УДК 517.911.5, 517.928

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРИРУЕМОЙ ПО ПЕРРОНУ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В. А. Плотников, А. В. Романюк

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: roleks@gmail.com

We consider an extension of Bogolyubov's theorem to differential equations with Perron integrable right-hand side.

Розглянуто узагальнення теореми Боголюбова на диференціальні рівняння з інтегровною за Перроном правою частиною.

Обобщение теоремы Боголюбова на дифференциальные уравнения с интегрируемой по Лебегу правой частью при выполнении теоремы существования решения уравнения Каратеодори [1, 2] получено в [3]. Решение уравнения с интегрируемой по Лебегу правой частью ищут в классе абсолютно непрерывных функций $x(t) \in AC$ [2, 4, 5]. В [6] приведен обзор работ по обобщению теоремы Боголюбова.

Рассмотрим дифференциальное уравнение стандартного вида с интегрируемой по Перрону [4, 5] правой частью

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in I = \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$.

Дифференциальные уравнения с интегрируемой по Перрону правой частью рассматриваются, например, в [1, 7]. В [1] приведена теорема существования и единственности решения дифференциальных уравнений с интегрируемой по Перрону правой частью. При этом решение принадлежит классу обобщенных абсолютно непрерывных функций $x(t) \in ACG_*$ [5, 7].

Уравнению (1) поставим в соответствие усредненное дифференциальное уравнение

$$\dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}(\xi), \quad \xi(0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$\overline{X}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t,x)dt. \tag{3}$$

Здесь интеграл понимается в смысле Перрона.

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) в любом $\overline{R} = \{(t,x) | t \in [a,b], \|x - x_0\| \leq r\} \subset Q$ функция $X(t,x)$ интегрируема по Перрону по t при любом фиксированном x и непрерывна по x при любом фиксированном t;

2) существуют суммируемая функция $H(t)$ и H_0 такое, что для любых $(t,x'),(t,x'')\in$ $\in Q$

$$\|X(t,x')-X(t,x'')\| < H(t)\|x'-x''\|,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} H(t)\,dt \le H_0(t_2-t_1)$$

для любого конечного сегмента $[t_1,t_2]$;

3) равномерно относительно $x\in D$ существует предел в (3);

4) решение $\xi(t)$ усредненной системы (2), $x_0\in D'\subset D$, определено для всех $t\ge 0$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D.

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta>0$ и сколь угодно большого $L>0$ существует $\varepsilon_0(\eta,L)>0$ такое, что при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ на отрезке $0\le t\le L\varepsilon^{-1}$ выполняется неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\|\le\eta,$$

где $x(t),\xi(t)$ — решения систем (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Боголюбова [8], можно показать, что функция $\overline{X}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной H_0.

Из условий 1, 2 теоремы и [4] следует, что на сегменте $\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$ системы (1) и (2) имеют единственные решения $x(t)$ и $\xi(t)$:

$$x(t)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^t X(s,x(s))ds,$$

$$\xi(t)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^t \overline{X}(\xi(s))ds.$$

Рассмотрим

$$x(t)-\xi(t)=\varepsilon\int\limits_0^t [X(\tau,x)-X(\tau,\xi)]d\tau+\varepsilon\int\limits_0^t \left[X(\tau,\xi)-\overline{X}(\xi)\right]d\tau,$$

откуда

$$\|x(t)-\xi(t)\|\le\varepsilon\int\limits_0^t H(\tau)\|x(\tau)-\xi(\tau)\|d\tau+\varepsilon\left\|\int\limits_0^t \left[X(\tau,\xi)-\overline{X}(\xi)\right]d\tau\right\|. \tag{4}$$

Согласно лемме Гроноулла – Беллмана

$$\|x(t)-\xi(t)\|\le\varepsilon\exp\{LH_0\}\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-1}]}\left\|\int\limits_0^t \left[X(\tau,\xi)-\overline{X}(\xi)\right]d\tau\right\|.$$

Оценим интеграл в последнем множителе. Положим $\varphi(\tau,\xi) := X(\tau,\xi) - \overline{X}(\xi)$, тогда

$$\left\|\varepsilon\int\limits_0^t [X(\tau,\xi)-\overline{X}(\xi)]d\tau\right\| = \left\|\varepsilon\int\limits_0^t \varphi(\tau,\xi(\tau))d\tau\right\|.$$

