УДК 517.926

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

А. А. Чечель

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

The linear systems of differential equations with degenerations, in which zero eigenvalues of the matrix at the derivative are simple, are considered. A new method for solving such systems is established.

Представлен новый метод решения линейных систем дифференциальных уравнений с вырождением, в которых нулевые собственные числа матрицы при производной являются простыми.

Одним з універсальних методів вивчення процесів, що відбуваються у природі, є диференціальні рівняння. Багато задач практичного змісту приводять до математичних моделей, які описуються системами диференціальних рівнянь з різного роду виродженнями: наявністю при старших похідних виродженої матриці, малих параметрів або такої матриці, яка вироджується при певних значеннях незалежної змінної чи параметрів. У задачах лінійного програмування, теорії електричних кіл, економіки та інших досить часто зустрічаються системи вигляду

$$N(t)\frac{dV}{dt} = M(t)V + F(t), \tag{1}$$

де $V(t)$, $F(t)$ — n-вимірні вектори, $N(t)$, $M(t)$ — $(n \times n)$-матриці, $\det N(t) \equiv 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.

Детальне вивчення систем (1) розпочалось у 70-х роках XX століття. На сьогодні найбільш розвиненою є теорія вироджених систем зі сталими коефіцієнтами.

Розвитку загальної теорії вироджених систем і чисельних методів їх розв'язання присвячено значну кількість робіт (див., наприклад, [1–5]). У роботі [6] знайдено загальні достатні умови звідності системи (1) до центральної канонічної форми, що дало змогу в рамках виконання цих умов знайти умови розв'язності задачі Коші та дослідити структуру загального розв'язку цієї задачі.

1. Постановка задачі. Розглянемо лінійну вироджену систему диференціальних рівнянь (1), в якій $t \in [a, b]$, $N(t)$, $M(t) \in C[a, b]$.

Розв'язується задача про дослідження умов існування розв'язків $V(t)$ системи (1) та їх відшукання.

Нехай матриця $N(t)$ має r простих власних чисел $\lambda \equiv 0$ $(\forall t \in [a, b])$. Згідно з [7, с. 166] запишемо її у вигляді

$$N(t) = S(t)\operatorname{diag}\{N_1(t), \Theta\}S^{-1}(t),$$

де $N_1(t)$ і $S(t)$ — невироджені $((n-r) \times (n-r))$- і $(n \times n)$-матриці відповідно, що мають таку ж гладкість, як і $N(t)$, Θ — нульова $(r \times r)$-матриця.

Домножимо систему (1) на $S^{-1}(t)$ зліва та введемо заміну

$$V(t) = S(t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{2}$$

де x і y — $(n-r)$- та r-вимірні вектори відповідно.

Тоді система (1) набирає вигляду

$$\operatorname{diag}\{N_1(t),\Theta\}\begin{bmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}m_1(t) & m_2(t)\\[2ex] C(t) & D(t)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{n-r}(t)\\ -g(t)\end{bmatrix},\tag{3}$$

де $D(t)$ і $C(t)$ — $(r\times r)$- і $(r\times(n-r))$-матриці, $m_1(t)$ і $m_2(t)$ — $((n-r)\times r)$- і $((n-r)\times\times(n-r))$-матриці, $g(t)$ і $F_{n-r}(t)$ — r- і $(n-r)$-вимірні вектори відповідно. При цьому

$$\begin{pmatrix}m_1(t) & m_2(t)\\[2ex] C(t) & D(t)\end{pmatrix}=S^{-1}(t)M(t)S(t)-\operatorname{diag}\{N_1(t),\Theta\}S^{-1}(t)\,\frac{dS(t)}{dt},$$

$$\begin{bmatrix}F_{n-r}(t)\\[2ex] -g(t)\end{bmatrix}=S^{-1}(t)F(t).$$

Рівняння (3) рівносильне гібридній системі

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)y+f(t),\\ &g(t)=C(t)x+D(t)y,\end{aligned}\tag{4}$$

де $f(t)=N_1^{-1}(t)F_{n-r}(t)$ — $(n-r)$-вимірний вектор, $A(t)=N_1^{-1}(t)m_1(t)$ — $((n-r)\times\times(n-r))$-матриця, $B(t)=N_1^{-1}(t)m_2(t)$ — $((n-r)\times r)$-матриця.

