УДК 517.95, 97

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ГОЛОВНІЙ ЧАСТИНІ НЕЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

В. О. Капустян

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 02057, Київ, просп. Перемоги, 37

О. П. Когут

Ін-т прикл. систем. аналізу М-ва освіти і науки та НАН України
Україна, 02057, просп. Перемоги, 37, корп. 35

We consider the problem of existence of solutions of an optimal control problem for a nonlinear elliptic equation with Dirichlet conditions on the boundary under the condition that the control functions are coefficients in the principal part of the differential operator. It is shown that this problem has optimal solutions in the class of generalized solenoidal matrices.

Рассматривается проблема существования решений задачи оптимального управления для нелинейного эллиптического уравнения с условиями Дирихле на границе при условии, что функциями управлений являются коэффициенты в главной части дифференциального оператора. Показано, что такая задача имеет оптимальные решения в классе обобщенно-соленоидальных матриц.

s

Вступ. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита обмежена множина, U_∂ — $*$-слабкокомпактна множина в $L^{n\times n}_\infty(\Omega)$. Для фіксованої матриці

$$U = \{a_{ij}(x)\}_{1\le i,\, j\le n} \in U_\partial$$

є заданим формальний оператор $B : U_\partial \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to W^{-1}_q(\Omega)$, де

$$B\,(U, y) = -\Delta_{p,U}(y) + a_0(x)|y|^{p-2}y, \tag{1}$$

$$\Delta_{p,U}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right),$$

$$a_0(x) \ge \beta > 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega, \quad a_0 \in L_\infty(\Omega). \tag{2}$$

Далі Δ_p називатимемо узагальненим лапласіаном і будемо пов'язувати з оператором B білінійну форму

$$\langle B(U,y), v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(a_{ij}(x)\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0(x)|y|^{p-2}y\,v\,dx.$$

Розглянемо в $L^{n\times n}_\infty(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ задачу оптимального керування

$$L(U,y)\to\inf \tag{3}$$

при обмеженнях

$$B(U,y)=f, \tag{4}$$

$$U\in U_\partial, \tag{5}$$

де відображення $L: L^{n\times n}_\infty(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}$ називатимемо функціоналом якості.

Позначимо через Ξ сукупність пар $(U,y)\in L^{n\times n}_\infty(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, пов'язаних співвідношеннями (4), (5), і назвемо її множиною допустимих розв'язків задачі оптимального керування (3) – (5).

Означення 1. *Задачу (3) – (5) будемо називати регулярною, якщо для заданого $f\in W^{-1}_q(\Omega)$ знайдеться пара $(U,y)\in L^{n\times n}_\infty(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ (принаймні одна), яка задовольняє рівняння (4) та обмеження (5). При цьому (U,y) будемо називати допустимою парою.*

Дослідженню такого класу задач оптимального керування присвячено багато робіт (див., наприклад, [1 – 3]). Проте проблема розв'язності таких задач (без додаткових припущень щодо регулярності допустимих керувань $U=\{a_{ij}(x)\}_{1\le i,\,j\le n,}\in U_\partial$) залишається відкритою [3, 4]. У зв'язку з цим зауважимо, що до найбільш загальних результатів, які торкаються проблеми існування розв'язків задач оптимального керування (3) – (5), можна віднести наступний (див. [1], теорема 1.1).

Теорема 1. *Нехай додатково до наведених вище припущень виконуються наступні:*

1) оператор $B: U_\partial\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\to W^{-1}_q(\Omega)$ задовольняє властивість (M): з того, що $U_\partial\ni U_k\to U$ $*$-слабко в $L^{n\times n}_\infty(\Omega)$, $y_k\to y$ слабко в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $B(U_k,y_k)\to d$ слабко в $W^{-1}_q(\Omega)$, та нерівності

$$\varlimsup_{k\to\infty}\langle B(U_k,y_k),y_k\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}\le\langle d,y\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}$$

випливає $d=B(U,y)$;

2) функціонал $L: U_\partial\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}$ є напівнеперервним знизу в $*$-топології $L^{n\times n}_\infty(\Omega)$ та топології слабкої збіжності в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$;

3) оператор B є коерцитивним у наступному сенсі:

$$\inf_{U\in G}\frac{\langle B(U,y),y\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}}{\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}}\to+\infty\quad \textit{при}\quad \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}\to\infty,$$

де G — довільна обмежена підмножина в U_∂.

За цих умов задача (3) – (5) розв'язна тоді і тільки тоді, коли вона є регулярною.

Зауваження 1. Під напівнеперервністю знизу функціонала L в $*$-слабкій топології $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$ та слабкій топології $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ розуміємо секвенційну напівнеперервність знизу, а саме, з того, що $U_k \to U$ $*$-слабко в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$, $y_k \to y$ слабко в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, випливає $\varliminf_{k\to\infty} L(U_k, y_k) \geq L(u, y)$.