Разделим отрезок I на m равных частей точками $t_i = \dfrac{Li}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0,m}$; $\xi_i := \xi(t_i)$, $i = \overline{0,m}$. Тогда для $t \in [t_k, t_{k+1})$, $0 \le k \le m-1$,

$$\varepsilon\int\limits_0^t \varphi(\tau,\xi(\tau))d\tau = \sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi(\tau,\xi(\tau))d\tau + \varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}\varphi(\tau,\xi(\tau))d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[\varphi(\tau,\xi(\tau))-\varphi(\tau,\xi_i)]d\tau + \sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau +$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[\varphi(\tau,\xi(\tau))-\varphi(\tau,\xi_i)]d\tau + \varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau.$$

Запишем уравнение (2) в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi),$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0,L]$. Тогда из условия 2 теоремы в силу непрерывности $\xi(\tau)$, $\tau \in [0,L]$, следует

$$\left\|\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[\varphi(\tau,\xi(\tau))-\varphi(\tau,\xi_i)]d\tau\right\| \le \varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(H(\tau)+H_0)\|\xi(\tau)-\xi_i\|d\tau \le \frac{2LH_0\sigma}{m},$$

$$\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[\varphi(\tau,\xi(\tau))-\varphi(\tau,\xi_i)]d\tau\right\| + \left\|\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[\varphi(\tau,\xi(\tau))-\varphi(\tau,\xi_i)]d\tau\right\| \le 2LH_0\sigma,$$

и для любого $\eta > 0$ найдется σ_0 такое, что при $0 < \sigma \le \sigma_0$

$$2LH_0\sigma\exp\{LH_0\} < \frac{\eta}{2}. \tag{5}$$

В силу условия 3 можно построить монотонную убывающую функцию $f(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ такую, что

$$\left\|\int\limits_0^t \varphi(s,x)ds\right\| \le tf(t), \quad x \in D.$$

Очевидно, что

$$\left\|\varepsilon\int\limits_0^{t_i}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|\le\varepsilon t_i f(t_i)\le F(\varepsilon),$$

$$\left\|\varepsilon\int\limits_0^{t}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|\le\varepsilon t f(t)\le F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon)=\sup\limits_{\tau\in[0,L]}[\tau f(\tau\varepsilon^{-1})]\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0.$

Тогда

$$\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|+\left\|\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|\le\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{0}^{t_{i+1}}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|+$$

$$+\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{0}^{t_{i}}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|+\left\|\varepsilon\int\limits_{0}^{t_k}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|+\left\|\varepsilon\int\limits_{0}^{t}\varphi(\tau,\xi_i)d\tau\right\|<2mF(\varepsilon),$$

и для любого $\eta>0$ найдутся m и ε_0 такие, что при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$

$$2mF(\varepsilon)\exp\{LH_0\}<\frac{\eta}{2}. \tag{6}$$

Из (4) – (6) имеем

$$\|x(t)-\xi(t)\|\le 2[\sigma LH_0+mF(\varepsilon)]\exp(LH_0)\equiv\alpha(\varepsilon,m)<\eta.$$

Зафиксируем m. Если ε_0 будем находить из условия

$$2mF(\varepsilon_0)\exp(LH_0)<\frac{\eta}{2},$$

то получим утверждение теоремы при условии, что $x(\cdot)$ не выходит из области Q на I. Покажем, что это так.

Действительно, поскольку $x_0\in\operatorname{int}Q$, на некотором отрезке $[0,t']$ решение $x(\cdot)$ принадлежит Q. Выберем ε_0 и m так, чтобы

$$\alpha(\varepsilon,m)<\min\left\{\frac{\rho}{2},\frac{\eta}{2}\right\}.$$

Тогда на I будем иметь

$$\|x(t)-\xi(t)\|<\frac{\rho}{2}.$$

Если предположить, что $t'<L\varepsilon^{-1}$, то на I, в силу непрерывности решений $x(t)$ и $\xi(t)$, найдется точка t'', в которой будет выполняться неравенство

$$\frac{\rho}{2}<\|x(t'')-\xi(t'')\|<\rho.$$

Но отсюда следует, что при $t = t''$ решение не вышло из области Q. Поэтому $t'' \in [0, t']$, и тогда $\|x(t'') - \xi(t'')\| \leq \dfrac{\rho}{2}$. Получили противоречие. Следовательно, $t'' \geq L\varepsilon^{-1}$.

