УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Using the least square method we construct a new iteration algorithm for finding solutions of a weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case, expanding the solution into a generalized Fourier polynomial in a neighborhood of the generating solution. We find an estimate for values of the small parameter for which convergence of this iteration procedure to the sought solution is preserved.

З використанням методу найменших квадратів побудовано нову ітераційну процедуру для знаходження розв'язків слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку у вигляді розвинення в узагальнений поліном Фур'є в околі породжуючого розв'язку. Знайдено оцінку області значень малого параметра, для яких зберігається збіжність цієї ітераційної процедури до шуканого розв'язку.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу [1] о нахождении решений

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,z^{(n)}(t,\varepsilon)\right),$$

$$z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t) = \mathrm{col}\left(z_0^{(1)}(t),\ldots,z_0^{(n)}(t)\right), \quad z_0^{(i)}(\cdot) \in C^1[a,b], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \tag{3}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, $\alpha \in R^m$ — действительный вектор-столбец, $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по z в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по t на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — линейный и нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot, \varepsilon)$, $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b] \to R^m$, причем второй функционал непрерывно дифференцируем по неизвестной переменной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0; \varepsilon_0]$.

Исследован критический случай $P_{Q^*} \neq 0$; при условии [1]

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{4}$$

порождающая задача (3) имеет r линейно независимых решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in R^r.$$

Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(0) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-мерной матрицы-ортопроектора $P_Q : R^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(d \times n)$-мерная матрица, составленная из d линейно независимых строк $(m \times m)$-ортопроектора $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$,

$$G\big[f(s); \alpha\big](t) = K\big[f(s)\big](t) - X(t)Q^+ \ell K\big[f(s)\big](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (3);

$$K\Big[f(s)\Big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3), Q^+ – псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу.

Учитывая непрерывность нелинейной вектор-функции $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ и нелинейного векторного функционала $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по ε в малой положительной окрестности нуля, получаем необходимое условие [1]

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K\big[Z(z_0(s, c_r), s, 0)\big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{5}$$

существования решения исходной задачи (1), (2) в критическом случае.

Лемма 1. *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие (4) разрешимости порождающей задачи (3). Предположим также, что задача (1), (2) имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. Тогда вектор $c_r^* \in R^r$ удовлетворяет уравнению (5) для порождающих амплитуд.*

Предположим далее, что уравнение (5) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in R^r$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$$

задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\big[f(s);\alpha\big](t).$$

Для нахождении возмущения

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\big(x^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,x^{(n)}(t,\varepsilon)\big),$$

$$x^{(j)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x^{(j)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) \equiv 0, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ используем задачу

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{6}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{7}$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + \\ + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \quad A_2(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Остаток $R(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем три первых члена разложения, поэтому

$$R(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейные по x и по ε части $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ и $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ этого функционала и член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \\ + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{9}$$

Остаток $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем два первых члена разложения, поэтому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} = 0, \qquad \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \Bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} = 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} = 0.$$

Обозначим $(d \times r)$-мерную матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*} \Big\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K \big[A_1(s) X_r(s) \big](\cdot) \Big\}.$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ краевая задач (6), (7) имеет по меньшей мере одно решение

$$x(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\, \big(x^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, x^{(n)}(t, \varepsilon) \big),$$

$$x^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x^{(i)}(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в нулевое $x(t, 0) \equiv 0$. Для построения этого решения краевой задачи (6) применяется метод простых итераций [1–5]. Этот метод отличают простота вычислительной схемы, показательная скорость сходимости, затухание ошибок округления и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций для краевых задач связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. Целью данной работы является построение приближенных решений краевой задачи (6) с использованием метода наименьших квадратов в виде частичных сумм обобщенного ряда Фурье [6–9].