Проте до найбільш обмежливих припущень теореми 1 варто віднести виконання властивості (M), яка навіть у лінійному випадку для задачі $(3)-(5)$ може не виконуватися. Дійсно, як зазначено в [3], для задач оптимального керування еліптичними рівняннями, в яких роль керувань відіграють коефіцієнти у головній частині оператора, відображення $U \to y(U)$ не є слабконеперервним (тут $y(U)$ — розв'язок рівняння, що відповідає вибраному U). Як правило, ця обставина призводить до неіснування оптимальних розв'язків. Ряд контрприкладів цього явища наведено [3, 5].

На сьогодні можна виділити кілька підходів, які торкаються регуляризації таких задач. Один із них полягає у переході до так званого G-замикання рівнянь типу (4) і залученні на основі цього узагальнених керувань (див. [3]). Другий — це припущення щодо більшої регулярності допустимих керувань, а саме, використання гіпотези, що $a_{ij} \in W_q^1(\Omega)$ $\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1\right)$ (див. [4]). Проте останній підхід є надто обмежливим з точки зору його практичних застосувань, особливо коли мова йде про випадок, де a_{ij} є або характеристичними, або кусково-сталими функціями.

У зв'язку з цим у даній роботі пропонується перехід до так званих узагальнено-соленоїдальних керувань, які є дещо регулярнішими за керування з $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$, проте вони не обов'язково є елементами соболєвського простору $(W_q^1(\Omega))^{n\times n}$.

Для уточнення класу допустимих керувань та дослідження властивостей відповідних їм розв'язків крайової задачі (4) у першому пункті наведено деякі допоміжні факти та результати, необхідні для встановлення регулярності задачі (3) – (5).

У другому пункті введено поняття узагальнено-соленоїдальної матриці, встановлено $*$-слабку замкненість множини таких матриць та доведено узагальнення леми про компенсовану компактність на випадок $p \geq 2$ (див. лему 4.2.1 в [6]).

Третій пункт присвячено проблемі розв'язності задачі оптимального керування (3) – (5), якщо за множину допустимих керувань U_∂ взяти множину узагальнено-соленоїдальних матриць.

Деякі факти з теорії операторних рівнянь. Нехай X — банахів простір, X^* — топологічно спряжений до нього. Наведемо означення, необхідні для подальшого викладу.

Означення 2. *Будемо говорити, що відображення $B : X \to X^*$ є демінеперервним, якщо з того, що $y_k \to y_0$ сильно в X, випливає, що $B(y_k) \to B(y_0)$ слабко в X^*.*

Означення 3. *Будемо говорити, що відображення $B : X \to X^*$ є радіально неперервним, якщо для довільних фіксованих $y, \xi \in X$ дійсна функція $[0,1] \ni t \mapsto \langle B(y + t\xi), \xi\rangle_X$ є неперервною.*

Як видно, з демінеперервності оператора B випливає його радіальна неперервність.

Означення 4. *Будемо говорити, що відображення $B : X \to X^*$ є коерцитивним, якщо існує $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{R}}$ така, що $\gamma(s) \to \infty$ при $s \to \infty$ та*

$$\frac{1}{\|y\|_X}\langle By, y\rangle_X \geq \gamma(\|y\|_X).$$

Означення 5. *Будемо говорити, що відображення $B : X \to X^*$ є строго монотонним оператором, якщо для довільних елементів $u, v \in X$ виконується нерівність*

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle_X > 0$$

при $u \neq v$.

Означення 6. *Будемо говорити, що відображення $B : X \to X^*$ є сильно монотонним оператором, якщо для довільних елементів $u, v \in X$ виконується нерівність*

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle_X \geq \gamma\left(\|u - v\|_X\right)\|u - v\|_X,$$

де $\gamma(t)$ — невід'ємна функція, визначена при $t \geq 0$, до того ж $\gamma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ і $\gamma(t) = 0$ тільки при $t = 0$.

Зрозуміло, що сильномонотонний оператор є строго монотонним. Наведемо наступний результат із теорії операторних рівнянь (див. [1], наслідок 4.3).

Твердження 1. *Нехай $B : X \to X^*$ — коерцитивний, радіально-неперервний, строго монотонний оператор. Тоді рівняння $By = f$ має єдиний розв'язок при кожному $f \in \in X^*$.*

Тепер детальніше означимо клас допустимих керувань U_∂ і покажемо, що при кожному фіксованому $U \in U_\partial$ оператор $B(U, \cdot)$ буде задовольняти всі властивості твердження 1.