Отже, від вихідної лінійної системи диференціальних рівнянь з виродженням (1) ми перейшли до системи двох рівнянь (4), перше з яких є диференціальною системою рівнянь відносно x порядку $n-r$, а друге — алгебраїчним рівнянням.

Запишемо систему (4) у вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=(A(t),B(t))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+f(t),\\ &g(t)=(C(t),D(t))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5}$$

Нехай виконується умова

$$\operatorname{rank}(C(t),D(t))\equiv r.\tag{6}$$

Тоді необхідною і достатньою умовою розв'язності алгебраїчної підсистеми системи (5) відносно $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ є така:

$$\operatorname{rank}(C(t), D(t), g(t)) = \operatorname{rank}(C(t), D(t)).$$

Для знаходження розв'язку алгебраїчного рівняння з (5) побудуємо матрицю Грама матриці $(C(t), D(t))$:

$$\Gamma(t) = (C(t), D(t)) \begin{pmatrix} C^*(t) \\ D^*(t) \end{pmatrix}.$$

Оскільки виконується (6), то $\det \Gamma(t) \neq 0$.

Тому псевдооберненою [8, с. 34] до $(C(t), D(t))$ буде матриця

$$(C(t), D(t))^+ = \begin{pmatrix} C^*(t) \\ D^*(t) \end{pmatrix} \Gamma^{-1}(t). \tag{7}$$

Нехай $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ — довільний вектор, що належить нуль-простору $N(C, D)$ матриці $(C(t), D(t))$, тобто

$$(C(t), D(t)) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8}$$

Тоді з урахуванням (7) розв'язок алгебраїчної системи з (5) має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (C(t), D(t))^+ g(t) + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

або

$$x = C^*(t)\Gamma^{-1}(t)g(t) + x_1, \tag{10}$$

$$y = C^*(t)\Gamma^{-1}(t)g(t) + y_1. \tag{11}$$

Враховуючи (8) та підставляючи значення (10) і (11) в (5), отримуємо систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (A(t), B(t)) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f_1(t), \\ (C(t), D(t)) &\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де $f_1(t) = f(t) + (A(t), B(t))(C(t), D(t))^+ g(t) - [C^*(t)\Gamma^{-1}(t)g(t)]'$.

Розглянемо різні випадки розв’язування системи рівнянь (12).

2. Випадок 1. Нехай $\det D(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$. Тоді з другого рівняння системи (12) виразимо y_1 :

$$y_1 = -D^{-1}(t)\, C(t) x_1. \tag{13}$$

Підставляючи значення (13) в (12), маємо

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1(t) x_1 + f_1(t), \tag{14}$$

де $A_1(t) = A(t) - B(t)D(t)^{-1}(t)C(t)$ — $((n-r)\times(n-r))$-матриця. Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай система (1) є такою, що матриця $N(t)$ має r простих власних чисел $\lambda_i \equiv 0$, $i = \overline{1,r}$, а $\operatorname{rank}(C(t), D(t)) \equiv r$. Тоді при умові, що $\det D(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$, лінійна система диференціальних рівнянь з виродженням (1) порядку n зводиться до системи диференціальних рівнянь (14) без виродження порядку $n - r$.*

Подальший хід розв’язання системи (14), а отже й системи (1), буде залежати від поставленої задачі.

3. Структура загального розв’язку. Умови розв’язності задачі Коші. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді загальний розв’язок системи (14) буде мати вигляд [8, с. 430 – 433]

$$x_1 = \Omega_{t_0}^{t}(A_1)c + \Omega_{t_0}^{t}(A_1)\int\limits_{t_0}^{t} [\Omega_{t_0}^{\tau}(A_1)]^{-1} f_1(\tau)d\tau, \tag{15}$$

де c — довільний сталий вектор, $t_0 \in [a,b]$, $\Omega_{t_0}^{t}(A_1)$ — матрицант відповідного до (14) однорідного рівняння.