2. Итерационная процедура. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t), \ldots$ — система линейно независимых непрерывно дифференцируемых n-мерных вектор-функций. Первое приближение к решению краевой задачи (6), (7)

$$x_1(t, \varepsilon) = X_r(t) c_r(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)$$

ищем как решение краевой задачи

$$\frac{dx_1(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_1(t,\varepsilon)\Big], \tag{10}$$

$$\ell x_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Big[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon)\Big]. \tag{11}$$

Приближение к частному решению краевой задачи (10), (11) ищем в виде

$$x_1^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_1^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t).$$

Обозначим $(n\times k)$-мерную матрицу $\varphi(t) = \big[\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\ldots\,\varphi_k(t)\big]$. В общем случае первое приближение

$$\xi_1(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) = \Big[c_1^{(1)}(\varepsilon)\;\; c_1^{(2)}(\varepsilon)\;\; \ldots\;\; c_1^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*$$

не является решением краевой задачи (10), (11), поэтому потребуем, чтобы

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Big\|\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - \xi_1'(t,\varepsilon)\Big\|^2_{L^2[a,b]} +$$

$$+\Big\|\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big\|^2_{R^m} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. Функция

$$F(c_1(\varepsilon)) = \int_a^b \Big\{\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - \xi_1'(t,\varepsilon)\Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - \xi_1'(t,\varepsilon)\Big\}\,dt +$$

$$+\Big\{\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big\}^* \Big\{\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big\}$$

представима в виде

$$F(c_1(\varepsilon)) = \|\Phi(t,\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0)\|^2_{L^2[a,b]} +$$

$$+\,\|\Psi(\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\|^2_{R^m}\,,$$

где

$$\Phi(t,\varepsilon) = \Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\varphi(t) - \varphi'(t)$$

— $(n \times k)$-мерная матрица, $\Psi(\varepsilon) = \Big[\varepsilon \ell_1 - \ell\Big]\varphi(\cdot)$ — $(m \times k)$-мерная матрица. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right] c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \int\limits_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r^*),t,0)dt - \varepsilon \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_r*),0),$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in R^k$ при условии невырожденности суммы $(k \times k)$-мерных матриц Грама [8]

$$\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) = \int\limits_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)dt, \quad \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) = \Psi(\varepsilon)^*\Psi(\varepsilon).$$

Таким образом, при условии $\det\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right] \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r*),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_r^*),0)\right\},$$

определяющий первое приближение $x_1(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon)$ к решению краевой задачи (10), (11). Здесь

$$\xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot, c_r),0)\right\}$$

— наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к частному решению $x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ краевой задачи (10), (11). Второе приближение $x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ к решению краевой задачи (6), (7) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{dx_2(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r^*),t,0) +$$
$$+ A_1(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big], \qquad (12)$$

$$\ell x_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Big[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_2(\cdot,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]. \qquad (13)$$

Приближение к частному решению краевой задачи (12), (13)

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$$

определяет вектор-функция

$$\xi_2(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_2(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_2^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t), \quad c_2(\varepsilon) = \left[c_2^{(1)}(\varepsilon)\, c_2^{(2)}(\varepsilon)\, \ldots\, c_2^{(k)}(\varepsilon)\right]^*.$$

В общем случае сумма $\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ не является решением краевой задачи (12), (13), поэтому потребуем, чтобы

$$F(c_2(\varepsilon)) = \Big\| \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) +$$

$$+ \varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \xi_2'(t,\varepsilon)\Big\|^2_{L^2[a,b]} +$$

$$+ \Big\| \Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_2(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|^2_{R^m} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. Функция

$$F(c_2(\varepsilon)) = \int_a^b \Big\{ \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) +$$

$$+ \varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \xi_2'(t,\varepsilon)\Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{ \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \xi_2'(t,\varepsilon)\Big\}\, dt +$$

$$+ \Big\{ \Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_2(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{ \Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_2(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}$$

представима в виде

$$F(c_2(\varepsilon)) = \int_a^b \left\{\Phi(t,\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right\}^* \times$$

$$\times \left\{\Phi(t,\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right\} dt +$$

$$+ \left\{\Psi(\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}^* \times$$

$$\times \left\{\Psi(\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}.$$

Необходимое условие минимизации функции $F(c_2(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right] c_2(\varepsilon) =$$

$$= -\varepsilon \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\,dt -$$

$$-\,\varepsilon\Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big].$$

При условии $\det\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right] \neq 0$ находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\big(\varphi(\cdot)\big) + \Gamma\big(\ell\varphi(\cdot)\big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt +\right.$$

$$\left. + \Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к частному решению $x_2^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ краевой задачи (12), (13). Здесь

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\Big[\Gamma\big(\varphi(\cdot)\big) + \Gamma\big(\ell\varphi(\cdot)\big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt +\right.$$

$$\left. + \Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\}.$$

Таким образом, на втором шаге итерационной процедуры найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_2(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (12), (13). Продолжая рассуждения, предполагаем, что найдено $(j+1)$-е приближение $(j = 1, 2, \ldots)$ к решению краевой задачи (6), (7). Следующее,

