ν називається числом обертання Пуанкаре потоку f^t на торі T^2.

Означення 6 [6]. *Потік f_1^t на торі T^2 з числом обертання Пуанкаре ν_1 топологічно еквівалентний за допомогою гомеоморфізму $\varphi : T^2 \to T^2$ потоку f_2^t на T^2 з числом обертання Пуанкаре ν_2, якщо $\nu_1 = \dfrac{c+d\nu_2}{a+b\nu_2}$, де*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

— цілочислова матриця з визначником рівним 1, яка індукована φ. Числа обертання ν_1 і ν_2, що задовольняють це співвідношення, називаються сумірними.

Відомо [2], що для того щоб дві замкнені 1-форми, задані на орієнтованій поверхні роду 1, були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб числа обертання півкривих цих замкнених 1-форм були сумірними.

Наступні поняття були введені в роботі [3] для орієнтованої поверхні роду $p \geq 2$ і в роботі [4] для неорієнтованої поверхні роду $p \geq 4$. Тому будемо розглядати M як замкнену орієнтовану поверхню роду $p \geq 2$ або замкнену неорієнтовану поверхню роду $p \geq 4$. Нехай H^2 — круг Пуанкаре, який є універсальною накривною M, $\partial H^2 = S^1_\infty$ — абсолют, $H^2 \cap S^1_\infty = \varnothing$, $\pi : H^2 \to M$ — проекція, Γ — група ізометрій, що діють на H^2. Нехай $h : M \to M$ — гомеоморфізм поверхні, $\bar{h} : H^2 \to H^2$ — накриваючий його гомеоморфізм. Тоді $\bar{h}$ індукує автоморфізм групи Γ вигляду $r(g_1) = g_2 = \bar{h} \circ g_1 \circ \bar{h}^{-1}$. І навпаки, будь-який автоморфізм групи Γ індукується накриваючим для деякого гомеоморфізму поверхні. Накриваючий гомеоморфізм продовжується до гомеоморфізму абсолюту $r^* : S^1_\infty \to S^1_\infty$. Таким чином, кожен автоморфізм групи Γ індукує гомеоморфізм абсолюту. Нехай L — півтраєкторія на M, тоді l — її підняття в H^2. Позначимо через $\delta(l)$ граничну точку півтраєкторії l, що належить абсолюту.

Означення 7 [4, 6]. *Гомотопічним класом обертання півтраєкторії L потоку f^t на M називається множина $\mu(L) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\delta(l))$.*

Іншими словами, $\mu(L)$ — об’єднання граничних точок на S^1_∞ усіх піднять півтраєкторії L.

Означення 8 [6]. *Два гомотопічних класи обертання $\mu(L_1)$ і $\mu(L_2)$ півтраєкторій L_1 і L_2 потоків f^t_1 і f^t_2 на M називаються сумірними внаслідок автоморфізму r групи Γ, якщо $\mu(L_2) = r^*(\mu(L_1))$, де r^* — гомеоморфізм абсолюту S^1_∞, який єдиним чином індукований автоморфізмом r.*

Означення 9 [4]. *Об’єднання $O(L) = \bigcup_{r^* \in H(\Gamma)} r^*(\mu(L))$ називається орбітою гомотопічного класу обертання півтраєкторії L, де $H(\Gamma)$ — множина гомеоморфізмів абсолюту, індукованих усіма автоморфізмами групи Γ.*

Нагадаємо, що потік є транзитивним, якщо він має скрізь щільну траєкторію, а потік, будь-яка одновимірна траєкторія якого скрізь щільна на поверхні, є надтранзитивним.

За теоремою 1 з роботи [4] два транзитивних потоки, які не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами і задані на неорієнтованій поверхні M роду $p = 3$, є топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли числа обертання цих потоків є сумірними.

За теоремою 4 з роботи [4] два надтранзитивних потоки, які не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами, на замкненій неорієнтованій поверхні M роду $p \geq 4$ є топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли існують дві нетривіальні рекурентні сепаратриси цих потоків з однаковими орбітами обертання.

Відомо [2], що для того щоб дві замкнені 1-форми, задані на орієнтованій поверхні M роду $p \geq 2$, були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб існувало по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі цих замкнених 1-форм, що мають сумірні гомотопічні класи обертання.

3. Приклади потоків і замкнених 1-форм на неорієнтованих поверхнях. Відомо, що кожне векторне поле на замкненому многовиді породжує потік. Навпаки, кожен потік задає траєкторії для кожної точки, а отже, і векторне поле, що складається з дотичних векторів до цих траєкторій. Тому далі поняття потоку і векторного поля будемо ототожнювати.

Нехай M — поверхня роду $p \geq 1$ і γ — деяка крива на M, що не має витоків, стоків і півкривих, ω- або α-граничними множинами яких є криві, гомеоморфні колу S^1. Відомо, що будь-яку поверхню (орієнтовану і неорієнтовану) можна подати у $\mathbb{R}^2$ у вигляді правильного $4p$-кутника для орієнтованої поверхні і $2p$-кутника для неорієнтованої, де p — рід поверхні, з відповідними ототожненими сторонами. Далі будемо записувати $4p\,(2p)$-кутник для орієнтованої (неорієнтованої) поверхні.

Введемо на $4p\,(2p)$-кутнику декартові координати x і y, кривій γ відповідає в $4p$-кутнику крива, яку ми будемо також позначати γ.