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t)x], \quad x(0) = x_0, \tag{7}$$

где $f(t) = \begin{cases} t^{-\frac{5}{4}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{t}} + D(t), & t \neq 2\pi i, \\ 0, & t = 2\pi i, \end{cases}$ а $D(t)$ — функция Дирихле.

Функция $f(t)$ не интегрируема ни по Риману, ни по Лебегу, но интегрируема по Перрону. Ее среднее

$$\overline{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - 2S\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\right)\right),$$

где $S(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^y \sin t^2 dt$ — интеграл Френеля.

Уредненное уравнение, соответствующее (7), имеет вид

$$\dot{y} = \varepsilon \overline{f} y, \quad y(0) = x_0.$$

Теперь пусть существует такая функция $\tilde{X}(t, x)$, для которой

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[X(t, x) - \tilde{X}(t, x) \right] dt = 0. \tag{8}$$

Системе (1) поставим в соответствие систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad \xi(0) = x_0, \tag{9}$$

и назовем ее частично усредненной.

Теорема 2. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0, \ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) в любом $\overline{R} = \{(t, x) | t \in [a, b], \|x - x_0\| \leq r\} \subset Q$ функции $X(t, x)$ и $\tilde{X}(t, x)$ интегрируемы по Перрону по t при любом фиксированном x и непрерывны по x при любом фиксированном t;

2) существуют суммируемая функция $H(t)$ и H_0 такое, что для любых $(t, x'), (t, x'') \in \in Q$

$$\|X(t, x') - X(t, x'')\| < H(t) \|x' - x''\|,$$

$$\|\tilde{X}(t, x') - \tilde{X}(t, x'')\| < H(t) \|x' - x''\|,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} H(t) dt \leq H_0(t_2 - t_1)$$

для любого конечного сегмента $[t_1, t_2]$;

3) равномерно относительно $x \in D$ *существует предел в (8);*

4) решение $\xi(t)$ *частично усредненной системы (9),* $x_0 \in D' \subset D$, *определено для всех* $t \geq 0$ *и лежит вместе с* ρ*-окрестностью в области* D.

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *такое, что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *выполняется неравенство*

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta,$$

где $x(t)$ *и* $\xi(t)$ *— решения систем (1) и (9) соответственно.*

Доказательство. Из условий 1, 2 теоремы и [4] следует, что на сегменте $\left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ системы (1) и (9) имеют единственные решения $x(t)$ и $\xi(t)$:

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t X(s, x(s))ds,$$

$$\xi(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \tilde{X}(s, \xi(s))ds.$$

Рассмотрим

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \left[X(\tau, x) - X(\tau, \xi)\right] d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \left[X(\tau, \xi) - \tilde{X}(\tau, \xi)\right] d\tau,$$

откуда

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \varepsilon \int\limits_0^t H(\tau)\|x(\tau) - \xi(\tau)\|d\tau + \varepsilon \left\| \int\limits_0^t \left[X(\tau, \xi) - \tilde{X}(\tau, \xi)\right] d\tau \right\|. \tag{10}$$

По лемме Гроноулла – Беллмана

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \varepsilon \exp\{LH_0\} \sup_{t \in [0, L\varepsilon^{-1}]} \left\| \int\limits_0^t \left[X(\tau, \xi) - \tilde{X}(\tau, \xi)\right] d\tau \right\|.$$

Оценим интеграл в последнем множителе.