Нехай ξ_1, ξ_2 — задані функції з простору $L_\infty(\Omega)$ такі, що

$$0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega, \tag{6}$$

$$U_\partial = \left\{ \{a_{ij}\}_{1\geq i,j=1\geq n} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{i\,j} \in L_\infty(\Omega), \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ \xi_1(x) \leq a_{i\,j}(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь у} \quad \Omega,\ i, j = 1, \ldots, n, \\ \exists\, \alpha > 0\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n : \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)|\eta_j|^{p-2}\,\eta_j\,\eta_i \geq \alpha\,\|\eta\|^p_{\mathbb{R}^n} \quad \text{майже скрізь у} \quad \Omega. \end{array} \right\} \tag{7}$$

Лема 1. *При кожному фіксованому $u \in U_\partial$ оператор $B : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to W_q^{-1}(\Omega)$, $B(U, \cdot) = = B(\cdot)$, для $p \geq 2$ є коерцитивним, демінеперервним, сильномонотонним відображенням.*

Доведення. Спочатку доведемо коерцитивність оператора B. Розглянемо

$$\langle By, y\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} a_0(x)|y|^{p-2}y^2\, dx = I_1 + I_2.$$

З огляду на (6), (7) та (2) отримаємо оцінки для першого і другого інтегралів відповідно. Роль вектора $\eta \in \mathbb{R}$ з (7) буде відігравати градієнт $\nabla y(x)$. Тоді

$$I_1 \ge \alpha \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^p dx, \quad I_2 \ge \beta \int\limits_{\Omega} |y|^p\, dx.$$

В результаті отримаємо

$$I_1 + I_2 \ge \min\{\alpha, \beta\} \int\limits_{\Omega} \left(|y|^p + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^p \right) dx =$$

$$= \min\{\alpha,\beta\}\, \|y\|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} = \gamma(\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)})\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}, \tag{8}$$

де $\gamma(s) = \min\{\alpha,\beta\} \cdot s^{p-1}$ — функція з означення 4.

Далі доведемо демінеперервність оператора B. А саме, нехай відомо, що $y_m \to y_0$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Покажемо, що для довільного $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$

$$\langle By_m, v\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} \to \langle By_0, v\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}. \tag{9}$$

Оскільки $y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, то $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ для всіх $i = \overline{1,n}$. Отже, для (9) достатньо встановити, що $\left|\dfrac{\partial y_m}{\partial x_j}\right|^{p-2} \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j} \to \left|\dfrac{\partial y_0}{\partial x_j}\right|^{p-2} \dfrac{\partial y_0}{\partial x_j}$ слабко в $L_q(\Omega)$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$. Для цього скористаємось відомою лемою.

Лема 2 [7]. *Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, g_n та g — такі функції з $L_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, що*

$$\|g_n\|_{L_q(\Omega)} \le C, \quad g_n \to g \quad \text{майже скрізь у} \quad \Omega.$$

Тоді $g_n \to g$ слабко в $L_q(\Omega)$.

В результаті сильна збіжність $y_m \to y_0$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ гарантує, що $\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial y_0}{\partial x_i}$ майже скрізь у Ω для кожного $i = \overline{1,n}$. Таким чином,

$$\left|\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\right|^{p-2} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \to \left|\frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right|^{p-2} \frac{\partial y_0}{\partial x_j} \quad \text{майже скрізь у} \quad \Omega. \tag{10}$$

Покажемо, що послідовність (10) є обмеженою. Для цього розглянемо її L_q-норму, де $q = \dfrac{p}{p-1}$. Маємо

$$\int\limits_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} dx = \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p} dx \leq \|\nabla y\|^p_{L^n_p(\Omega)} < \infty.$$

Тоді, використовуючи лему 2, отримуємо $\left| \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j} \right|^{p-2} \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j} \to \left| \dfrac{\partial y_0}{\partial x_j} \right|^{p-2} \dfrac{\partial y_0}{\partial x_j}$ слабко в $L_q(\Omega)$. За аналогією можна довести, що $|y_m|^{p-2} y_m \to |y_0|^{p-2} y_0$ слабко в $L_q(\Omega)$. Отже,

$$\lim_{m\to\infty} \langle B y_m, v \rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \left| \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_{\Omega} a_0(x) |y_m|^{p-2} y_m\, v\, dx \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \left| \frac{\partial y_0}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y_0}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_{\Omega} a_0(x) |y_0|^{p-2} y_0\, v\, dx = \langle B y_0, v \rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)},$$

тим самим властивість демінеперервності для оператора B доведено.

