УДК 517.9

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Т. В. Носенко, О. М. Станжицький*

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: notava@ukr.net
stom@mail.univ.kiev.ua

We substantiate a use of an averaging method for an optimal control problem for differential systems in the Bogolyubov form. We construct an ε-optimal control.

Обосновано применение метода усреднения к задаче оптимального управления системами дифференциальных уравнений в стандартной по Боголюбову форме. Построено ε-оптимальное управление.

Вступ. Ефективним методом розв'язання задач оптимального керування є метод усереднення. При його використанні початковій неавтономній задачі оптимального керування ставиться у відповідність усереднена автономна задача оптимального керування, розв'язок якої знаходиться простіше за розв'язок початкової задачі. Даним питанням присвячено низку робіт (див., наприклад, [1 – 3]).

У даній роботі будемо використовувати інший підхід до застосування методу усереднення, а саме здійснювати усереднення за часом, що явно входить у праві частини системи, вважаючи u параметром, далі при розв'язанні усередненої системи розглядатимемо ті самі керування, що і для початкової системи. Таким чином, множини керувань U для початкової та усередненої систем збігаються, при цьому не вимагається, щоб U була компактом.

У даній роботі встановлено зв'язок між оптимальним керуванням усередненої та точної систем, а саме доведено, що оптимальне керування усередненою системою є ε-оптимальним для точної системи.

Постановка задачі. Будемо розглядати задачу оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(t,x,u), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область в R^n, $u \in U \subset R^m$ — вектор керування, $t \geq 0, T > 0$ — деяка константа, X — вектор-функція, неперервна за сукупністю змінних.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо виконується умова

*Підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проекти № 14.1/007 та Ф25.1/01).

А) $u(t) \in U$ при $t \geq 0$, $u(t)$ є вимірними, локально інтегровними при $t \geq 0$ і для кожного $u(t)$ існує стала $u_0 \in U$ така, що $|u(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ не залежить від $u(t)$ і $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$.

Множину допустимих керувань позначимо через F. Для кожного допустимого керування $u(t)$ $x(t,u)$ — розв'язок системи (1) при $u = u(t)$.

Потрібно знайти такі керування $u \in U \subset R^m$, що забезпечують мінімальне значення функціонала

$$J_\varepsilon(u) = \Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right)\right),$$

де $\Phi(x)$ — деяка функція. $J_\varepsilon = \inf\limits_{u(t)\in F} J_\varepsilon(u)$.

Поставимо у відповідність системі (1) на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ усереднену систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon X_0(y,u), \\ y(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

де

$$X_0(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t,x,u)dt, \tag{3}$$

та

$$\bar{J}_\varepsilon(u) = \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right)\right).$$

Нехай $u_2^*(t,\varepsilon)$ — оптимальне керування усередненою системою (2), тобто

$$\bar{J}_\varepsilon = \inf_{u(t)\in F} \bar{J}_\varepsilon(u) = \bar{J}_\varepsilon(u_2^*(t,\varepsilon)).$$

У роботі доведено, що керування $u_2^*(t,\varepsilon)$ є η-оптимальним для системи (1), а саме, для будь-якого $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ виконується нерівність

$$|J_\varepsilon(u_2^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| < \eta.$$

Допоміжні твердження. Для доведення згаданого вище твердження нам потрібна наступна лема, що є узагальненням принципу усереднення на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів.

Лема 1. *Нехай в області $Q = \{x \in D \subset R^n, t \geq 0, u \in U \subset R^m\}$ виконано умови:*

1) $X(t,x,u)$ є неперервною за сукупністю змінних, обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця по x та u з константою M;

2) розв'язок $y = y(t,u)$, $y(0,u(0)) = x_0$ усередненої системи є визначеним при всіх допустимих $u(t)$ для $t \geq 0$ і належить області D разом з деяким ρ-околом;

3) рівномірно відносно $x \in D$ та $u \in U$ існує границя (3).