$(j+2)$-е, приближение к решению краевой задачи (6), (7) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{dx_{j+2}(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x_{j+2}(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + \\ + A_1(t)x_{j+2}(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big], \tag{14}$$

$$\ell x_{j+2}(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Big[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_{j+2}(\cdot,\varepsilon) + \\ + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]. \tag{15}$$

Приближение к частному решению краевой задачи (14), (15)

$$x_{j+2}^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2}\xi_i(t,\varepsilon)$$

определяет вектор-функция

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_{j+2}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_{j+2}^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t), \quad c_{j+2}(\varepsilon) = \Big[c_{j+2}^{(1)}(\varepsilon)\; c_{j+2}^{(2)}(\varepsilon)\; \ldots\; c_{j+2}^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

В общем случае сумма $\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+2}(t,\varepsilon)$ не является решением краевой задачи (14), (15), поэтому потребуем, чтобы

$$F(c_{j+2}(\varepsilon)) = \Bigg\|\Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_{j+2}(t,\varepsilon) + \\ + \varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - \\ - R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + \ldots + \xi_j(t,\varepsilon)\Big] - \xi'_{j+2}(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{L^2[a,b]} + \\ + \Bigg\|\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_{j+2}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\|^2_{R^m} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. При условии $\det\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big] \neq 0$ находим вектор

$$c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+1}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \right.$$

$$- R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + \ldots + \xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt +$$

$$+ \Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$\left. - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_j(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\Big] \right\},$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к частному решению

$$x^{(1)}_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2} \xi_i(t,\varepsilon)$$

краевой задачи (14), (15). Здесь

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+1}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \right.$$

$$- R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + \ldots + \xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt +$$

$$+ \Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$\left. - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_j(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\Big] \right\}.$$

Таким образом, на $(j+2)$-м шаге итерационной процедуры найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{j+2} \xi_i(t,\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (14), (15). Ниже будет получена оценка точности приближения к искомому решению задачи (1), (2), достигаемая с помощью полученной итерационной процедуры. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие (4) разрешимости порождающей задачи (3). Тогда для каждого корня $c_r^* \in R^r$ уравнения (5) для порождающих амплитуд при условии $P_{B_0^*} = 0$ задача (6), (7) имеет по меньшей мере одно решение*

$$x(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\Big(x^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,x^{(n)}(t,\varepsilon)\Big),$$

$$x^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в нулевое $x(t,0) \equiv 0$. В случае

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big] \neq 0$$

это решение можно определить с помощью сходящегося для $\varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$ итерационного процесса

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r^*),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\right\},$$

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),$$

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt + \right.$$

$$\left. + \Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},$$

$$x_3(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon),$$

$$\xi_3(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\,dt+\right.$$

$$\left. + \Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},$$

. . . .

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2}\xi_i(t,\varepsilon), \quad j = 1,2,\ldots, \tag{16}$$

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\ldots+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\right.$$

$$- R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+\ldots+\xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+ \Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$\left. - J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},$$

. . . .

Задача (1), (2) имеет в этом случае по меньшей мере одно решение

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,z^{(n)}(t,\varepsilon)\Big),$$

$$z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ i = 1,2,\ \ldots,\ n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) \equiv z_0(t,c_r^*)$, *которое может быть найдено по формуле* $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)$, $k = 1,2,\ldots$, *с помощью итерационного процесса (16).*

В случае периодической задачи для уравнения (1) для построения приближенного решения целесообразно использовать периодическую матрицу $\varphi(t)$. При этом итерационная процедура (16) значительно упрощается, поскольку в этом случае $\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) = 0$, $\Psi^*(\varepsilon) \equiv 0$; кроме того, для линейного периодического краевого условия $\ell z(\cdot) = z(0) - z(T)$ имеют место тождества

$$\ell_1 z(\cdot) = \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \equiv 0, \quad J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0.$$

3. Оценка точности итераций по методу наименьших квадратов. Для оценки точности итераций по методу наименьших квадратов в критическом случае предположим, что оператор $\Phi\Big(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon)\Big)$ является сжимающим, при этом для любых вектор-функций $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$ из малой окрестности нуля выполняется неравенство

$$\|\Phi y_1(t,\varepsilon) - \Phi y_2(t,\varepsilon)\| \le \lambda \|y_1(t,\varepsilon) - y_2(t,\varepsilon)\|, \quad \lambda < 1.$$