На правильному $4p\,(2p)$-кутнику задано стандартну метрику, як на площині, і вона індукує метрику на поверхні.

Нехай γ — інтегральна крива замкненої 1-форми $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, де $A(x,y)$, $B(x,y)$ — гладкі функції з M в $\mathbb{R}$. Тоді в кожній точці $(x_0,y_0) \in \gamma$, що належить $4p$-кутнику, 1-формі ω можна співставити векторне поле P з компонентами $A(x_0,y_0)$ і $B(x_0,y_0)$, тобто вектор $\bar{p} = (A(x_0,y_0),\, B(x_0,y_0)) \in P$. Оскільки ми розглядаємо замкнену 1-форму $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, то в околі довільної точки (x_0,y_0), а отже і в самій точці, що належить інтегральній кривій γ, існує функція f така, що $\omega = df$, тобто $A(x_0,y_0)dx + B(x_0,y_0)dy = df(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$. Звідси отримуємо $A(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $B(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$. Тобто довільній замкненій 1-формі ω в околі кожної точки (x_0,y_0), а отже і в самій точці, що належить γ, можна задати єдиний вектор $\bar{p} = (A,B) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \in P$.

Означення 10. *Будемо вважати, що вектор $\bar{p}$ напрямлений від кривої з меншим значенням рівня (з від'ємної частини околу) до кривої з більшим значенням рівня (в додатну частину околу), тобто локально порівнює дві сусідні інтегральні криві замкненої 1-форми ω, і називатимемо його порівнюючим напрямком у точці.*

Якщо після ототожнення відповідних сторін у $4p\,(2p)$-кутнику в кожній точці, що належить межі склеювання, вектори $\bar{p} \in P$ збігаються, то будемо ототожнювати векторне поле P і замкнену 1-форму ω, оскільки в цьому випадку, маючи векторне поле P, можна знайти замкнену 1-форму ω, і навпаки. Якщо ж на межі склеювання існує хоча б одна точка, що належить γ, яка має два різних вектори з поля P, то векторне поле P не визначає замкнену 1-форму ω і γ не є інтегральною кривою ω.

Нехай $r(t)$ — радіус-вектор, що задає криву γ у $4p\,(2p)$-кутнику. Тоді в кожній точці, що належить γ, можна задати дотичний вектор $\bar{v} := \dot{r}(t)$ — вектор швидкості в даній точці. Вектор $\bar{v}$ задає напрямок руху в цій точці. Рухаючись по кривій, ми отримаємо в кожній точці по одному такому вектору. Позначимо множину всіх дотичних векторів швидкості через V. Якщо після ототожнення відповідних сторін у $4p\,(2p)$-кутнику в кожній точці, що належить межі склеювання, вектори $\bar{v} \in V$ збігаються (тобто немає точки на межі з двома різними векторами), то V можна розглядати як векторне поле, яке будемо називати дотичним векторним полем (щоб відрізняти від інших можливих векторних полів), а криву γ — як траєкторію дотичного векторного поля V.

Маючи векторне поле P (V), поворотом $\bar{p}$ на 90° за годинниковою стрілкою (поворотом $\bar{v}$ на 90° проти годинникової стрілки) можна отримати вектор $\bar{v}$ ($\bar{p}$). Тобто, маючи поле P, можна отримати поле V, і навпаки.

Відомо, що якщо $4p$-кутник є замкненою орієнтованою поверхнею, то після ототожнення відповідних сторін в $4p$-кутнику в кожній точці, що належить межі склеювання, вектори дотичного векторного поля $\bar{v} \in V$ збігаються. А оскільки, як ми показали, дотичне векторне поле V завжди визначає векторне поле P, то на межі склеювання поле P буде визначене однозначно і задаватиме замкнену 1-форму. Тому для дослідження інтегральних кривих замкнених 1-форм на орієнтованих поверхнях можна досліджувати траєкторії дотичних векторних полів. У випадку, коли $2p$-кутник є замкненою неорієнтованою поверхнею, це не так: не кожна замкнена 1-форма задає дотичне векторне поле, і навпаки, про що свідчать наступні приклади.

Приклад 1. Побудуємо криві на неорієнтованій поверхні, які задають траєкторії дотичного векторного поля, але не задають інтегральні криві замкненої 1-форми. Як неорієнтовану поверхню розглянемо пляшку Клейна, яку задамо через ототожнення сторін $[x; 0]$ з $[x; 1]$ і $[0; y]$ з $[1; 1 - y]$, де $x, y \in [0; 1]$ у квадраті $[0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Горизонтальні прямі у квадраті $[0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$ задають траєкторії дотичного векторного поля

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

оскільки при склеюванні всіх відповідних сторін квадрата орієнтація траєкторій на границі склеювання зберігається. Локально кожні дві траєкторії можна порівняти, тобто задати порівнюючий напрямок від одного рівня до іншого. Після склеювання вертикальних сторін у квадраті порівнюючі напрямки не зберігаються, тому що на границі склеювання вони протилежно напрямлені. Склейка горизонтальних сторін ситуацію не змінить.

Отже, розглянуті криві задають траєкторії дотичного векторного поля, але не задають інтегральні криві замкненої 1-форми.

