УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, ул. Дворянская, 2
e-mail: k.olga@paco.net
talie@ukr.net

For fuzzy differential equations with delay, we substantiate schemes for a complete and partial averaging over a finite interval.

Для нечітких диференціальних рівнянь із загаюванням розглянуто питання обґрунтування схем повного та часткового усереднення на скінченному проміжку.

Работа L. A. Zadeh [1] (1965 г.) положила начало развитию теории нечетких множеств. В 1983 г. M. L. Puri и D. A. Ralescu [2] ввели понятие производной и интеграла для нечетких отображений. В 1987 г. O. Kaleva [3] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения, которые в дальнейшем изучались в [4 – 7].

Основные определения и понятия. Пусть $\operatorname{conv}(R^n)$ — пространство непустых компактных выпуклых подмножеств R^n. Метрика в этом пространстве определяется с помощью расстояния по Хаусдорфу

$$h(F,G) = \max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}||f-g||, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}||f-g||\},$$

где под $||\cdot||$ понимается евклидова норма в пространстве R^n. $|F| = h(F,0)$ — модуль множества F.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $u : R^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u нормально, т. е. существует вектор $x_0 \in R^n$ такой, что $u(x_0) = 1$;

2) u нечетко выпукло, т. е. для любых $x, y \in R^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$;

3) u полунепрерывно сверху, т. е. для любой точки $x_0 \in R^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(x_0,\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in R^n$, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\| < \delta$, имеет место неравенство $u(x) < u(x_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α-Срезкой $[u]^\alpha$ отображения $u \in E^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{x \in R^n : u(x) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $u \in E^n$ назовем замыкание множества $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$.*

Теорема 1 [8]. *Если $u \in E^n$, то:*

1) $[u]^\alpha \in \operatorname{conv}(R^n)$ *для всех* $0 \le \alpha \le 1$;

2) $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ *— неубывающая последовательность, сходящаяся к* $\alpha > 0$, *то* $[u]^\alpha = \bigcap\limits_{k \ge 1} [u]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \le \alpha \le 1\}$ *— семейство подмножеств* R^n, *удовлетворяющих условиям 1–3, то существует* $u \in E^n$ *такое, что* $[u]^\alpha = A^\alpha$ *для* $0 < \alpha \le 1$ *и* $[u]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\le 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, положив

$$D(u,v) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в R.

Определение 2 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется сильноизмеримым на* I, *если для всех* $\alpha \in [0,1]$ *многозначное отображение* $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ *измеримо.*

Определение 3 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется интегрально ограниченным на* I, *если существует интегрируемая по Лебегу функция* $k(t)$ *такая, что* $\|x\| \le k(t)$ *для всех* $x \in F_0(t)$.

Определение 4 [8]. *Интегралом от отображения* $F : I \to E^n$ *по множеству* I *называется элемент* $G \in E^n$ *такой, что* $[G]^\alpha = \int_I F_\alpha(t)dt$ *для всех* $0 < \alpha \le 1$, *где интеграл от многозначного отображения* $F_\alpha(t)$ *понимается в смысле Ауманна [9].*

Теорема 2 [8]. *Если отображение* $F : I \to E^n$ *сильноизмеримо и интегрально ограничено, то* F *интегрируемо на* I.

Теорема 3 [8]. *Пусть* $F, G : I \to E^n$ *интегрируемы на* I *и* $\lambda \in R$. *Тогда:*

1) $\int\limits_I (F(t) + G(t))dt = \int\limits_I F(t)dt + \int\limits_I G(t)dt$;

2) $\int\limits_I \lambda F(t)dt = \lambda \int\limits_I F(t)dt$;

3) $D\left(\int\limits_I F(t)dt, \int\limits_I G(t)dt\right) \le \int\limits_I D(F(t), G(t))dt$.

Определение 5 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется слабонепрерывным в точке* $t_0 \in I$, *если для любого фиксированного* $\alpha \in [0,1]$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ *такое, что* $h(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \varepsilon$ *для всех* $t \in I$ *таких, что* $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$.