Разделим отрезок I на m равных частей точками $t_i = \dfrac{Li}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0, m}$; $\xi_i := \xi(t_i)$, $i =$

$= \overline{0,m}$. Тогда для $t \in [t_k, t_{k+1})$, $0 \le k \le m-1$,

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) \right] d\tau \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X(\tau,\xi(\tau)) - X(\tau,\xi_i)]\, d\tau \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi_i) \right] d\tau \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{t_{i+1}} \left[X(\tau,\xi_i) - \tilde{X}(\tau,\xi_i) \right] d\tau \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{k} \int_0^{t_i} \left[X(\tau,\xi_i) - \tilde{X}(\tau,\xi_i) \right] d\tau \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_0^{t_k} \left[X(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) \right] d\tau \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^{t} \left[X(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) \right] d\tau \right\|.$$

Запишем уравнение (9) в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \tilde{X}(\tau,\xi),$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0,L]$. Тогда из условия 2 теоремы в силу непрерывности $\xi(\tau)$, $\tau \in [0,L]$, следует

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X(\tau,\xi(\tau)) - X(\tau,\xi_i)]\, d\tau \right\| \le LH_0\sigma,$$

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi_i) \right] d\tau \right\| \le LH_0\sigma,$$

и для любого $\eta > 0$ найдется σ_0 такое, что при $0 < \sigma \le \sigma_0$

$$2LH_0\sigma \exp\{LH_0\} < \frac{\eta}{2}. \tag{11}$$

В силу условия 3 можно построить монотонную убывающую функцию $f(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ такую, что

$$\left\| \int_0^t \left[X(\tau,x) - \tilde{X}(\tau,x) \right] d\tau \right\| \le tf(t), \quad x \in D.$$

Отсюда

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) \right] d\tau \right\| \le \varepsilon t f(t) \le F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup_{\tau\in[0,L]} [\tau f(\tau\varepsilon^{-1})] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Следовательно,

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_0^{t_{i+1}} \left[X(\tau,\xi_i) - \tilde{X}(\tau,\xi_i) \right] d\tau \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{t_i} \left[X(\tau,\xi_i) - \tilde{X}(\tau,\xi_i) \right] d\tau \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int\limits_0^{t_k} \left[X(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) \right] d\tau \right\| + \varepsilon \left\| \int\limits_0^{t} \left[X(\tau,\xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau,\xi(\tau)) \right] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq 2mF(\varepsilon).$$

Тогда для любого $\eta > 0$ найдутся m и ε_0 такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$2mF(\varepsilon)\exp\{LH_0\} < \frac{\eta}{2}. \tag{12}$$

Из (10) – (12) имеем

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq 2[\sigma LH_0 + mF(\varepsilon)]\exp(LH_0) \equiv \alpha(\varepsilon, m) < \eta.$$

Зафиксируем m. Если ε_0 будем находить из условия

$$2mF(\varepsilon_0)\exp(LH_0) < \frac{\eta}{2},$$

то получим утверждение теоремы при условии, что $x(\cdot)$ не выходит из области Q на I. Покажем, что это так.

Действительно, поскольку $x_0 \in \operatorname{int} Q$, то на некотором отрезке $[0, t']$ решение $x(\cdot)$ принадлежит Q. Выберем ε_0 и m так, чтобы

$$\alpha(\varepsilon, m) < \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\eta}{2}\right\}.$$

Тогда на I будем иметь

$$\|x(t) - \xi(t)\| < \frac{\rho}{2}.$$

Если предположить, что $t' < L\varepsilon^{-1}$, то на I, в силу непрерывности решений $x(t)$ и $\xi(t)$, найдется точка t'', в которой будет выполняться неравенство

$$\frac{\rho}{2} < \|x(t'') - \xi(t'')\| < \rho.$$

Но отсюда следует, что при $t = t''$ решение не вышло из области Q. Поэтому $t'' \in [0, t']$, и тогда $\|x(t'') - \xi(t'')\| \leq \dfrac{\rho}{2}$. Получили противоречие. Следовательно, $t'' \geq L\varepsilon^{-1}$.

Теорема доказана.

1. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища шк., 1974.

2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
3. *Хапаев М. М.* О методе усреднения в некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения. — 1966. — **11**, № 5. — С. 600 – 608.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
5. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 495 с.
6. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
7. *Филиппов В. В.* Что такое пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во ММФ МГУ, 1996. — 112 с.
8. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 363 с.

Получено 02.11.07