Приклад 2. Побудуємо криві на неорієнтованій поверхні, які задають інтегральні криві замкненої 1-форми, але не задають траєкторії дотичного векторного поля. Як неорієнтовану поверхню розглянемо пляшку Клейна, яку задамо через ототожнення сторін $[x; 0]$ з $[x; 1]$ і $[0; y]$ з $[1; 1 - y]$, де $x, y \in [0; 1]$ у квадраті $[0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Вертикальні прямі у квадраті $[0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$ задають інтегральні криві замкненої 1-форми $\omega = dx$, оскільки локально кожні дві інтегральні криві можна порівняти, тобто задати порівнюючий напрямок між рівнями, і при склеюванні всіх відповідних сторін квадрата орієнтація порівнюючих напрямків на границі склеювання зберігається. За допомогою порівнюючих напрямків розглянемо дотичні вектори, які будуть задавати вертикальні прямі з напрямком у квадраті $[0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$. Ці напрямлені прямі не будуть задавати траєкторій дотичного векторного поля, тому що при склеюванні вертикальних сторін квадрата орієнтація кривої на границі склеювання буде різною, тобто в кожній точці дотичний вектор буде неоднозначним. Склейка горизонтальних сторін ситуацію не змінить.

Отже, розглянуті криві задають інтегральні криві замкненої 1-форми і не задають траєкторій дотичного векторного поля.

4. Топологічна еквівалентність замкнених 1-форм на неорієнтованих поверхнях. ***4.1. Неорієнтована поверхня роду $p = 1$ або $p = 2$.***

Теорема 1. *Нехай M — замкнена неорієнтована поверхня роду $p = 1$ або $p = 2$ і на M задано дві замкнені 1-форми: ω_1 і ω_2. Для того щоб ω_1 і ω_2 були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб для $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$ виконувались умови:*

1) існує гомеоморфізм $f : M \to M$, обмеження якого на $G(\omega_1)$ задає ізоморфізм графів $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$;

2) області, що обмежені ребрами графа $G(\omega_1)$, переходять в області, що обмежені образами цих ребер у графі $G(\omega_2)$;

3) додатні підобласті переходять у додатні, а від'ємні — у від'ємні.

Доведення. За теоремами 1 і 2 з роботи [7] відомо, що на неорієнтованих поверхнях роду $p = 1$ (проективній площині) і $p = 2$ (пляшці Клейна) не існує незамкнених рекурентних півтраєкторій, тому $G(\omega_1) \neq \varnothing$, $G(\omega_2) \neq \varnothing$ і доведення є аналогічним доведенню орієнтованого випадку з роботи [2].

4.2. Неорієнтована поверхня роду $p = 3$. Розглянемо замкнену неорієнтовану поверхню M роду $p = 3$, і нехай на M задано транзитивний потік без сідел з двома сепаратрисами, тобто потік, що має незамкнену скрізь щільну траєкторію. Відомо [4], що будь-який транзитивний потік, що не має сідел з двома сепаратрисами, на замкненій неорієнтованій поверхні роду 3 має лише одне сідло з 4 сепаратрисами, де дві з них „зливаються", утворюючи петлю, при цьому досить малий окіл петлі сепаратриси гомеоморфний листку Мьобіуса. Подамо неорієнтовану поверхню M роду $p = 3$ як композицію тора з діркою і ковпака Мьобіуса. Тоді петля, досить малий окіл якої гомеоморфний листку Мьобіуса, лежить на межі склейки тора з діркою і ковпака Мьобіуса. Покажемо, що незамкнені рекурентні півтраєкторії транзитивного потоку не можуть рухатись по ковпаку Мьобіуса. Припустимо супротивне: нехай на ковпаку Мьобіуса такі півтраєкторії існують. Заклеївши межу диском і стягнувши диск у точку, отримаємо проективну площину, на якій задано незамкнені рекурентні траєкторії, чого бути не може. Тоді незамкнені рекурентні траєкторії рухаються по тору з діркою. Далі траєкторії потоку будемо називати траєкторіями, а траєкторії замкненої 1-форми — інтегральними кривими чи просто кривими.

Розставивши порівнюючі напрямки між траєкторіями цього транзитивного потоку, отримаємо, що на межі петлі всі порівнюючі стрілки входять або виходять з петлі. Оскільки в петлі протилежні точки ототожнюються, то при ототожненні кожної пари протилежних точок у кожній новоутвореній точці буде по два протилежно напрямлених порівнюючих вектори. Тому траєкторії цього транзитивного потоку не є інтегральними кривими замкненої 1-форми.

Виконаємо наступну побудову: розставимо порівнюючі напрямки між траєкторіями існуючого транзитивного потоку, розглянемо порівнюючі напрямки як дотичні вектори до деяких кривих і побудуємо ці криві. Новоутворені криві і будуть інтегральними кривими замкненої 1-форми, оскільки порівнюючі напрямки між цими інтегральними кривими будуть дотичними векторами транзитивного потоку, а тому вони скрізь узгоджені (немає жодної точки, в якій задано два різних дотичних вектори). Аналогічно можна показати, що інтегральні криві замкненої 1-форми однозначно породжують траєкторії потоку. В цьому випадку будемо говорити, що траєкторії потоку ортогонально породили інтегральні криві замкненої 1-форми або просто потік ортогонально породив замкнену 1-форму.

Отже, потік однозначно ортогонально породжує замкнену 1-форму, і навпаки, замкнена 1-форма однозначно ортогонально породжує потік. Оскільки транзитивні потоки не мають сідел з двома сепаратрисами, то побудовані за ними замкнені 1-форми також не будуть мати сідел з двома сепаратрисами, і навпаки. Далі ми без додаткових пояснень будемо використовувати ці факти.