Определение 6. *Отображение* $F : I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ *называется слабонепрерывным в точке* $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{m0}) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$, *если для любого фиксированного* $\alpha \in [0,1]$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ *такое, что для всех* $t \in I$, $x_i \in E^n$ *таких, что* $|t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$ *и* $h([x_i]^\alpha, [x_{i0}]^\alpha) < \delta(\varepsilon, \alpha)$, $i = \overline{1,m}$, *справедлива оценка* $h([F(t, x_1, \ldots, x_m)]^\alpha, [F(t, x_{10}, \ldots, x_{m0})]^\alpha) < \varepsilon$.

Определение 7 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется дифференцируемым в точке* $t_0 \in I$, *если для всех* $\alpha \in [0,1]$ *многозначное отображение* $F_\alpha(t)$ *дифференцируемо по Хукухаре [10] в точке* t_0, *его производная равна* $DF_\alpha(t_0)$ *и семейство множеств* $\{DF_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ *определяет отображение* $F'(t_0) \in E^n$.

Если отображение $F : I \to E^n$ дифференцируемо в точке $t_0 \in I$, то $F'(t_0)$ называют нечеткой производной $F(t)$ в точке t_0.

Теорема 4 [8]. *Пусть отображение $F : I \to E^n$ дифференцируемо и его нечеткая производная $F' : I \to E^n$ интегрируема на I. Тогда для любого $t \in I$ имеем*

$$F(t) = F(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} F'(s)\,ds.$$

Определение 8. *Говорят, что отображение $F : I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $x_1, \ldots, x_m$, если существует постоянная $\lambda > 0$ такая, что для любой пары $(t, x_1, \ldots, x_m), (t, y_1, \ldots, y_m) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$ и всех $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$h([F(t, x_1, \ldots, x_m)]^\alpha, [F(t, y_1, \ldots, y_m)]^\alpha) \le \lambda \sum_{i=1}^{m} h([x_i]^\alpha, [y_i]^\alpha).$$

Очевидно, что если отображение $F : I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $x_1, \ldots, x_m$ с постоянной $\lambda > 0$, то для любой пары $(t, x_1, \ldots, x_m)$, $(t, y_1, \ldots, y_m) \in I \times E^n \times \ldots \times E^n$ имеет место неравенство

$$D(F(t, x_1, \ldots, x_m), F(t, y_1, \ldots, y_m)) \le \lambda \sum_{i=1}^{m} D(x_i, y_i).$$

Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$x'(t) = F(t, x(t), x(\alpha(t))), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $F : I \times E^n \times \ldots \times E^n \to E^n$, $t_0 \le \alpha(t) \le t$.

Определение 9. *Отображение $x : I_0 \to E^n$, $t_0 \in I_0 \subset I$, называется решением задачи (1), если оно слабонепрерывно и для всех $t \in I_0$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s), x(\alpha(s)))ds.$$

Теорема 5. *Пусть F — слабонепрерывная функция в окрестности точки (t_0, x_0, x_0), удовлетворяющая условию Липшица с постоянной λ по всем переменным, начиная со второй. Тогда существует единственное решение $x(t)$ задачи (1) при $t_0 \le t \le t_0 + \sigma$, где σ достаточно мало.*

Схема полного усреднения. Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение, содержащее переменное запаздывание

$$x'(t) = \varepsilon F\left(t, x(t), x(\alpha(t))\right), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

где ε — малый параметр, $t \in R_+$, $x : R_+ \to E^n$, $F : R_+ \times E^n \times E^n \to E^n$.

Поставим в соответствие уравнению (2) усредненное уравнение

$$y'(t) = \varepsilon \overline{F}\left(y(t), y(\alpha(t))\right), \quad y(0) = x_0, \tag{3}$$

где

$$\overline{F}\left(x, z\right) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t}^{t+T} F(s, x, z) ds. \tag{4}$$

Теорема 6. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0; x, y \in S \subset E^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) отображение $F\left(t, x, z\right)$ слабонепрерывно по t, удовлетворяет условию Липшица по x, z с постоянной λ, ограничено постоянной M, т. е.

$$D(F\left(t, x, z\right), \widehat{0}) \leq M, \quad D\left(F\left(t, x', z'\right), F\left(t, x'', z''\right)\right) \leq \lambda\left[D\left(x', x''\right) + D\left(z', z''\right)\right];$$

2) предел (4) существует равномерно относительно $x, z \in S$, $t \geq 0$;

3) функция $\alpha(t)$ равномерно непрерывна при $t \geq 0$ и $0 \leq \alpha(t) \leq t$;

4) решение $y(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = x_0 \in S' \subset S$, определено при $t \geq 0$ и вместе с ρ-окрестностью принадлежит области S.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon\left(\eta, L\right)$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ справедлива оценка

$$D\left(x(t), y(t)\right) \leq \eta, \tag{5}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решения уравнений соответственно (2) и (3) такие, что $x(0) = y(0) = x_0$.