Покажемо, що оператор B є сильномонотонним. Для цього використаємо відому оцінку з [8]: для довільних $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^n$ та $p \geq 2$

$$\left(\|\xi\|^{p-2}_{\mathbb{R}^n} \xi - \|\eta\|^{p-2}_{\mathbb{R}^n} \eta \right) (\xi - \eta) \geq 2^{2-p} \|\xi - \eta\|^p_{\mathbb{R}^n}. \tag{11}$$

Виходячи з (11), знаходимо

$$\langle B y_1 - B y_2, y_1 - y_2 \rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) \left(\left| \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} - \left| \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i} - \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} a_0(x) \left(|y_1|^{p-2} y_1 - |y_2|^{p-2} y_2 \right) (y_1 - y_2)\, dx \geq$$

$$\geq \delta \int\limits_{\Omega} \left(\|\nabla y_1\|^{p-2}_{\mathbb{R}^n} \nabla y_1 - \|\nabla y_2\|^{p-2}_{\mathbb{R}^n} \nabla y_2 \right) (\nabla y_1 - \nabla y_2)\, dx +$$

$$+ \beta \int\limits_{\Omega} |y_1 - y_2|^p\, dx \geq$$

$$\geq \min\{\delta,\beta\} \int\limits_\Omega \left(\|\nabla y_1 - \nabla y_2\|^p_{\mathbb{R}^n} + |y_1 - y_2|^p\right) dx =$$

$$= \min\{\delta,\beta\} \|y_1 - y_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} = \gamma\left(\|y_1 - y_2\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}\right) \|y_1 - y_2\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}.$$

Тут константу δ взято з нерівності (6), а функцію $\gamma(t) = t^{p-1}$ — з означення 6. Тим самим лему доведено.

З встановлених вище результатів та твердження 1 можна зробити наступний очевидний висновок.

Теорема 2. *Для кожного елемента U з множини U_∂, яка визначена за правилом (7), крайова задача (4) має єдиний розв'язок у просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, тобто задача оптимального керування (3) – (7) є регулярною. Отже, множина допустимих пар Ξ є непорожньою підмножиною декартового добутку $L^{n\times n}_\infty(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$.*

Зауважимо, що множина U_∂ є секвенційно компактною відносно $*$-слабкої топології в $L^{n\times n}_\infty(\Omega)$. Проте властивість компактності для множини допустимих пар Ξ у загальному випадку не виконується. Підтвердженням цього факту можуть слугувати контрприклади, наведені у роботі [3]. З іншого боку, нехай $\{U_k\}_{k\geq 1}$ утворюють послідовність допустимих керувань в U_∂. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що існує $U_0 \in U_\partial$, при якому $U_k \to U_0$ $*$-слабко в $L^{n\times n}_\infty(\Omega)$. Нехай y_k — відповідні їм розв'язки крайової задачі 4 при $U = U_k$. Виходячи з оцінки (8), легко бачити, що послідовність $\{y_k\}_{k\geq 1}$ є обмеженою в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Отже, цю послідовність можна вважати слабкозбіжною в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Проте знайти границю при $k \to \infty$ в інтегральній тотожності

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \left(a^k_{ij}(x)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega a_0(x)|y_k|^{p-2} y_k\, v\, dx = \int\limits_\Omega f\, v\, dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$$

у загальному випадку неможливо через наявність добутку двох слабкозбіжних послідовностей. Це означає, що множина Ξ не обов'язково є компактною. Отже, проблема розв'язності задачі оптимального керування (3) – (7) залишається відкритою.

Лема про компенсовану компактність та її застосування. Нехай $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — сукупність непорожніх компактних підмножин простору $W^{-1}_q(\Omega)$. Введемо до розгляду множину

$$V = \{U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in L^{n\times n}_\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u}_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{12}$$

де значення оператора div на векторі $\mathbf{u} \in L^n_q(\Omega)$ визначається як елемент простору $W^{-1}_q(\Omega)$ такий, що

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} = -\int\limits_\Omega (\mathbf{u}, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \phi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega).$$

Наведемо означення оператора rot для випадку n-вимірних вектор-функцій $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in L_p^n(\Omega)$. Для довільного $v \in L_p^n(\Omega)$ рівністю

$$\langle \operatorname{rot} v, \phi \rangle^{ij}_{\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)} = -\int\limits_\Omega \left(v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx \quad \forall\, \phi \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

визначаються компоненти кососиметричної матриці $\operatorname{rot} v$ як елементи з $W_p^{-1}(\Omega)$. Вектор $v \in L_p^n(\Omega)$ такий, що $\operatorname{rot} v = 0$, у випадку однозв'язної області Ω є потенційним, тобто його можна подати у вигляді $v = \nabla \xi$, де $\xi \in W_p^1(\Omega)$.

Будемо говорити, що функціональний параметр U є допустимим керуванням, якщо $U \in V \bigcap U_\partial$, де припускається, що $V \bigcap U_\partial \neq \varnothing$, а множину U_∂ означено в (6), (7). Множину всіх допустимих керувань позначимо через $U_{\rm sol}$.