Інтегральні криві замкненої 1-форми будуть мати на M одне сідло валентності 4, а незамкнені рекурентні півкриві будуть рухатися по тору. Зауважимо, що іншого вигляду інтегральні криві замкненої 1-форми на M мати не можуть, бо якби існували криві іншого вигляду, то існував би інший транзитивний потік, відмінний від заданого, чого бути не може.

Лема 1. *Нехай на замкненій неорієнтованій поверхні M роду $p = 3$ задано топологічно еквівалентні замкнені 1-форми ω_1, ω_2 і f_1^t, f_2^t — транзитивні потоки, ортогонально породжені ω_1, ω_2. Числа обертання незамкнених рекурентних півтраєкторій транзитивних потоків f_1^t і f_2^t сумірні тоді і тільки тоді, коли числа обертання незамкнених рекурентних півкривих замкнених 1-форм ω_1, ω_2 сумірні.*

Доведення. Як ми показали, незамкнені рекурентні півтраєкторії транзитивного потоку рухаються по тору. Якщо ці півтраєкторії рухаються по тору під кутом α, то незамкнені рекурентні півкриві замкненої 1-форми рухаються під кутом $90^\circ + \alpha$. Оскільки незамкнені рекурентні півтраєкторії транзитивного потоку утворюють ірраціональну обмотку тора, то $\operatorname{tg}\alpha$ є ірраціональним, тоді $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ також є ірраціональним, і незамкнені рекурентні півкриві замкненої 1-форми також утворюють ірраціональну обмотку тора і не мають замкнених кривих.

За умовою існує топологічна еквівалентність h, а оскільки за інтегральними кривими 1-форми однозначно будується транзитивний потік, то h можна розглядати як топологічну еквівалентність і між транзитивними потоками.

Згідно з теоремою 1 з роботи [4], числа обертання потоків f_1^t і f_2^t сумірні. Нехай α — кут, під яким півтраєкторії транзитивного потоку f_1^t рухаються по M; β — кут, під яким півтраєкторії транзитивного потоку f_2^t рухаються по M. Тоді $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ — числа обертання потоків f_1^t і f_2^t відповідно; $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ сумірні, тобто існує цілочислова матриця з визначником рівним 1:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

яка задає співвідношення

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c + d\operatorname{tg}\beta}{a + b\operatorname{tg}\beta}. \tag{2}$$

Перетворимо (2) таким чином:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{c+d\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta}}{\frac{a+b\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta}} = \frac{c\operatorname{ctg}\beta + d}{a\operatorname{ctg}\beta + b} = \frac{-c\operatorname{ctg}\beta - d}{-a\operatorname{ctg}\beta - b} = \frac{c\operatorname{tg}(90^\circ + \beta) - d}{a\operatorname{tg}(90^\circ + \beta) - b},$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a\operatorname{tg}(90^\circ + \beta) - b}{c\operatorname{tg}(90^\circ + \beta) - d}.$$

Помножимо на -1 обидві частини попередньої рівності:

$$-\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{a\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)-b}{c\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)-d},$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = \frac{-(a\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)-b)}{c\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)-d} = \frac{b-a\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)}{-d+c\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)}.$$

Ми отримали, що числа обертання $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)$ і $\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)$ незамкнених рекурентних інтегральних півкривих замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 відповідно сумірні, бо існує матриця

$$\begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix},$$

яка є цілочисловою, оскільки a, b, c, d цілі, з визначником рівним 1, тому що $(-d)(-a) - -bc = 1$.

Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай M — замкнена неорієнтована поверхня роду $p = 3$ і на M задано дві замкнені 1-форми: ω_1 і ω_2. Для того щоб ω_1 і ω_2 були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:*

1) для $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$ виконувались умови:

існує гомеоморфізм $f : M \to M$, обмеження якого на $G(\omega_1)$ задає ізоморфізм графів $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$;

області, що обмежені ребрами графа $G(\omega_1)$, переходять в області, що обмежені образами цих ребер у графі $G(\omega_2)$;

додатні підобласті переходять у додатні, від'ємні — у від'ємні;

2) для областей з $M\backslash G(\omega_i)$, що містять незамкнену рекурентну півкриву, числа обертання незамкнених рекурентних півкривих замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 повинні бути сумірними.

Доведення. *Необхідність.* Розглянемо такі випадки:

1. Нехай інтегральні криві ω_1 і ω_2 не мають незамкнених рекурентних півкривих, тоді п. 2 теореми не буде, а $G(\omega_1) \neq \varnothing$, $G(\omega_2) \neq \varnothing$ і п. 1 випливає з побудови.

2. Нехай інтегральні криві ω_1 і ω_2 мають незамкнені рекурентні криві. Тоді інтегральні криві замкнених 1-форм будуть мати на M одне сідло валентності 4, а незамкнені рекурентні криві будуть щільно заповнювати тор. Тобто $G(\omega_1) \neq \varnothing$ і $G(\omega_2) \neq \varnothing$ будуть ізоморфними і умови п. 1 будуть виконуватися. Нехай h — топологічна еквівалентність між ω_1 і ω_2. Оскільки ω_1 і ω_2 однозначно ортогонально індукують транзитивні потоки f_1^t і f_2^t на M, то h розглянемо як топологічну еквівалентність f_1^t і f_2^t. За теоремою 1 з роботи [4] числа обертання цих потоків є сумірними. З леми 1 випливає, що незамкнені рекурентні півкриві замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 мають сумірні числа обертання. Це і є п. 2 теореми.