Согласно принципу Каччопполи – Банаха [3, с. 605], в этом случае в малой окрестности нуля существует единственная неподвижная точка $x^*(t,\varepsilon)$ отображения $\Phi x(t,\varepsilon)$, представляющая положение равновесия уравнения $x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon)$. Для нахождения неподвижной точки $x^*(t,\varepsilon)$ отображения $\Phi x(t,\varepsilon)$ применим метод простых итераций. Естественно предположить, что первое приближение $x_1(t,\varepsilon) = \Phi(0) \neq 0$. Другими словами, предположим, что неподвижная точка $x^*(t,\varepsilon)$ отображения $\Phi x(t,\varepsilon)$ отлична от нуля. В этом случае

$$\|x^*(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\| = \|\Phi x^*(t,\varepsilon) - \Phi(0)\| \le \lambda \|x^*(t,\varepsilon)\|.$$

Обозначим

$$\delta_1(\varepsilon) = \frac{\|x_1(t,\varepsilon) - \xi_1(t,\varepsilon)\|}{\|x^*(t,\varepsilon)\|}.$$

Величина $\delta_1(\varepsilon)$ зависит от выбора $(n \times k)$-мерной матрицы $\varphi(t)$. Используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$\|x^*(t,\varepsilon) - \xi_1(t,\varepsilon)\| \le \|x^*(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\| + \|x_1(t,\varepsilon) - \xi_1(t,\varepsilon)\| \le (\lambda + \delta_1)\|x^*(t,\varepsilon)\|.$$

Для второго приближения, вычисленного по методу простых итераций, имеет место неравенство

$$\|x^*(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)\| = \|\Phi x^*(t,\varepsilon) - \Phi x_1(t,\varepsilon)\| \le \lambda^2 \|x^*(t,\varepsilon)\|.$$

Обозначим

$$\delta_2(\varepsilon) = \frac{\Big\|x_2(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\Big\|}{\|x^*(t,\varepsilon)\|}.$$

Используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$\Big\|x^*(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\Big\| \le \|x^*(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\| +$$

$$+ \Big\|x_1(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\Big\| \le (\lambda^2 + \delta_2)\|x^*(t,\varepsilon)\|.$$

Аналогично

$$\left\| x^*(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon) \right\| \le \|x^*(t,\varepsilon) - x_k(t,\varepsilon)\| + \left\| x_k(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon) \right\| \le (\lambda^k + \delta_k)\|x^*(t,\varepsilon)\|.$$

Здесь

$$\delta_k(\varepsilon) = \frac{\left\| x_k(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(t,\varepsilon)\Big) \right\|}{\|x^*(t,\varepsilon)\|}.$$

При достаточно малой величине

$$\delta(\varepsilon) = \max_{0 \le i \le k} \delta_i(\varepsilon)$$

для $k \le \kappa$ выполняются неравенства

$$\lambda^k + \delta(\varepsilon) < \lambda^{k-1} + \delta(\varepsilon) < \ldots < \lambda^2 + \delta(\varepsilon) < \lambda + \delta(\varepsilon) < 1,$$

гарантирующие достаточно малое значение нормы разности

$$\left\| x^*(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon) \right\|.$$

В отличие от метода простых итераций использование итерационной процедуры (16), построенной по методу наименьших квадратов, позволяет находить итерации сколь угодно высокого порядка, однако точность полученного с помощью метода наименьших квадратов приближения ограничена величиной порядка $\delta(\varepsilon)$, которая зависит от выбора $(n \times k)$-мерной матрицы $\varphi(t)$. Кроме того, на точность полученного с помощью метода наименьших квадратов приближения влияют погрешности промежуточных приближенных вычислений.