Лема 3. $U_{\rm sol}$ — *секвенційно компактна множина в $*$-слабкій топології простору* $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\{U_k = [\mathbf{u}_{1k}, \mathbf{u}_{2k}, \ldots, \mathbf{u}_{nk}]\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність в $U_{\rm sol}$. Оскільки $U_{\rm sol} \subset U_\partial$, а множина U_∂ є секвенційно $*$-слабкокомпактною в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$, то можна вважати, що існують матриця $U_0 \in U_\partial$ та елементи $f_i \in Q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такі, що

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,k}, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \to \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,0}, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \phi \in [L^1(\Omega)]^n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

та

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{i\,k} \to f_i \quad \text{в} \quad W_q^{-1}(\Omega), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Тепер залишилось довести, що насправді $\operatorname{div} \mathbf{u}_{i\,0} = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для цього виберемо в якості вектора ϕ такий, що $\phi = \nabla p$, де $p \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Тоді, виходячи з означення дивергенції та припущень (14), отримуємо

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,k}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n} dx = -\langle \operatorname{div} \mathbf{u}_{i\,k}, p \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\langle f_i, p \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку, враховуючи (13) та останнє співвідношення, маємо

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,k}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n} dx = \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,0}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n}\, dx =$$

$$= -\langle \operatorname{div} \mathbf{u}_{i\,0}, p \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} = -\langle f_i, p \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отже, $U_0 = [\mathbf{u}_{1\,0}, \mathbf{u}_{2\,0}, \ldots, \mathbf{u}_{n\,0}] \in U_{\rm sol}$, що і потрібно було встановити.

Тепер, виходячи з переозначення множини допустимих керувань, перейдемо до нової задачі оптимального керування

$$L(U, y) \to \inf \tag{15}$$

при обмеженнях

$$B(U, y) = f, \tag{16}$$

$$U \in U_{\mathrm{sol}}. \tag{17}$$

Множиною допустимих розв'язків Ξ задачі (15)–(17) будемо називати сукупність пар $(U, y) \in L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, які пов'язані співвідношеннями (16), (17).

Далі через τ будемо позначати топологію у просторі $L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ як добуток $*$-слабкої топології в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$ та слабкої топології у просторі $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Для подальшого дослідження множини Ξ наведемо один результат типу відомої леми про компенсовану компактність на випадок $p \geq 2$ (див. для порівняння лему 4.2.1 в [6]):

Лема 4. *Нехай $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_q^n(\Omega)$, $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset L_p^n(\Omega)$ — послідовності вектор-функцій такі, що $f_k \to f_0$ слабко в $L_q^n(\Omega)$ і $g_k \to g_0$ слабко в $L_p^n(\Omega)$. Додатково припустимо, що означені послідовності задовольняють умови:*

1) $\{\operatorname{div} f_k\}_{k=1}^\infty$ — компактна послідовність в $W_q^{-1}(\Omega)$,

2) $\operatorname{rot} g_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi\, (f_k, g_k)_{\mathbb{R}^n}\, dx = \int_\Omega \phi\, (f_0, g_0)_{\mathbb{R}^n}\, dx \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{18}$$

Зауваження 2. Зазвичай співвідношення (18) можна трактувати як $*$-слабку збіжність послідовності $\{(f_k, g_k)_{\mathbb{R}^n}\}_{k=1}^\infty$ до елемента $(f_0, g_0)_{\mathbb{R}^n}$ у просторі $L_1(\Omega)$ (див. [9]).

Доведення. Маємо

$$(f_k, g_k)_{\mathbb{R}^n} = (f_k - f_0, g_k - g_0)_{\mathbb{R}^n} - (f_0, g_0)_{\mathbb{R}^n} + (f_k, g_0)_{\mathbb{R}^n} + (f_0, g_k)_{\mathbb{R}^n}\,.$$

Останні три доданки мають очевидну $*$-слабку границю, яка дорівнює $(f_0, g_0)_{\mathbb{R}^n}$. Тому доведення можна звести до випадку, коли $f_0 = g_0 = 0$. Тоді можна вважати, що (переходячи при необхідності до підпослідовності) $\operatorname{div} f_k \to 0$ сильно в $W_q^{-1}(\Omega)$.

Оскільки $*$-слабка збіжність має локальний характер, то область Ω можна вважати кулею. Внаслідок того, що $\operatorname{rot} g_k = 0\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, вектори g_k є потенційними, тобто можна вважати, що $g_k = \nabla u_k$, де $\int_\Omega u_k\, dx = 0\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. За початковими припущеннями $g_k = \nabla\, u_k \to 0$ слабко в $L_p^n(\Omega)$. Тому, виходячи з нерівності Пуанкаре–Фрідріхса, одержуємо $u_k \to 0$ слабко в $W_p^1(\Omega)$, а отже, $u_k \to 0$ сильно в $L_p(\Omega)$.