Доказательство. Предварительно заметим, что многозначное отображение $\overline{F}(y, z)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным y, z с постоянной λ и ограничено постоянной M. Действительно, в силу условия 2 теоремы для любого $\delta > 0$ можно указать $T(\delta) > 0$ такое, что при всех $T \geq T(\delta)$ справедливы оценки

$$D(\overline{F}(y, z), \widehat{0}) \leq D\left(\overline{F}(y, z), \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} F(s, y, z) ds\right) + D\left(\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} F(s, y, z) ds, \widehat{0}\right) <$$

$$< \delta + \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} D(F(s, y, z), \widehat{0}) ds \leq \delta + M,$$

$$D(\overline{F}(y, z), \overline{F}(y', z')) \leq D\left(\overline{F}(y, z), \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} F(s, y, z) ds\right) +$$

$$+ D\left(\frac{1}{T}\int_0^T F(s,y,z)ds, \frac{1}{T}\int_0^T F(s,y',z')ds\right) + D\left(\overline{F}(y,z'), \frac{1}{T}\int_0^T F(s,y,z')ds\right) <$$

$$< 2\delta + \frac{1}{T}\int_0^T D(F(s,y,z),F(s,y',z'))ds \le 2\delta + \lambda\left[D(y,y') + D(z,z')\right].$$

Поскольку значение δ произвольно, в пределе получим

$$D(\overline{F}(y,z),\widehat{0}) \le M, \quad D(\overline{F}(y,z),\overline{F}(y,z')) \le \lambda\left[D(y,y') + D(z,z')\right].$$

Согласно определению решения уравнений (2) и (3) являются слабонепрерывными функциями, удовлетворяющими интегральным уравнениям

$$x(t) = x_0 + \varepsilon\int_0^t F(s,x(s),x(\alpha(s)))ds, \quad y(t) = x_0 + \varepsilon\int_0^t \overline{F}(y(s),y(\alpha(s)))ds.$$

Тогда

$$D\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right) = D\left(x_0 + \varepsilon\int_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ x_0 + \varepsilon\int_0^t \overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) =$$

$$= \varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int_0^t \overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) \le$$

$$= \varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int_0^t F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) +$$

$$+ \varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int_0^t \overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon\lambda\int_0^t \left[D\left(x(s),y(s)\right) + D\left(x\left(\alpha\left(s\right)\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)\right]ds + \gamma\left(\varepsilon\right), \tag{6}$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \max_t \beta(t,\varepsilon), \quad \beta\left(t,\varepsilon\right) = \varepsilon D\left(\int_0^t F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int_0^t \overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right).$$

Пусть

$$\delta\left(t\right) = \max_{0\le s\le t} D\left(x(s),y(s)\right). \tag{7}$$

Учитывая (7), записываем (6) в виде

$$\delta\left(t\right) \leq 2\lambda\varepsilon\int\limits_{0}^{t}\delta(s)ds+\gamma\left(\varepsilon\right). \tag{8}$$

Разобьем сегмент $\left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ на m равных частей точками $t_i = \dfrac{iL}{m\varepsilon}$, $i = \overline{0, m}$. Пусть $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Оценим величину $\beta\left(t,\varepsilon\right)$, воспользовавшись свойствами метрики D :

$$\beta\left(t,\varepsilon\right) = \varepsilon D\left(\int\limits_{0}^{t}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\quad \int\limits_{0}^{t}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) =$$

$$= \varepsilon D\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds+\int\limits_{t_k}^{t}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds+\int\limits_{t_k}^{t}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right)+\right.$$

$$\left.+\ D\left(\int\limits_{t_k}^{t}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right)\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left[D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F\left(s,y\left(t_i\right),y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right)ds\right)+\right.$$

$$+\ D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{F}\left(y\left(t_i\right),y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right)ds\right)+$$

$$\left.+D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F\left(s,y\left(t_i\right),y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{F}\left(y\left(t_i\right),y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right)ds\right)\right]+$$

$$+\ \varepsilon D\left(\int\limits_{t_k}^{t}F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left[2\lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[D\left(y(s), y\left(t_i\right)\right) + D\left(y\left(\alpha\left(s\right)\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right)\right] ds + \right.$$

$$\left. + D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} F\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}\left(y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds \right) \right] +$$

$$+ \varepsilon D\left(\int_{t_k}^{t} F\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds, \int_{t_k}^{t} \overline{F}\left(y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds \right). \tag{9}$$