Достатність. Розглянемо $M\backslash G(\omega_i)$, $i = 1, 2,$ — об'єднання областей двох типів:

1) заповнених замкненими кривими;

2) заповнених незамкненими рекурентними кривими.

Як і в роботі [2], зафіксуємо структуру прямого добутку на областях типу 1 і продовжимо гомеоморфізм між графами $G(\omega_i)$ до топологічної еквівалентності між областями.

Якщо ω_1 і ω_2 мають на M незамкнені рекурентні півкриві, то за допомогою ω_1 і ω_2 однозначно будуємо транзитивні потоки f_1^t і f_2^t на M. За лемою 1 числа обертання півтраєкторій f_1^t і f_2^t сумірні. З теореми 1 роботи [4] випливає, що транзитивні потоки f_1^t і f_2^t, задані на неорієнтованій поверхні M роду $p = 3$, є топологічно еквівалентними, тобто існує гомеоморфізм, що переводить траєкторії f_1^t у траєкторії f_2^t зі збереженням орієнтації. Оскільки f_1^t і f_2^t однозначно задають замкнені 1-форми ω_1 і ω_2, то знайдений гомеоморфізм переводить інтегральні криві ω_1 в інтегральні криві ω_2. Рухаючись по траєкторіях потоків f_1^t і f_2^t, частини околів кожної точки, що знаходяться зліва, будемо називати додатними, а ті, що знаходяться справа, — від'ємними. Повернувшись від потоків f_1^t і f_2^t до кривих ω_1 і ω_2, отримаємо гомеоморфізм, який переводить криві ω_1 у криві ω_2, додатні частини околів у додатні, а від'ємні — у від'ємні. Тоді знайдений гомеоморфізм буде шуканою топологічною еквівалентністю областей типу 2.

За необхідності, підправляючи топологічну еквівалентність областей з $M\backslash G(\omega_i)$ в околах їх меж (графів) так, щоб топологічна еквівалентність при обмеженні на межі збігалась з гомеоморфізмами графів, отримуємо в сукупності шукану топологічну еквівалентність поверхні M.

4.3. Неорієнтована поверхня роду $p \geq 4$**.** Розглянемо замкнену неорієнтовану поверхню M роду $p \geq 4$, і нехай на M задано замкнені 1-форми ω_1 і ω_2, які мають скінченне число станів рівноваги і сепаратрис, не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами і сепаратрис, що з'єднують різні сідла або одне і те ж сідло, інтегральні криві цих 1-форм скрізь щільно заповнюють M. Оскільки замкнена 1-форма однозначно ортогонально породжує потік, то розглянемо потоки f_1^t, f_2^t, задані на поверхні M, які ортогонально породжені замкненими 1-формами ω_1 і ω_2. Потоки f_1^t, f_2^t будуть надтранзитивними, оскільки за рахунок замкнених 1-форм вони не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами, сепаратрис, що з'єднують різні сідла або одне і те ж сідло, і інтегральні криві ω_1 і ω_2 скрізь щільно заповнюють M. Тому f_1^t і f_2^t також будуть скрізь щільно заповнювати M, тобто будь-яка одновимірна траєкторія кожного з потоків f_1^t, f_2^t скрізь щільна на поверхні M. Зазначимо також, що f_1^t, f_2^t мають скінченне число станів рівноваги і сепаратрис.

Лема 2. *Нехай на замкненій неорієнтованій поверхні M роду $p \geq 4$ задано топологічно еквівалентні замкнені 1-форми ω_1, ω_2 і f_1^t, f_2^t — транзитивні потоки, ортогонально породжені ω_1, ω_2. У потоків f_1^t і f_2^t є по одній нетривіальній рекурентній сепаратрисі, що мають однакові орбіти обертання тоді і тільки тоді, коли існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм ω_1 і ω_2, які мають однакові орбіти обертання.*

Доведення. *Необхідність.* За побудовою в кожній точці, відмінній від сідла, траєкторії потоків f_1^t, f_2^t і інтегральні криві замкнених 1-форм ω_1, ω_2 будуть перетинатися трансверсально, тобто під кутами $90°$, а в сідлах кут між кожною парою сусідніх сепаратрис потоку і 1-форми буде дорівнювати $\dfrac{360°}{2n}$ (n — валентність сідла). Оскільки f_1^t і f_2^t будуються однозначно з ω_1 і ω_2, то топологічну еквівалентність $h : M \to M$ між f_1^t і f_2^t можна розглядати як топологічну еквівалентність між потоками ω_1 і ω_2.

За теоремою 4 з роботи [4] існують незамкнена рекурентна сепаратриса L_1 потоку f_1^t і незамкнена рекурентна сепаратриса L_2 потоку f_2^t з однаковими орбітами. Нехай $x_0 \in L_1$ — сідло, з якого виходить сепаратриса L_1 (для сепаратриси, яка входить у сідло, міркування аналогічні). Тоді в сідлі x_0 існує сепаратриса K_1 замкненої 1-форми ω_1, яка отримана поворотом L_1 на кут $\dfrac{360^\circ}{2n}$ (n — валентність сідла x_0) проти годинникової стрілки.