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ і $T > 0$ існує $\varepsilon_0(\eta, T) > 0$ таке, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та $0 < t < \dfrac{T}{\varepsilon}$ розв'язок $x(t,u)$ визначено на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ і справедливою є оцінка

$$|x(t,u) - y(t,u)| \leq \eta$$

для кожного допустимого керування.

Доведення. Виберемо довільне $0 < \eta < \dfrac{\rho}{2}$ та зафіксуємо його. Для $\varepsilon > 0$ і довільного допустимого $u(t)$ оцінимо на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ норму різниці між розв'язками системи (1) та системи

$$\begin{gathered}\dot{\bar{x}} = \varepsilon X(t, \bar{x}, u_0), \\ \bar{x}(0) = x_0, \\ \bar{x}(t) = \bar{x}(t, u_0),\end{gathered} \tag{4}$$

де u_0 вибрано з умови A) для $u(t)$. Переходячи в (1) і (4) до інтегральних зображень, для довільного $t \geq 0$ до виходу хоча б одного з розв'язків на межу області D маємо

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X(s, x(s), u(s))ds \tag{5}$$

та

$$\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X(s, \bar{x}(s), u_0)ds, \tag{6}$$

де $x(t) = x(t,u)$.

Від (5) віднімемо (6) і до правої частини рівності додамо та віднімемо $X(s, \bar{x}(s), u(s))$:

$$x(t) - \bar{x}(t) = \varepsilon \int_0^t \left[X(s, x(s), u(s)) - X(s, \bar{x}(s), u(s))\right] ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \left[X(s, \bar{x}(s), u(s)) - X(s, \bar{x}(s), u_0)\right] ds.$$

Використовуючи умову 1 леми, отримуємо

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)|ds + \varepsilon M \int_0^t |u(s) - u_0|ds.$$

З урахуванням умови А) для довільного $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ справедливою є оцінка

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M \int\limits_0^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds + \varepsilon M \int\limits_0^t \varphi(s) ds.$$

Оскільки $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(s) ds < \infty$, то

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M \int\limits_0^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds + \varepsilon M C,$$

де $C = \displaystyle\int_0^\infty \varphi(s) ds.$

З леми Гронуолла – Беллмана маємо оцінку $|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M C e^{TM}$, справедливу до моменту виходу розв'язків на межу області D.

Аналогічно на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ отримуємо оцінку для розв'язків $y(t) = y(t, u)$ системи (2) та розв'язків $\bar{y}(t) = \bar{y}(t, u)$ системи

$$\begin{gathered} \dot{\bar{y}} = \varepsilon X_0(\bar{y}, u_0), \\ \bar{y}(0) = x_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Отже, $|y(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon M C e^{TM}$.

Але для систем (4) та (7) для достатньо малих ε справедливою є оцінка

$$|\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| \leq \frac{\eta}{2}, \tag{8}$$

що випливає з теореми 1.1 [4, с.10]. З (8) випливає, що розв'язок $\bar{x}(t)$ належить області D для довільного $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$, оскільки $\bar{y}(t)$ задовольняє умову 2 леми. З оцінки $|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M C e^{TM}$ вибором достатньо малого ε отримуємо, що $x(t)$ також належить області D для $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$.

Тому справедливими є оцінки

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - \bar{x}(t)| + |\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| + |y(t) - \bar{y}(t)| \leq 2\varepsilon M C e^{TM} + \frac{\eta}{2} := \eta$$

для $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$.

Лему доведено.

Основний результат. Перейдемо до викладення основного результату роботи.

Теорема. *Нехай в області* $Q = \{x \in D \subset R^n, t \geq 0, u \in U \subset R^m\}$ *виконуються наступні умови:*

1) $X(t, x, u)$ *є неперервною за сукупністю змінних, обмеженою сталою* K *та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u *з константою* M;

2) розв'язок $y = y(t, u)$, $y(0, u(0)) = x_0$ *усередненої системи є визначеним при всіх допустимих* $u(t, \varepsilon)$ *для* $t \geq 0$ *і належить області* D *разом з деяким* ρ*-околом;*

3) рівномірно відносно $x \in D$ *та* $u \in U$ *існує границя (3);*

4) функція $\Phi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою* L *в області* D;

5) існує оптимальне керування $u_2^*(t, \varepsilon)$ *системи (2).*

Тоді для будь-якого $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ *таке, що:*

а) для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $J_\varepsilon > -\infty$;

б) виконується нерівність $|J_\varepsilon(u_2^*(t, \varepsilon)) - J_\varepsilon)| \leq \eta$.