Тепер для довільної фіксованої функції $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ маємо

$$\int_\Omega (f_k, g_k)_{\mathbb{R}^n}\, \phi\, dx = \int_\Omega (f_k, \nabla(\phi\, u_k))_{\mathbb{R}^n}\, dx - \int_\Omega u_k\, (f_k, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\, dx =$$

$$= \langle \operatorname{div} f_k, \phi\, u_k \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} - \int_\Omega u_k\, (f_k, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\, dx. \tag{19}$$

З того, що $\operatorname{div} f_k \to 0$ сильно в $W_q^{-1}(\Omega)$, а послідовність $\{\phi\, u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, випливає, що $\langle \operatorname{div} f_k, \phi\, u_k \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Останній інтеграл у (19) прямує до нуля, тому що $u_k \to 0$ сильно в $L_p(\Omega)$, а $\{(f_k, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\}_{k=1}^{\infty}$ — обмежена послідовність в $L_q(\Omega)$.

Наступне твердження є основним результатом даної роботи.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (6), (7) та (12) і множина $U_{\rm sol}$ є непорожньою. Тоді для кожного фіксованого $f \in W_q^{-1}(\Omega)$ множина допустимих розв'язків Ξ є секвенційно τ-замкненою в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.*

Доведення. Нехай $\{(U_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi$ — довільна τ-збіжна послідовність допустимих пар, а (U_0, y_0) — її τ-границя. Покажемо, що $(U_0, y_0) \in \Xi$. Введемо наступні позначення. Нехай

$$B(U,y) = -\operatorname{div}\big(U(x)\,|\nabla y|^{p-2}\,\nabla y\big) + a_0(x)\,|y|^{p-2}\,y,$$

$$\tilde{B}(U,y) = -\operatorname{div}\big(U(x)\,|\nabla y|^{p-2}\,\nabla y\big) = -\operatorname{div} A(U(x), \nabla y).$$

За початковими припущеннями

$$U_k \to U_0 \;\; *\text{-слабко в} \;\; L_\infty^{n\times n}(\Omega),$$

$$y_k \to y_0 \;\; \text{слабко в} \;\; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega).$$

Тоді, як показано в лемі 1, для $q = \dfrac{p}{p-1}$

$$\big\{|\nabla y_k|^{p-2}\,\nabla y_k\big\}_{k=1}^{\infty} \;\; \text{обмежена в} \;\; L_q^n(\Omega),$$

$$|y_k|^{p-2}\,y_k \to |y_0|^{p-2}\,y_0 \;\; \text{слабко в} \;\; L_q(\Omega).$$

За умовою

$$-\operatorname{div}\left(A(U_k, \nabla y_k)\right) = f - a_0(x)|y_k|^{p-2}y_k.$$

Позначимо $f_k = f - a_0(x)|y_k|^{p-2}y_k$. Тоді $f_k \in W_q^{-1}(\Omega) \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$. При цьому, виходячи з компактності вкладення простору $L_q(\Omega)$ у простір $W_q^{-1}(\Omega)$ (див. [10]), отримуємо $f_k \to f_0 = f - a_0(x)|y_0|^{p-2}|y_0|$ сильно в $W_q^{-1}(\Omega)$. Отже, $\{A(U_k, \nabla y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — обмежена послідовність у $L_q^n(\Omega)$.

Нехай $\xi_k = A(U_k, \nabla y_k)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Тоді можна вважати, що $\xi_k \to \xi$ слабко в $L_q^n(\Omega)$. Отже, враховуючи початкові припущення, маємо:

1) $U_k \to U_0 = [\mathbf{u}_{1_0}, \mathbf{u}_{2_0}, \ldots, \mathbf{u}_{n_0}]$ $*$-слабко в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$,

2) $\operatorname{div} \mathbf{u}_{i_k} \to \operatorname{div} \mathbf{u}_{i_0}$ сильно в $W_q^{-1}(\Omega)$, $\;i = 1, 2, \ldots, n$,

3) $y_k \to y_0$ слабко в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$,

4) $|y_k|^{p-2}\,y_k \to |y_0|^{p-2}\,y_0$ слабко в $L_q(\Omega)$,

5) $\xi_k \to \xi$ слабко в $L_q^n(\Omega)$.