Позначимо через l_1 і k_1 деякі прообрази на H^2 сепаратрис L_1 і K_1. Нехай a_1 і b_1 — граничні точки на абсолюті S^1_∞ сепаратрис l_1 і k_1 відповідно. Оскільки $\pi : H^2 \to M$ — конформне відображення, то π зберігає кути, і тому кут між l_1 і k_1 дорівнює $\dfrac{360^\circ}{2n}$. Можна вважати, що вони перетинаються під кутом $\dfrac{360^\circ}{2n}$. Тому k_1 можна отримати з l_1 поворотом S^1_∞ на $\dfrac{360^\circ}{2n}$ проти годинникової стрілки.

Позначимо через $\bar{n}$ відображення повороту на $\dfrac{360^\circ}{2n}$ проти годинникової стрілки, тобто $\bar{n}(l_1) = k_1$.

Нехай l_2 — довільна сепаратриса з прообразу L_1 на H^2, відмінна від l_1, тоді існує $g_1 \in \Gamma$ таке, що $g_1(l_1) = l_2$. Оскільки $\pi : H^2 \to M$ — конформне відображення накриття, то існує сепаратриса k_2 — прообраз K_1, відмінний від k_1, яка має з l_2 спільне сідло і $\bar{n}(l_2) = k_2$. Тоді $n \circ g_1 \circ n^{-1}$ можна розглядати як відображення групи $\Gamma : \bar{n} \circ g_1 \circ \bar{n}^{-1}(k_1) = k_2$. Співставимо відображенню $g_1 \in \Gamma$ відображення $n \circ g_1 \circ n^{-1} \in \Gamma$. Нехай a_2 і b_2 — граничні точки на абсолюті S^1_∞ сепаратрис l_2 і k_2 відповідно. Співставимо граничним точкам a_1 і b_1 граничні точки a_2 і b_2. Тобто ми отримали відповідності $g_1 \to \bar{n} \circ g_1 \circ \bar{n}^{-1}$, $a_1 \to b_1$, $a_2 \to b_2$. Аналогічно розглянувши всі конгруентні до l_1 сепаратриси $\{l_i\}$ з H^2, отримаємо всі конгруентні до k_1 сепаратриси $\{k_i\}$ і кожному відображенню $g_i \in \Gamma : g_i(l_i) = l_j, i \neq j$, співставимо відображення $\bar{n} \circ g_i \circ \bar{n}^{-1} \in \Gamma : \bar{n} \circ g_i \circ \bar{n}^{-1}(k_i) = k_j, i \neq j$. Таким чином ми отримаємо автоморфізм R_1 групи $\Gamma : R_1(g_i) = \bar{n} \circ g_i \circ \bar{n}^{-1}$. Аналогічно задамо відповідність між граничними точками $\{l_i\}$ і $\{k_i\}$, тобто між гомотопічними класами обертання $\mu(L_1) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ і $\mu(K_1) = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$.

З роботи [6] відомо, що кожен автоморфізм R_1 групи Γ єдиним чином індукує гомеоморфізм R_1^* абсолюту на себе, який залишає інваріантним множину раціональних і ірраціональних точок. Тому відповідність між $\mu(L_1)$ і $\mu(K_1)$ є гомеоморфізмом, тобто $R_1^*(\mu(L_1)) = \mu(K_1)$.

Аналогічно задаємо гомеоморфізм R_2^*, який породжений автоморфізмом R_2 групи Γ, між гомотопічними класами обертання $\mu(L_2)$ і $\mu(K_2)$, де L_2 — сепаратриса потоку f_2^t, яка має з L_1 однакові орбіти, K_2 — сепаратриса замкненої 1-форми ω_2, яка має з L_2 спільне сідло і повернута по відношенню до L_2 під кутом $\dfrac{360^\circ}{2n}$ (n — валентність спільного сідла) проти годинникової стрілки.

Як ми вже встановили, має місце рівність $O(L_1) = O(L_2)$, тобто

$$\bigcup_{r_1^* \in H(\Gamma)} r_1^*(\mu(L_1)) = \bigcup_{r_2^* \in H(\Gamma)} r_2^*(\mu(L_2)). \tag{3}$$

Оскільки існують гомеоморфізми R_1^*, R_2^* абсолюту S^1_∞ такі, що $R_1^*(\mu(L_1)) = \mu(K_1)$, $R_2^*(\mu(L_2)) = \mu(K_2)$, то рівність (3) можна записати у вигляді

$$\bigcup_{r_1^* \in H(\Gamma)} r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}(\mu(K_1)) = \bigcup_{r_2^* \in H(\Gamma)} r_2^* \circ (R_2^*)^{-1}(\mu(K_2)).$$

Оскільки r_1^*, r_2^*, R_1^*, R_2^* — гомеоморфізми абсолюту S^1_∞, то $r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}$, $r_2^* \circ (R_2^*)^{-1}$ — гомеоморфізми S^1_∞ як добуток гомеоморфізмів. Покажемо, що кожен з $r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}$,

$r_2^* \circ (R_2^*)^{-1}$ індукований деяким автоморфізмом групи Γ. Дійсно, нехай r_1^* індукований автоморфізмом r_1 групи Γ, тобто $r_1(g_1) = g_2 = \bar{h} \circ g_1 \circ \bar{h}^{-1}$, де $\bar{h} : H^2 \to H^2$ — гомеоморфізм. Як ми встановили, гомеоморфізми R_i^*, $i = 1, 2$, індуковані автоморфізмами R_i групи Γ, тобто $R_i(g_i) = f_i$, де g_i — відображення між накриваючими траєкторіями потоків f_i^t, f_i — відображення між накриваючими інтегральними кривими замкнених 1-форм ω_i. Тому автоморфізм $r_1 \circ R_1^{-1}$ групи Γ індукує гомеоморфізм $r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}$ абсолюту S^1_∞.