Доведення. а) Покажемо, що для системи (1) $J_\varepsilon = \inf\limits_{u_\varepsilon \in F} J_\varepsilon(u) > -\infty$. Доведення проведемо від супротивного.

Нехай існує послідовність $\{\varepsilon_n\}$ така, що $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, а

$$J_{\varepsilon_n} = -\infty. \tag{9}$$

Для кожного з ε_n за означенням інфімуму існує послідовність керувань u_m^n таких, що $J_{\varepsilon_n}(u_m^n) \to -\infty$ при $m \to \infty$. При керуваннях u_m^n системи (1) та (2) мають відповідно розв'язки x_m^n та y_m^n. Зауважимо, що $J_{\varepsilon_n}(u_m^n) = \Phi\left(x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right)$. Оскільки для системи (2) для кожного ε існує оптимальне керування, то $\bar{J}_{\varepsilon_n}(y_m^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n} > -\infty$. Зафіксуємо деяке $0 < \eta_0 < \frac{\rho}{2}$. З викладеного вище випливає існування натурального n_0 такого, що для $\varepsilon_n < \varepsilon_{n_0}$ справджуються оцінки

$$\left|J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n)\right| = \left|\Phi\left(x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right) - \Phi\left(y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\left|x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right) - y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right| < L\eta_0.$$

Звідси маємо

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) = J_{\varepsilon_n}(u_m^n) + \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) > J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) + \bar{J} > \bar{J} - L\eta_0,$$

що приводить до суперечності з (9).

б) Доведемо тепер наступне твердження теореми. Для цього запишемо нерівність

$$J_\varepsilon \leq J_\varepsilon(u_2^*(t, \varepsilon)) = \bar{J}_\varepsilon + [J_\varepsilon(u_2^*(t, \varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon(u_2^*(t, \varepsilon))].$$

Оцінимо різницю

$$|J_\varepsilon(u_2^*(t, \varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon(u_2^*(t, \varepsilon))| = \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t, \varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t, \varepsilon)\right)\right)\right|.$$

Тут $x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)$ — розв'язок системи (1) при оптимальному керуванні $u_2^*(t,\varepsilon)$ усередненою системою, а $y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)$ — оптимальний розв'язок системи (2). Використовуючи умову 4 теореми, маємо

$$\left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \le L\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right) - y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)\right|.$$

Застосовуючи доведену вище лему, для довільного $0 < \eta_1 < \frac{\rho}{2}$ при всіх достатньо малих ε отримуємо оцінку

$$J_\varepsilon \le \bar{J}_\varepsilon + L\eta_1. \tag{10}$$

За означенням інфімуму для вибраного $\eta_1 > 0$ існує керування $u_{\eta_1}(t,\varepsilon)$ з виконанням нерівності

$$J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) < J_\varepsilon + \eta_1.$$

З останнього отримуємо оцінку

$$\bar{J}_\varepsilon = \bar{J}_\varepsilon(u_2^*(t,\varepsilon)) \le \bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) \le \bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) + J_\varepsilon + \eta_1 - J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)).$$

Оцінимо різницю $|\bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon))|$, знову використавши ліпшицевість функції $\Phi(x)$ та доведену лему. Отримаємо

$$|\bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon))| = \left|\Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \le$$
$$\le L\left|y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right) - x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right)\right| \le L\eta_1.$$