Тому, переходячи до границі (у сенсі розподілів) у рівності

$$-\operatorname{div} \xi_k = f - a_0(x)|y_k|^{p-2}|y_k|,$$

отримуємо

$$-\operatorname{div}\xi = f - a_0(x)|y_0|^{p-2}|y_0|. \tag{20}$$

Проблема полягає у встановленні зв'язку між ξ та парою (U_0, y_0). Введемо до розгляду функцію

$$v(x) = (z, x)_{\mathbb{R}^n}, \tag{21}$$

де z — довільний фіксований вектор з $\mathbb{R}^n$. Оскільки оператор B є монотонним, то для всіх $z \in \mathbb{R}^n$ та всіх додатних $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ маємо

$$\int_\Omega \phi(x)\,(A(U_k, \nabla y_k) - A(U_k, \nabla v), \nabla y_k - \nabla v)_{\mathbb{R}^n}\, dx \geq 0,$$

або, враховуючи (21), останнє можна переписати у вигляді

$$\int_\Omega \phi(x)\,(A(U_k, \nabla y_k) - A(U_k, z), \nabla y_k - z)_{\mathbb{R}^n}\, dx \geq 0. \tag{22}$$

Тут

$$-\operatorname{div} A(U_k, \nabla y_k) \to f - a_0(x)|y_0|^{p-2}|y_0| \quad \text{сильно в} \quad W_q^{-1}(\Omega),$$

$$\operatorname{rot}(\nabla y_k - z) = \operatorname{rot}\nabla y_k = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що послідовність $\{\operatorname{div} A(U_k, z)\}_{k=1}^\infty$ є компактною в $W_q^{-1}(\Omega)$. Якщо це так, то в нерівності (22) можна перейти до границі за лемою про компенсовану компактність.

Виходячи з означення оператора дивергенції, внаслідок щільності $C_0^\infty(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ маємо

$$\langle -\operatorname{div} A(U_k, z), \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} = \int_\Omega (A(U_k, z), \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\, dx = I_k \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

Отже,

$$I_k = \int_\Omega \left(U_k(x)|z|^{p-2}z, \nabla\phi\right) dx =$$

$$= |z|^{p-2} \int_\Omega \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{1_k}(x), z)_{\mathbb{R}^n} \\ \dots \\ (\mathbf{u}_{n_k}(x), z)_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix}, \nabla\phi \right)_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= |z|^{p-2} \int_\Omega \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_{i_k}(x), z)_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx =$$

$$= |z|^{p-2} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^k_{ij}(x) \frac{\partial\phi}{\partial x_i} z_j \, dx =$$

$$= |z|^{p-2} \sum_{j=1}^n z_j \int_\Omega (\mathbf{u}_{j_k}(x), \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= -|z|^{p-2} \sum_{j=1}^n z_j \langle \mathrm{div}\mathbf{u}_{j_k}, \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}. \tag{23}$$

Перейдемо в (23) до границі, врахувавши умову 2. Отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} I_k = |z|^{p-2} \sum_{j=1}^n z_j \lim_{k\to\infty} \langle -\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{j_k}, \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} =$$

$$= |z|^{p-2} \sum_{j=1}^n z_j \langle -\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{j_0}, \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}.$$

Реалізуючи обернену до (23) процедуру, знаходимо

$$\lim_{k\to\infty} \langle -\mathrm{div}\, A(U_k, z), \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} = \langle -\mathrm{div}\, A(U_0, z), \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}. \tag{24}$$

Оскільки для кожного $i = 1, 2, \dots, n$ $\{\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ утворюють сильнозбіжну послідовність в $W_q^{-1}(\Omega)$, то тим самим доведено, що з (24) випливає

$$\lim_{k\to\infty} \langle -\mathrm{div}\, A(U_k, z), \phi_k\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} = \langle -\mathrm{div}\, A(U_0, z), \phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \tag{25}$$

для будь-якої слабкозбіжної в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ послідовності $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$. Тим самим маємо, що $\mathrm{div}A(U_k, z) \to \mathrm{div}A(U_0, z)$ сильно в $W_q^{-1}(\Omega)$. Окрім цього, легко бачити, що

$$A(U_k, z) = U_k\,|z|^{p-2}z \to U_0\,|z|^{p-2}z = A(U_0, z) \;\; * \text{-слабко в} \;\; L^n_\infty(\Omega). \tag{26}$$

Отже, всі передумови леми 4 виконуються. Тому, переходячи в (22) до границі і враховуючи умови 3, 5 та (25), (26), отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} \phi(x)\,(\xi - A(U_0, z), \nabla\, y_0 - z)_{\mathbb{R}^n}\, dx \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Оскільки ця нерівність виконується для всіх додатних $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то після локалізації маємо

$$(\xi - A(U, z), \nabla y - z)_{\mathbb{R}^n} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Виходячи зі строгої монотонності для $B(U, z)$, доведеної в лемі 1, знаходимо

$$\xi = A(U_0, \nabla y_0) = U_0(x)|\nabla y_0|^{p-2}\nabla y_0.$$

Тим самим (див. (20)) одержуємо наступне рівняння:

$$-\mathrm{div}\left(U_0(x)|\nabla y_0|^{p-2}\nabla y_0\right) + a_0(x)|y_0|^{p-2}y_0 = f \quad \forall x \in \Omega.$$

Отже, ми довели, що пара (U_0, y_0) пов'язана рівнянням (16) і при цьому $U_0 \in U_{\mathrm{sol}}$ внаслідок $*$-слабкої замкненості множини U_{sol}. Тим самим доведено, що множина допустимих розв'язків Ξ є секвенційно τ-замкненою у просторі $L_{\infty}^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Теорему 3 доведено.