Врахувавши (13), (9), (2), отримаємо розв’язок системи (1) у загальному вигляді

$$V(t) = S(t)\left[(C(t), D(t))^{+} g(t) + \begin{pmatrix} x_1 \\ -D^{-1}(t)C(t)x_1 \end{pmatrix}\right], \tag{16}$$

де x_1 обчислюється за формулою (15).

Після підстановки значення (15) в (16) та деяких перетворень маємо

$$V(t) = S(t)\begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix}\Omega_{t_0}^{t}(A_1)c + S(t)\Bigg[(C(t), D(t))^{+} g(t) +$$

$$+ \begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix}\Omega_{t_0}^{t}(A_1)\int\limits_{t_0}^{t}\left[\Omega_{t_0}^{\tau}(A_1)\right]^{-1} f_1(\tau)d\tau\Bigg].$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то вироджена лінійна система (1) має $(n-r)$-параметричну множину лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$V(t) = Q(t)c + \overline{V}(t), \tag{17}$$

де

$$Q(t) = S(t) \begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix} \Omega^t_{t_0}(A_1),$$

$$\overline{V}(t) = S(t) \left[(C(t), D(t))^+ g(t) + \begin{pmatrix} I_{n-r} \\ D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix} \Omega^t_{t_0}(A_1) \int\limits_{t_0}^{t} [\Omega^\tau_{t_0}(A_1)]^{-1} f_1(\tau) d\tau \right],$$

c — довільний $(n-r)$-вимірний сталий вектор.

Розглянемо для системи (1), що задовольняє умови теореми 2, задачу Коші з початковою умовою

$$V(t_0) = V_0, \quad t_0 \in [a, b]. \tag{18}$$

Має місце така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми 2, то для того, щоб задача Коші (1), (18) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$P_{Q^*}\Big(V_0 - \overline{V}(t_0)\Big) = 0,$$

де $Q(t) = S(t) \begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix} \Omega^t_{t_0}(A_1)$, — $(n \times (n-r))$-матриця, а P_{Q^*} — ортопроектор матриці, спряженої до $Q(t)$.

Цей розв'язок єдиний і визначається виразом

$$V(t) = Q(t_0)Q^+(t_0)\Big(V_0 - \overline{V}(t_0)\Big) + \overline{V}(t).$$

Доведення. Знайдемо розв'язок $V(t)$ у точці $t = t_0$, врахувавши (18), та запишемо його у вигляді

$$Q(t_0)c = V_0 - \overline{V}(t_0). \tag{19}$$

Умови розв'язності алгебраїчного відносно c рівняння (19) будемо знаходити вже відомим способом. За теоремою 3.9. [9, c. 92] система (19) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q^*}\Big(V_0 - \overline{V}(t_0)\Big) = 0,$$

де ортопроектор $P_{Q^*} = I_n - QQ^+$, а $Q^+(t)$ — $((n-r)\times n)$-матриця, псевдообернена до $Q(t)$, $Q^+ = (Q^*Q + I_{n-r})^{-1}Q^*$. При цьому, оскільки $\operatorname{rank} Q = n-r$, система (19) має єдиний розв'язок

$$c = Q^+(t_0)\Big(V_0 - \overline{V}(t_0)\Big). \tag{20}$$

Беручи до уваги викладені вище міркування та враховуючи (17), (20), отримуємо твердження даної теореми.

1. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. — Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние). — 1989. — 223 с.
2. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 2. — С. 168 – 174.
3. *Чистяков В. Ф.* К методам решения сингулярных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1982. — С. 37 – 65.
4. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations I.— S.Francisko etc.: Pitman Adv. Publ., 1980. — 176 p.
5. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations II. — S.Francisko etc.: Pitman Adv. Publ., 1982. — 234 p.
6. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
7. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
9. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.

Одержано 27.05.08