Отже, $\bar{J}_\varepsilon \le J_\varepsilon + (L+1)\eta_1$, а звідси на підставі (10) маємо

$$|J_\varepsilon - \bar{J}_\varepsilon| \le (L+1)\eta_1. \tag{11}$$

Далі розглянемо різницю

$$|J_\varepsilon(u_2^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| = |J_\varepsilon(u_2^*(t)) - \bar{J}_\varepsilon + \bar{J}_\varepsilon - J_\varepsilon| \le |J_\varepsilon(u_2^*(t)) - \bar{J}_\varepsilon| + |\bar{J}_\varepsilon - J_\varepsilon|.$$

Використовуючи вигляд критерію оптимальності, маємо

$$|J_\varepsilon(u_2^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon| = \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \le$$
$$\le L\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right) - y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_2^*(t,\varepsilon)\right)\right| \le L\eta_1.$$

Далі, застосовуючи попередню оцінку та нерівність (11), отримуємо

$$|J_\varepsilon(u_2^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| \le \eta,$$

де $\eta := \eta_1(2L+1)$.

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо задачу керування коливним об'єктом з малим керуючим впливом:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + x = \varepsilon(-2\dot{x} + x^3 + 2\dot{x}u),\\
&x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad |x_0| + |x_1| < 1,\\
&|u(t)| \le 1, \quad L = \frac{T}{\varepsilon,}\\
&J[u] = \frac{1}{2}(x^2(L) + \dot{x}^2(L)) \to \min.
\end{aligned} \tag{12}$$

Амплітудно-фазова заміна змінних

$$x = a\sin(t+\varphi),$$

$$\dot{x} = a\cos(t+\varphi)$$

зводить систему (12) до вигляду (1), стандартного за Боголюбовим:

$$\begin{aligned}
&\dot{a} = \varepsilon[-2a\cos(t+\varphi) + a^3\sin^3(t+\varphi) + 2ua\cos(t+\varphi)]\cos(t+\varphi),\\
&\dot{\varphi} = -\varepsilon[-2\cos(t+\varphi) + a^2\sin^3(t+\varphi) + 2u\cos(t+\varphi)]\sin(t+\varphi),\\
&a(0) = a_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0,\\
&J[u] = \frac{1}{2}a^2(L) \to \min.
\end{aligned} \tag{13}$$

Запишемо усереднену систему для системи (13):

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{d\tau} = \xi(u-1),\\
&\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{3}{8}\xi^2,\\
&\xi(0) = a_0, \quad \eta(0) = \varphi_0,\\
&J[u] = \frac{1}{2}\xi^2(T) \to \min.
\end{aligned} \tag{14}$$

Для отримання розв'язку достатньо розглядати рівняння, що містять змінну ξ. Оскільки зазначене рівняння є лінійним, а критерій якості — квадратичним, можемо, використавши принцип максимуму та метод множників Лагранжа, знайти оптимальне керування задачі (14) (див. [5]).

Запишемо спряжену систему та умови трансверсальності:

$$\dot{p} = -p(u-1),$$

$$L_{\xi(0)} = \lambda_1 = p(0),$$

$$L_{\xi(T)} = -\lambda_0 \xi(T) = p(T).$$

Відповідна функція Лагранжа має вигляд

$$L = \lambda_0 \frac{\xi^2(T)}{2} + \lambda_1(\xi(0) - a_0),$$

а функція Понтрягіна даної задачі

$$H(t, \xi, p) = p\xi(u-1).$$

Знайдемо $\max\limits_{|u|\leq 1} H(t,\xi,p) = \max\limits_{|u|\leq 1} p\xi(u-1)$. Аналізуючи функцію Понтрягіна, можемо зробити висновок, що при $p\xi > 0$ $u_{\text{opt}} = 1$, а при $p\xi < 0$ $u_{\text{opt}} = -1$. З умов трансверсальності отримуємо, що знаки функцій $p(t)$ та $\xi(t)$ завжди є протилежними. У цьому випадку оптимальним є керування $u_{\text{opt}} = -1$.

Отже, ми знайшли оптимальне керування усередненою системою, що є η-оптимальним для системи (12).

1. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
2. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 354 с.
3. *Плотников В. А., Бойцова И. А.* Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 5. — С. 152–156.
4. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1996. — 192 с.
5. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

Одержано 12.05.08