Оценим каждое из слагаемых в (9) отдельно:

$$\varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(y\left(s\right), y\left(t_i\right)\right) ds = \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(y\left(t_i\right) + \varepsilon \int_{t_i}^{s} \overline{F}\left(y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right) d\tau, y\left(t_i\right) \right) ds =$$

$$= \varepsilon^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(\int_{t_i}^{s} \overline{F}\left(y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right) d\tau, \widehat{0} \right) ds \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{s} D\left(\overline{F}\left(y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right), \widehat{0} \right) d\tau ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2 M}{2} \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right)^2 = \frac{ML^2}{2m^2}. \tag{10}$$

Аналогично в силу свойств модуля непрерывности ω функции $\alpha(t)$ получим

$$\varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(y\left(\alpha\left(s\right)\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds = \varepsilon^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(\int_{\alpha(t_i)}^{\alpha(s)} \overline{F}\left(y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right) d\tau, \widehat{0} \right) ds \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} M\omega\left(\alpha, \frac{L}{\varepsilon m}\right) d\tau = \frac{\varepsilon LM}{m} \omega\left(\alpha, \frac{L}{\varepsilon m}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\varepsilon m} + 1 \right) \frac{\varepsilon LM}{m} \omega\left(\alpha, L\right). \tag{11}$$

В силу равномерной сходимости к среднему в (4) существует такая монотонно убывающая функция $\Theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, что

$$\varepsilon D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, y(t_i), y(\alpha(t_i)))ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(y(t_i), y(\alpha(t_i)))ds \right) \leq \frac{L}{m} \Theta\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \tag{12}$$

Поскольку правые части уравнений (2) и (3) ограничены постоянной M, то

$$\varepsilon D\left(\int\limits_{t_k}^{t} F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} D\big(F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right),\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)\big)\,ds \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \left[D\left(F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right),\widehat{0}\right) + D\left(\overline{F}\left(y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right),\widehat{0}\right)\right] ds \leq$$

$$\leq 2M\varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} ds = 2\frac{ML}{m}. \tag{13}$$

Следовательно, в силу (9) – (13) имеем

$$\beta\left(t,\varepsilon\right) \leq \frac{\lambda M L^2}{m} + 2\lambda L M\left(\frac{1}{m}+\varepsilon\right)\omega\left(\alpha,L\right) + 2M\frac{L}{m} + L\Theta\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \tag{14}$$

Выберем m_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\lambda M L^2}{m_0} + \frac{2\lambda L M}{m_0}\omega\left(\alpha,L\right) + \frac{2ML}{m_0} < \frac{\eta}{2e^{2\lambda L}}. \tag{15}$$

Затем выберем ε_0 так, чтобы

$$2\lambda L M\omega\left(\alpha,L\right)\varepsilon + L\Theta\left(\frac{L}{\varepsilon m_0}\right) < \frac{\eta}{2e^{2\lambda L}}. \tag{16}$$

Из (14) – (16) и (8) по лемме Гронуолла – Беллмана следует утверждение теоремы.

Схема частичного усреднения. Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение, содержащее переменное запаздывание (2). Поставим в соответствие уравнению (2) частично усредненное уравнение

$$y'(t) = \varepsilon G\left(t, y(t), y(\alpha(t))\right), \quad y(0) = x_0, \tag{17}$$

где

$$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} F(s,x,z)ds, \frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} G(s,x,z)ds\right) = 0. \tag{18}$$

Теорема 7. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0;\ x, z \in S \subset E^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) отображения $F(t,x,z)$, $G(t,x,z)$ слабонепрерывны по t, удовлетворяют условию Липшица по x, z с постоянной λ, ограничены постоянной M, т. е.