Умова $r_1^* \in H(\Gamma)$ рівносильна умові $r_1^* \circ (R_1^*)^{-1} \in H(\Gamma)$, оскільки кожен автоморфізм r_1, що індукує r_1^*, однозначно породжує автоморфізм $r_1 \circ R_1^{-1}$, що індукує $r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}$. Тому

$$\bigcup_{r_1^* \in H(\Gamma)} r_1^*(\mu(L_1)) = \bigcup_{r_1^* \circ (R_1^*)^{-1} \in H(\Gamma)} r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}(\mu(K_1)).$$

Аналогічно отримуємо, що автоморфізм $r_2 \circ R_2^{-1}$ групи Γ індукує гомеоморфізм $r_2^* \circ (R_2^*)^{-1}$ абсолюту S^1_∞ і

$$\bigcup_{r_2^* \in H(\Gamma)} r_2^*(\mu(L_2)) = \bigcup_{r_2^* \circ (R_2^*)^{-1} \in H(\Gamma)} r_2^* \circ (R_2^*)^{-1}(\mu(K_2)).$$

Оскільки має місце рівність (3), то

$$\bigcup_{r_1^* \circ (R_1^*)^{-1} \in H(\Gamma)} r_1^* \circ (R_1^*)^{-1}(\mu(K_1)) = \bigcup_{r_2^* \circ (R_2^*)^{-1} \in H(\Gamma)} r_2^* \circ (R_2^*)^{-1}(\mu(K_2)),$$

а ця рівність і означає рівність орбіт обертання сепаратрис K_1 і K_2.

Достатність. За умовою теореми маємо рівність $O(K_1) = O(K_2)$, тобто

$$\bigcup_{r_1^* \in H(\Gamma)} r_1^*(\mu(K_1)) = \bigcup_{r_2^* \in H(\Gamma)} r_2^*(\mu(K_2)). \tag{4}$$

Оскільки існують гомеоморфізми R_1^*, R_2^* абсолюту S^1_∞ такі, що $R_1^*(\mu(L_1)) = \mu(K_1)$, $R_2^*(\mu(L_2)) = \mu(K_2)$, то рівність (4) можна записати у вигляді

$$\bigcup_{r_1^* \in H(\Gamma)} r_1^* \circ R_1^*(\mu(L_1)) = \bigcup_{r_2^* \in H(\Gamma)} r_2^* \circ R_2^*(\mu(L_2)).$$

Як і при доведенні необхідності, знаходимо автоморфізми $r_1 \circ R_1$, $r_2 \circ R_2$ групи Γ, які індукують гомеоморфізми $r_1^* \circ R_1^*$, $r_2^* \circ R_2^*$ абсолюту S^1_∞, і кожному з $r_1 \circ R_1$, $r_2 \circ R_2$ можна співставити автоморфізми r_1, r_2 (тому умови $r_i^* \in H(\Gamma)$, $i = 1, 2$, рівносильні умовам $r_i^* \circ R_i^* \in H(\Gamma)$). Тому рівність (4) можна переписати у вигляді

$$\bigcup_{r_1^* \circ R_1^* \in H(\Gamma)} r_1^* \circ R_1^*(\mu(L_1)) = \bigcup_{r_2^* \circ R_2^* \in H(\Gamma)} r_2^* \circ R_2^*(\mu(L_2)),$$

а ця рівність і означає рівність орбіт обертання сепаратрис L_1 і L_2.

Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай M — замкнена неорієнтована поверхня роду $p \geq 4$ і на M задано дві замкнені 1-форми: ω_1 і ω_2. Для того щоб ω_1 і ω_2 були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:*

1) для $G(\omega_1) \neq \varnothing$ і $G(\omega_2) \neq \varnothing$ виконувались умови:

існував гомеоморфізм $f : M \to M$, обмеження якого на $G(\omega_1)$ задавав ізоморфізм графів $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$;

області, що обмежені ребрами графа $G(\omega_1)$, переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі $G(\omega_2)$;

додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні — у від'ємні;

2) для кожної з областей з $M \backslash G(\omega_i)$, що містить хоча б одну незамкнену рекурентну півкриву, виконувались умови:

для орієнтованих областей роду $g = 1$ числа обертання незамкнених рекурентних півкривих замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 повинні бути сумірними;

для орієнтованих областей роду $g \geq 2$ існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм ω_1 і ω_2, що мають сумірні гомотопічні класи обертання;

для неорієнтованих областей роду $g = 3$ числа обертання півкривих замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 мають бути сумірними;

для неорієнтованих областей роду $p \geq 4$ існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм ω_1 і ω_2, що мають однакові орбіти обертання.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $h : M \to M$ — задана топологічна еквівалентність між ω_1 і ω_2. Якщо $G(\omega_1) \neq \varnothing$ і $G(\omega_2) \neq \varnothing$, то п. 1 випливає з побудови.