Пример. Покажем, что итерационная процедура (16) применима для нахождения решения периодической задачи

$$\frac{dz}{dt} = (2t-1)z + \varepsilon z \ln z,$$
$$\ell z(\cdot) = z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) = 0. \tag{17}$$

Для этого исследуем порождающую задачу

$$\frac{dz_0}{dt} = (2t-1)z_0,$$
$$\ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(1) = 0. \tag{18}$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциального уравнения (18) суть функция $X(t) = e^{t^2-t}$. Поскольку $Q = \ell X(\cdot) = 0$, имеет место критический случай; при этом $r = d = 1$,

$$P_{Q^*} = P_{Q_d^*} = P_Q = P_{Q_r} = 1.$$

Общее решение порождающей задачи (18) имеет вид $z_0(t,c) = c\,e^{t^2-t}$. Единственное нетривиальное решение $c_1^* = e^{\frac{1}{6}}$ уравнения для порождающих амплитуд задачи (17) определяет производную $A_1(t) = t^2 - t + \dfrac{7}{6}$, которая приводит к константе $B_0 = 1$. Положим

$$\varphi(t) = \varphi_6(t) = \Big[1 \quad t(1-t) \quad t(1-t)^2 \quad t(1-t)^3 \quad t(1-t)^4 \quad t(1-t)^5\Big].$$

Матрица $\varphi_6(t)$ удовлетворяет краевому условию (17) и определяет невырожденную (6×6)-матрицу Грама $\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)$. Чтобы проверить последнее утверждение, найдем разложение

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)\Big] \approx \frac{1212919}{647\,244\,981\,444\,399\,245\,107\,200\,000}+$$

$$+\frac{3\,679\,913\,919\,765\,888\,641}{1\,386\,398\,750\,253\,903\,183\,019\,622\,400\,000}\cdot\varepsilon^2+$$

$$+\frac{217\,883\,317\,764\,850\,527\,659}{1\,297\,669\,230\,237\,653\,379\,306\,366\,566\,400\,000}\cdot\varepsilon^4+$$

$$+\frac{68\,421\,914\,410\,913\,602\,709}{19\,465\,038\,453\,564\,800\,689\,595\,498\,496\,000\,000}\cdot\varepsilon^6 \neq 0.$$

Невырожденность матрицы Грама $\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)$ обеспечивает возможность нахождения приближенного решения краевой задачи (17) с помощью итерационного процесса (16). Первое приближение $x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_1(\varepsilon)$ к решению краевой задачи (6), (7) определяет вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)\Big]^{-1}\int\limits_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r^*),t,0)dt \approx$$

$$\approx \operatorname{col}\Big[-2,72\,097\cdot 10^{-7} - 1,45\,621\cdot 10^{-10}\varepsilon - 0,00\,320\,359\varepsilon^2 -$$

$$-1,59\,131\cdot 10^{-7}\varepsilon^3 + 0,0\,000\,809\,896\varepsilon^4 - 0,0\,000\,408\,258\varepsilon^5 +$$

$$+0,000\,414\,518\varepsilon^6 - 0,00\,317\,151\varepsilon^7 + 0,0\,178\,324\varepsilon^8 - 0,0\,720\,259\varepsilon^9 +$$

$$+0,198\,016\varepsilon^{10} - 0,332\,254\varepsilon^{11} + 0,257\,046\varepsilon^{12},$$

$$2,72\,073\cdot 10^{-7} - 0,19\,554\varepsilon + 0,00\,343\,683\varepsilon^2 + 0,00\,396\,644\varepsilon^3 -$$
$$- 0,0\,000\,726\,042\varepsilon^4 - 0,0\,000\,533\,456\varepsilon^5 - 0,000\,424\,831\varepsilon^6 +$$
$$+ 0,00\,326\,058\varepsilon^7 - 0,0\,183\,758\varepsilon^8 + 0,0\,744\,472\varepsilon^9 -$$
$$- 0,205\,278\varepsilon^{10} + 0,34\,539\varepsilon^{11} - 0,267\,864\varepsilon^{12},$$

$$1,35\,394\cdot 10^{-7} + 0,563\,049\varepsilon + 0,106\,853\varepsilon^2 - 0,00\,649\,617\varepsilon^3 -$$
$$0,00\,238\,175\varepsilon^4 + 0,000\,114\,958\varepsilon^5 + 0,000\,117\,308\varepsilon^6 -$$
$$- 0,000\,358\,307\varepsilon^7 + 0,00\,138\,363\varepsilon^8 - 0,00\,299\,176\varepsilon^9 +$$
$$+ 0,000\,921\,885\varepsilon^{10} + 0,010\,609\varepsilon^{11} - 0,0172\,272\varepsilon^{12},$$