$$D\left(F\left(t,x',z'\right),F\left(t,x'',z''\right)\right)\le\lambda\left[D\left(x',x''\right)+D\left(z',z''\right)\right],$$

$$D\left(G\left(t,x',z'\right),G\left(t,x'',z''\right)\right)\le\lambda\left[D\left(x',x''\right)+D\left(z',z''\right)\right],$$

$$D(F(t,x,z),\widehat{0})\le M,\quad D(G(t,x,z),\widehat{0})\le M;$$

2) предел (18) существует равномерно относительно $x,z\in S$, $t\ge0$;

3) функция $\alpha(t)$ равномерно непрерывна при $t\ge0$ и $0\le\alpha(t)\le t$;

4) решение $y(t)$ уравнения (17), удовлетворяющее начальному условию $y(0)=x_0\in\in S'\subset S$, определено при $t\ge0$, $\varepsilon\in(0,\sigma]$ и вместе с ρ-окрестностью принадлежит области S.

Тогда для любого $\eta>0$, $L>0$ существует $\varepsilon(\eta,L)\in(0,\sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$D(x(t),y(t))\le\eta,$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решения уравнений (2) и (17) соответственно.

Доказательство. Согласно определению решения уравнений (2), (17) являются слабонепрерывными функциями, удовлетворяющими интегральным уравнениям

$$x\left(t\right)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\quad y\left(t\right)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^t G\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned}D\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)&=D\left(x_0+\varepsilon\int\limits_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ x_0+\varepsilon\int\limits_0^t G\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right)=\\&=\varepsilon D\left(\int\limits_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int\limits_0^t G\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right)\le\\&=\varepsilon D\left(\int\limits_0^t F\left(s,x\left(s\right),x\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int\limits_0^t F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right)+\\&+\varepsilon D\left(\int\limits_0^t F\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds,\ \int\limits_0^t G\left(s,y\left(s\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)ds\right)\le\\&\le\varepsilon\lambda\int\limits_0^t\left[D\left(x(s),y(s)\right)+D\left(x\left(\alpha\left(s\right)\right),y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)\right]ds+\gamma\left(\varepsilon\right),\end{aligned}\tag{19}$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \max_{t\in[0,L\varepsilon^{-1}]} \beta(t,\varepsilon),\ \beta(t,\varepsilon) = \varepsilon D\left(\int\limits_0^t F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds, \int\limits_0^t G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds\right).$$

Пусть

$$\delta(t) = \max_{0\le s\le t} D(x(s),y(s)). \tag{20}$$

Учитывая (20), записываем (19) в виде

$$\delta(t) \le 2\lambda\varepsilon \int\limits_0^t \delta(s)ds + \gamma(\varepsilon). \tag{21}$$

Разобьем сегмент $[0,L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей точками $t_i = \dfrac{iL}{m\varepsilon}$, $i = \overline{0,m}$. Пусть $t\in[t_k,t_{k+1}]$. Оценим величину $\beta(t,\varepsilon)$, воспользовавшись свойствами метрики D :

$$\beta(t,\varepsilon) = \varepsilon D\left(\int\limits_0^t F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds, \quad \int\limits_0^t G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds\right) =$$

$$= \varepsilon D\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds + \int\limits_{t_k}^{t} F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds,\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds + \int\limits_{t_k}^{t} G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds\right) +\right.$$

$$\left. + D\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds\right)\right] \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1}\left[D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,y(t_i),y(\alpha(t_i)))\,ds\right) +\right.$$

$$+ D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G(s,y(s),y(\alpha(s)))\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G(s,y(t_i),y(\alpha(t_i)))\,ds\right) +$$

$$+D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds\right)\Bigg] +$$

$$+\,\varepsilon D\left(\int\limits_{t_k}^{t} F\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds, \int\limits_{t_k}^{t} G\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1}\Bigg[2\lambda \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[D\left(y(s), y\left(t_i\right)\right) + D\left(y\left(\alpha\left(s\right)\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right)\right] ds +$$

$$+D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds\right)\Bigg] +$$

$$+\,\varepsilon D\left(\int\limits_{t_k}^{t} F\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds, \int\limits_{t_k}^{t} G\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds\right). \qquad (22)$$