Якщо існує область $V_1 \subset M \backslash G(\omega_1)$, що має хоча б одну незамкнену рекурентну півкриву, то з топологічної еквівалентності $h : M \to M$ маємо, що існує область $V_2 \subset \subset M \backslash G(\omega_2)$, для якої $h : V_1 \to V_2$ також топологічна еквівалентність.

Зауважимо, що V_1 — орієнтована чи неорієнтована область роду g, тому внаслідок існування гомеоморфізму між V_1 і V_2 область V_2 є відповідно орієнтованою чи неорієнтованою областю роду g. Далі для кожної області будемо використовувати наступну перебудову: позаклеюємо межі в областях V_1, V_2 дисками і стягнемо кожен диск у точку. Таким чином з кожної області V_1, V_2 отримаємо деякі орієнтовані чи неорієнтовані поверхні роду g (щоб не вводити нові позначення, будемо позначати новоутворені поверхні також через V_1, V_2) з заданими на них замкненими 1-формами ω_1 і ω_2.

З теореми Пуанкаре – Хопфа випливає, що на поверхні роду більшого або рівного 2 завжди буде існувати сідло (точка від'ємного індексу), а тому будуть існувати сепаратриси.

Розглянемо наступні випадки:

Нехай V_1 і V_2 — орієнтовані області роду $g = 1$. З роботи [2] випливає потрібний підпункт теореми 3.

Нехай V_1 і V_2 — орієнтовані області роду $g \geq 2$. З роботи [2] випливає потрібний підпункт теореми 3.

Нехай V_1 і V_2 — неорієнтовані області роду $g = 3$. З теореми 2 випливає потрібний підпункт теореми 3.

Нехай V_1 і V_2 — неорієнтовані області роду $g \geq 4$. Розглянемо надтранзитивні потоки f_1^t, f_2^t, задані на поверхнях V_1, V_2 і ортогонально породжені замкненими 1-формами ω_1 і ω_2. Розглянемо $h : V_1 \to V_2$ як топологічну еквівалентність між f_1^t, f_2^t. За теоремою 4 з роботи [4] існують дві нетривіальні рекурентні сепаратриси цих потоків з однаковими орбітами обертання. Тоді за лемою 2 існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 з однаковими орбітами обертання. Це і є потрібний підпункт теореми 3.

Достатність. Розглянемо $M \backslash G(\omega_i)$, $i = 1, 2$ — об'єднання областей двох типів:

1) заповнених замкненими траєкторіями;

2) заповнених незамкненими рекурентними траєкторіями.

Як і в роботі [2], зафіксуємо структуру прямого добутку на областях типу 1 і продовжимо гомеоморфізм між графами до гомеоморфізму між областями.

Як і при доведенні необхідності, розглянемо окремо області V_1 і V_2, заклеїмо межі в $\partial\overline{V_1}$ і $\partial\overline{V_2}$ дисками, які стягнемо в точки, і отримаємо поверхні з заданими на них замкненими 1-формами ω_1 і ω_2. Для областей типу 2 розглянемо такі випадки:

Нехай V_1 і V_2 — орієнтовані області роду $g = 1$, тоді з роботи [2] випливає потрібний підпункт теореми 3.

Нехай V_1 і V_2 — орієнтовані області роду $g \geq 2$, тоді з роботи [2] випливає потрібний підпункт теореми 3.

Нехай V_1 і V_2 — неорієнтовані області роду $g = 3$, тоді з теореми 2 випливає потрібний підпункт теореми 3.

Нехай V_1 і V_2 — неорієнтовані області роду $g \geq 4$. Розглянемо надтранзитивні потоки f_1^t, f_2^t, задані на поверхнях V_1, V_2 і ортогонально породжені замкненими 1-формами ω_1 і ω_2. Тоді за лемою 2 у потоків f_1^t і f_2^t існують дві нетривіальні рекурентні сепаратриси з однаковими орбітами обертання і за теоремою 4 роботи [4] існує топологічна еквівалентність між потоками f_1^t і f_2^t, яка і є шуканою топологічною еквівалентністю між ω_1 і ω_2 з V_1 в V_2.

За необхідності, підправляючи топологічну еквівалентність областей з $M \backslash G(\omega_i)$ в околах їх меж (графів) так, щоб топологічна еквівалентність при обмеженні на межі збігалась з гомеоморфізмами графів, отримуємо в сукупності шукану топологічну еквівалентність поверхні M.

Теорему доведено.

1. *Білун С. В., Пришляк О. О.* Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. — 2002. — № 8. — С. 77 – 81.
2. *Будницька Н. В., Пришляк О. О.* Еквівалентність замкнених 1-форм на орієнтованих поверхнях // Там же. — 2008. — № 19. — С. 36 – 38.
3. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Мат. сб. — 1973. — **90(132)**, № 3. — С. 372 – 401.
4. *Арансон С. Х., Жужома Е. В., Тельных И. А.* Транзитивные и сверхтранзитивные потоки на замкнутых неориентируемых поверхностях // Мат. заметки. — 1998. — **63**, вып. 4. — С. 625 – 628.
5. *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth function with izolated critical points on closed surface // Top. and Appl. — 2002. — № 119. — P. 257 – 267.
6. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых поверхностях // Успехи мат. наук. — 1986. — **41**, вып. 1 (247). — С. 149 – 169.
7. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях // Мат. сб. — 1969. — **80(122)**, № 3. — С. 314 – 333.

Одержано 02.07.08