$$1,75\,841\cdot 10^{-7} - 0,515\,905\varepsilon - 0,237\,509\varepsilon^2 - 0,00\,430\,925\varepsilon^3 +$$
$$+ 0,00\,420\,828\varepsilon^4 + 0,000\,197\,839\varepsilon^5 - 0,0\,000\,183\,747\varepsilon^6 -$$
$$- 0,000\,567\,387\varepsilon^7 + 0,00\,276\,651\varepsilon^8 - 0,00\,766\,056\varepsilon^9 +$$
$$+ 0,0\,051\,925\varepsilon^{10} + 0,0\,295\,068\varepsilon^{11} - 0,0\,616\,531\varepsilon^{12},$$

$$- 8,08\,892\cdot 10^{-8} + 0,343\,937\varepsilon + 0,261\,311\varepsilon^2 + 0,00\,287\,231\varepsilon^3 -$$
$$- 0,00\,364\,128\varepsilon^4 - 0,000\,270\,189\varepsilon^5 + 0,0\,014\,102\varepsilon^6 -$$
$$- 0,00\,992\,461\varepsilon^7 + 0,05\,392\varepsilon^8 - 0,208\,951\varepsilon^9 +$$
$$+ 0,547\,188\varepsilon^{10} - 0,867\,501\varepsilon^{11} + 0,628\,253\varepsilon^{12},$$

$$4,04\,485\cdot 10^{-8} - 1,23\,674\cdot 10^{-10}\varepsilon - 0,130\,656\varepsilon^2 -$$
$$- 1,48\,305\cdot 10^{-7}\varepsilon^3 + 0,0\,018\,283\varepsilon^4 - 0,0\,000\,369\,977\varepsilon^5 +$$
$$+ 0,000\,342\,181\varepsilon^6 - 0,00\,291\,183\varepsilon^7 + 0,0\,168\,427\varepsilon^8 -$$
$$\left. - 0,0\,707\,827\varepsilon^9 + 0,203\,738\varepsilon^{10} - 0,357\,727\varepsilon^{11} + 0,287\,339\varepsilon^{12}\right].$$

Для оценки точности приближений к решению краевой задачи (6), (7) для уравнения (17), получаемых с помощью итерационного процесса (16), зафиксируем $\varepsilon = 0,1$ и увеличим размерность матрицы

$$\varphi_{12}(t) = \mathrm{col}\Big[1\,,\;\; t(1-t)\,,\;\; t(1-t)^2\,,\;\; t(1-t)^3\,,$$
$$t(1-t)^4\,,\;\; t(1-t)^5\,,\;\; t(1-t)^6\,,\;\; t(1-t)^7\,,$$
$$t(1-t)^8\,,\;\; t(1-t)^9\,,\;\; t(1-t)^{10}\,,\;\; t(1-t)^{11}\Big]^*.$$

Матрица $\varphi_{12}(t)$ удовлетворяет краевому условию (17) и определяет невырожденную $(12\times \times 12)$-матрицу Грама $\Gamma\Big(\varphi_{12}(\cdot)\Big)$, при этом

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi_{12}(\cdot)\Big)\right] \approx 5{,}93\,620\cdot 10^{-63}.$$

Первое приближение к решению краевой задачи (6), (7) для уравнения (17), получаемое с помощью метода наименьших квадратов, имеет вид

$$x_1(t,\varepsilon) \approx -0{,}0\,000\,320\,264 - t\Big[0{,}0196\,536(1-t) + 0{,}0601\,986(1-t)^2 -$$
$$- 0{,}0\,718\,794(1-t)^3 + 0{,}0\,869\,444(1-t)^4 - 0{,}07\,242(1-t)^5 +$$
$$+ 0{,}0\,594\,333(1-t)^6 - 0{,}038\,034(1-t)^7 t + 0{,}0\,214\,742(1-t)^8 -$$
$$- 0{,}00\,829\,416(1-t)^9 + 0{,}00\,207\,076(1-t)^{10} - 0{,}000\,122\,446(1-t)^{11}\Big].$$

Второе приближение к решению краевой задачи (6), (7) для уравнения (17)

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$$

определяет вектор

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[Z(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - A_1(t)\xi_1(t,\varepsilon)\Big]\,dt.$$