Розв'язність задачі оптимального керування.

Теорема 4. *Нехай $U_{\mathrm{sol}} \neq \varnothing$ і в задачі (15) – (17) функціонал якості*

$$L : U_{\mathrm{sol}}\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$$

є напівнеперервним знизу в $*$-слабкій топології $L_{\infty}^{n\times n}(\Omega)$ та топології слабкої збіжності в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Нехай також виконуються умови (6), (7) та (2). Тоді задача оптимального керування (15) – (17) (у класі узагальнено-соленоїдальних керувань) має непорожню множину розв'язків.

Доведення. З припущення про непорожність множини U_{sol} і теореми 2 випливає регулярність задачі (15) – (17). Покажемо тепер, що виконуються умови 1 та 3 теореми 1. Оцінка (8) з леми 1 дає виконання умови 3. А умову 1 доведемо за допомогою теореми 3, при доведенні якої було показано, що якщо

$$U_k \to U_0 \text{ *-слабко в } \quad L_{\infty}^{n\times n}(\Omega),$$

$$y_k \to y_0 \quad \text{слабко в} \quad \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),$$

то $B(U_k, y_k) \to B(U_0, y_0)$ слабко у просторі $W_q^{-1}(\Omega)$. Отже, для оператора $B(U, y)$ властивість (M) виконується. Таким чином, для завершення доведення залишається скористатися теоремою 1.

Як приклад функціонала якості, що задовольняє умови теореми 1, наведемо наступний:

$$L(U,y) = \|\nabla y - z_\partial\|_{L^n_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\operatorname{div}\mathbf{u}_i\|_{W_q^{-1}(\Omega)} + \|U\|_{L^{n\times n}_\infty(\Omega)},$$

де $z_\partial \in L^n_p(\Omega)$ — заданий фіксований вектор.

Зауважимо, що вибір в якості класу допустимих керувань множини узагальнено-соленоїдальних матриць U_{sol} не передбачає перехід до матриць, елементи яких належать простору $W_q^1(\Omega)$. Тобто у загальному випадку це ширша множина, ніж

$$\big\{U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [W_q^1(\Omega)]^{n\times n} : \operatorname{div}\mathbf{u}_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\big\} \cap U_\partial.$$

Більш того, оскільки $\operatorname{div}\mathbf{u} \in [W_q^{-1}(\Omega)]$ для всіх $\mathbf{u} \in [W_q^1(\Omega)]^n$, то для вибраних множин $Q_i \subset W_q^{-1}(\Omega)$ мають місце співвідношення

$$U_{\mathrm{sol}} \not\subseteq [W_q^1(\Omega)]^{n\times n} \cap U_\partial, \quad U_{\mathrm{sol}} \cap \big([W_q^1(\Omega)]^{n\times n} \cap U_\partial\big) \neq \varnothing,$$

$$\big\{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [W_q^1(\Omega)]^{n\times n} : \operatorname{div}\mathbf{u}_i \in Q_i, \quad i = \overline{1,n}\big\} \cap U_\partial \subset U_{\mathrm{sol}} \subset U_\partial.$$

Крім того, для оператора

$$B(U,y) = -\operatorname{div}(U(x)|\nabla y|^{p-2}|\nabla y|) + a_0(x)\,|y|^{p-2}\,y,$$

як було показано вище, властивість (M) може порушуватися. Проте ця властивість залишиться незмінною, як тільки $U \in U_{\mathrm{sol}}$.

1. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 324 с.
2. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Науч. книга, 1999. — 350 с.
3. *Райтум У. Е.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 274 с.
4. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука, 1987. — 366 с.
5. *Корсакова Л. В.* Примеры несуществования решения задачи Лионса об оптимальном управлении // Пробл. мат. анализа. — 1977. — Вып. 6. — С. 60–67.
6. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. Л.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. — 461 с.
7. *Лионс Дж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
8. *Casado-Diaz J.* Existence of a sequence satisfying Cioranescu – Murat conditions in homogenization of Dirichlet problems in perforated domains // Rend. mat. — 1996. — Ser. VII. — P. 387–413.
9. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — Киев: Наук. думка, 2004. — 590 с.
10. *Adams R.* Sobolev spaces. — New York: Acad. Press, 1975. — 245 p.

Одержано 04.03.08