Оценим каждое из слагаемых в (22) отдельно:

$$\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(y\left(s\right), y\left(t_i\right)\right) ds = \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(y\left(t_i\right) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{s} G\left(\tau, y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right) d\tau,\ y\left(t_i\right)\right) ds =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(\int\limits_{t_i}^{s} G\left(\tau, y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right) d\tau, \widehat{0}\right) ds \le$$

$$\le \varepsilon^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \int\limits_{t_i}^{s} D\left(G\left(\tau, y\left(\tau\right), y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right), \widehat{0}\right) d\tau ds \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^2 M}{2}\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)^2 = \frac{ML^2}{2m^2}.$$

Аналогично, используя свойства модуля непрерывности, имеем

$$\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(y\left(\alpha\left(s\right)\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds = \varepsilon^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D\left(\int\limits_{\alpha(t_i)}^{\alpha(s)} \overline{F}\left(Y\left(\tau\right), Y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right) d\tau, \widehat{0}\right) ds \le$$

$$\le \varepsilon^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \int\limits_{\alpha(t_i)}^{\alpha(s)} D\left(\overline{F}\left(Y\left(\tau\right), Y\left(\alpha\left(\tau\right)\right)\right), \widehat{0}\right) d\tau ds \le$$

$$\leq \varepsilon^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} M\omega\left(\alpha, \frac{L}{\varepsilon m}\right) d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon LM}{m}\omega\left(\alpha, \frac{L}{\varepsilon m}\right) \leq \left(\frac{1}{\varepsilon m}+1\right)\frac{\varepsilon LM}{m}\omega(\alpha, L).$$

В силу равномерной сходимости к среднему в (18) существует такая монотонно убывающая функция $\Theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, что

$$\varepsilon D\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} G\left(s, y\left(t_i\right), y\left(\alpha\left(t_i\right)\right)\right) ds\right) \leq \frac{L}{m}\Theta\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right).$$

Поскольку правые части уравнений (2) и (17) ограничены постоянной M, то

$$\varepsilon D\left(\int\limits_{t_k}^{t} F\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds, \int\limits_{t_k}^{t} G\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} D\left(F\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right), G\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right)\right) ds \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \left[D\left(F\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right), \widehat{0}\right) + D\left(G\left(s, y\left(s\right), y\left(\alpha\left(s\right)\right)\right), \widehat{0}\right)\right] ds \leq$$

$$\leq 2M\varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} ds = 2\frac{ML}{m}. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\beta\left(t, \varepsilon\right) \leq \frac{\lambda ML^2}{m} + 2\lambda LM\left(\frac{1}{m}+\varepsilon\right)\omega\left(\alpha, L\right) + 2M\frac{L}{m} + L\Theta\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \tag{24}$$

Выберем m_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\lambda ML^2}{m_0} + \frac{2\lambda LM}{m_0}\omega\left(\alpha, L\right) + \frac{2ML}{m_0} < \frac{\eta}{2e^{2\lambda L}}. \tag{25}$$

Затем выберем ε_0 так, чтобы

$$2\lambda LM\omega\left(\alpha, L\right)\varepsilon + L\Theta\left(\frac{L}{\varepsilon m_0}\right) < \frac{\eta}{2e^{2\lambda L}}. \tag{26}$$

Из (24) – (26) и (21) по лемме Гроноулла – Беллмана следует утверждение теоремы.

Замечания. 1. Теоремы 6 и 7 естественным образом распространяются на случай измеримых по t правых частей уравнений (2), (3) и (17).

2. В случае, когда правые части уравнений (2), (3) и (17) периодичны по t, в теоремах 6 и 7 можно получить более точные оценки.

1. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. and Contr. — 1965. — **8**. — P. 338 – 353.
2. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — **91**. — P. 552 – 558.
3. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301 – 317.
4. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Ibid. — 1990. — **35**, № 3. — P. 389 – 396.
5. *Laksmikantham V., Leela S., Vatsala A. S.* Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2003. — **54**. — P. 351 – 360.
6. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 319 – 330.
7. *Song S. J., Wu C. X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Ibid. — 2000. — **111**. — P. 55 – 67.
8. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **22**, № 2. — P. 271 – 279.
9. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — **12**. — P. 1 – 12.
10. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 11. — P. 205 – 223.

Получено 11.02.07