Таким образом,

$$x_2(t,\varepsilon) \approx -0,0\,000\,328\,073 - t\Big[0,0\,196\,527(1-t)+$$
$$+\,0,0\,601\,981(1-t)^2 - 0,0\,718\,842(1-t)^3 + 0,086\,969(1-t)^4-$$
$$-\,0,072\,472(1-t)^5 + 0,0\,595\,019(1-t)^6 - 0,0\,381\,007(1-t)^7+$$
$$+\,0,0\,215\,211(1-t)^8 - 0,00\,831\,588(1-t)^9+$$
$$+\,0,00\,207\,643(1-t)^{10} - 0,000\,122\,812(1-t)^{11}\Big].$$

Третье приближение к решению краевой задачи (6), (7) для уравнения (17) в соответствии со схемой (16)

$$x_3(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon)$$

определяет вектор

$$\xi_3(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[Z(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$
$$-\,Z(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - A_1(t)\xi_2(t,\varepsilon)\Big]dt,$$

при этом

$$x_3(t,\varepsilon) \approx -0,0\,000\,328\,073 - t\Big[0,0196\,527(1-t) + 0,0601\,981(1-t)^2-$$
$$-\,0,0\,718\,841(1-t)^3 + 0,086\,969(1-t)^4 - 0,072\,472(1-t)^5+$$
$$+\,0,0595\,019(1-t)^6 - 0,0\,381\,007(1-t)^7 + 0,0\,215\,211(1-t)^8-$$
$$-\,0,0\,083\,159(1-t)^9 + 0,00\,207\,644(1-t)^{10} - 0,000\,122\,813(1-t)^{11}\Big].$$

Заметим также, что три первых приближения к решению краевой задачи (6), (7) для уравнения (17), полученные с помощью метода наименьших квадратов, удовлетворяют краевому условию (17). Точность полученных приближений демонстрирует последовательное уменьшение от итерации к итерации норм невязок

$$\Delta_i(\varepsilon) = \left\{ \left\| A(t)z_i(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_i(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \frac{dz_i(t,\varepsilon)}{dt} \right\|^2_{C[0;1]} + \right.$$

$$\left. + \left\| \ell z_i(\cdot) - \alpha - J(z_0(\cdot, c_r^*) + x_i(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) \right\|^2_{R^m} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

в решении краевой задачи (1), (2). Действительно, при $\varepsilon = 0,1$ имеем

$$\Delta_0(0,1) = \left\| A(t)z_0(t,c_r^*) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*), t, 0) - \frac{dz_0(t,c_r^*)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 0,0196\,893,$$

$$\Delta_1(0,1) = \left\| A(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \frac{dx_1(t,\varepsilon)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 1,29\,484 \cdot 10^{-7},$$

$$\Delta_2(0,1) = \left\| A(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_2(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \frac{dx_2(t,\varepsilon)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 2,20\,191 \cdot 10^{-8},$$

$$\Delta_3(0,1) = \left\| A(t)x_3(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_3(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - \frac{dx_3(t,\varepsilon)}{dt} \right\|_{C[0;1]} \approx 2,20\,212 \cdot 10^{-8}.$$

Далее, используя метод пристрелки, находим более точное приближение к начальному значению решения краевой задачи (17):

$$x(0; 0,1) \approx -0,000\,032\,807\,300\,636.$$

Точность полученных с помощью итерационного процесса (16) приближений демонстрирует последовательное уменьшение от итерации к итерации отклонений начальных значений решений уравнения (17) от начальных значений полученных приближений. Действительно, при $\varepsilon = 0,1$ имеем

$$\delta_0(\varepsilon) = |x(0; 0,1)| \approx 0,000\,032\,807\,300\,636,$$

$$\delta_1(\varepsilon) = |x_1(0; 0,1) - x(0; 0,1)| \approx 7,80\,858 \cdot 10^{-7},$$

$$\delta_2(\varepsilon) = |x_2(0; 0,1) - x(0; 0,1)| \approx 1,98\,857 \cdot 10^{-11},$$

$$\delta_3(\varepsilon) = |x_3(0; 0,1) - x(0; 0,1)| \approx 8,50\,282 \cdot 10^{-14}.$$

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
4. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1968. — 244 с.
5. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.
6. *Крылов Н. М.* Избранные труды. — Киев: Изд-во АН УССР, 1961. — Т. 1. — 268 с.
7. *Кравчук М.* Вибрані математичні праці. — Київ; Нью-Йорк, 2002. — 792 с.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
9. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень. — Київ: Вища шк., 1995. — Ч. II. — 432 с.

Получено 28.12.07