УДК 515.126, 517.91

ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ АФІННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З $\mathbb{R}^2$ В $\mathbb{R}^2$

Т. В. Будницька

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ 33, вул. Володимирська, 64
e-mail: Budnitska_T@ukr.net

We study affine maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$, and find necessary and sufficient conditions for such maps to be topologically similar.

Исследуются аффинные отображения с $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности таких отображений.

1. Вступ. У роботі розглядаються матриці над полем дійсних чисел. Відображення $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ називають *лінійно спряженими* (будемо позначати $f \overset{l}{\sim} g$), якщо існує бієктивне лінійне відображення $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Відображення $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ називають *топологічно спряженими* (будемо позначати $f \overset{t}{\sim} g$), якщо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Нехай A — (2×2)-матриця, $b \in \mathbb{R}^2$ — фіксований вектор. Відображення вигляду $f(x) = Ax + b$ називають *афінним відображенням*, а матрицю A — *лінійною частиною* відображення f.

Класифікація афінних відображень, з точністю до топологічної спряженості, є відкритою проблемою, тому дослідженню цієї задачі й присвячено дану статтю.

Мета даної роботи полягає у встановленні критерію топологічної спряженості афінних відображень, що діють з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

2. Топологічна класифікація лінійних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Для класифікації афінних відображень, з точністю до топологічної спряженості, буде використано аналогічну класифікацію лінійних відображень, тому нагадаємо деякі відомі результати.

Якщо $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — лінійне відображення, $f(x) = Ax$, то J — дійсна канонічна форма матриці A (див. [1]) — має вигляд однієї з матриць

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

Для матриці J визначимо матриці A_α, $\alpha = +, -, \infty, 0$, таким чином:

Матриця	Характеристичні числа λ матриці
A_+	$0 < \lvert\lambda\rvert < 1$
A_-	$\lvert\lambda\rvert > 1$
A_∞	$\lambda = 0$
A_0	$\lvert\lambda\rvert = 1$

Відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ називають *періодичним*, якщо існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $f^k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Найменше таке число k називають *періодом* відображення f.

У роботах [2, 3] наведено топологічну класифікацію неперіодичних лінійних відображень, що діють із $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Сформулюємо даний результат для випадку $n = 2$.

Теорема 1 [2, 3]. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ — лінійні неперіодичні відображення. Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли*

$$\operatorname{rank}(A_+) = \operatorname{rank}(C_+), \quad \operatorname{sign}(\det(A_+)) = \operatorname{sign}(\det(C_+)),$$

$$\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-), \quad \operatorname{sign}(\det(A_-)) = \operatorname{sign}(\det(C_-)),$$

$$A_\infty = C_\infty, \quad A_0 = C_0.$$

Для ортогональних лінійних відображень, що діють з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, в [4] показано, що топологічна спряженість означає лінійну спряженість, тобто має місце наступна теорема.

Теорема 2 [4]. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ — лінійні ортогональні відображення. Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $f \overset{l}{\sim} g$ (тобто коли $A_0 = C_0$).*

Наслідок 1. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ — лінійні періодичні відображення. Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $f \overset{l}{\sim} g$ (тобто коли $A_0 = C_0$).*

Отже, об'єднуючи теорему 1 та наслідок 1, для всіх лінійних відображень, що діють з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, отримуємо наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ — лінійні відображення. Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли*

$$\operatorname{rank}(A_+) = \operatorname{rank}(C_+), \quad \operatorname{sign}(\det(A_+)) = \operatorname{sign}(\det(C_+)),$$

$$\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-), \quad \operatorname{sign}(\det(A_-)) = \operatorname{sign}(\det(C_-)),$$

$$A_\infty = C_\infty, \quad A_0 = C_0.$$

Зауваження 1. З курсу лінійної алгебри відомо, що необхідною та достатньою умовою *лінійної спряженості* двох лінійних відображень є рівність дійсних канонічних форм матриць, що відповідають цим лінійним відображенням. Необхідні та достатні умови *топологічної спряженості* двох лінійних відображень дає твердження 1.

3. Топологічна класифікація афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Оскільки топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, топологічну класифікацію афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ розіб'ємо на 2 випадки:

1) топологічна класифікація афінних відображень, що мають хоча б одну нерухому точку;

2) топологічна класифікація афінних відображень, що не мають нерухомих точок.

3.1. Топологічна класифікація афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, що мають хоча б одну нерухому точку. Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай* $f,\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Ax$. *Відображення* f *і* g *топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли існує* $q \in \mathbb{R}^2$ *такий, що* $f(q) = q$ *(тобто коли відображення* f *має нерухому точку).*

Доведення. Наведемо ідею доведення, яка базується на двох кроках:

1) топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок;

2) якщо відображення f має нерухому точку $q \in \mathbb{R}^2$, то $f(x) = Ax + b \overset{t}{\sim} g(x) = Ax$, оскільки існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = x + q$, такий, що $f \circ h = h \circ g$.

Наступна теорема дає необхідні та достатні умови топологічної спряженості двох довільних афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, що мають хоча б по одній нерухомій точці.

Теорема 4. *Нехай* $f,\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$ *та* $g(x) = Cx + d$ *— афінні відображення, що мають хоча б по одній нерухомій точці. Відображення* f *і* g *топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли*

$$\operatorname{rank}(A_+) = \operatorname{rank}(C_+), \quad \operatorname{sign}(\det(A_+)) = \operatorname{sign}(\det(C_+)),$$

$$\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-), \quad \operatorname{sign}(\det(A_-)) = \operatorname{sign}(\det(C_-)),$$

$$A_\infty = C_\infty, \quad A_0 = C_0.$$

Доведення. За умовою теореми відображення f та g мають нерухомі точки. Використовуючи теорему 3, маємо

$$f(x) = Ax + b \overset{t}{\sim} r(x) = Ax, \qquad g(x) = Cx + d \overset{t}{\sim} s(x) = Cx.$$

Тобто відображення $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$, що мають хоча б по одній нерухомій точці, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряженими є відображення $r(x) = Ax$ та $s(x) = Cx$.

Застосовуючи до $r(x) = Ax$ та $s(x) = Cx$ твердження 1, отримуємо необхідний результат.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Може здатись, що необхідні та достатні умови топологічної спряженості двох довільних афінних відображень, що діють з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, і необхідні та достатні умови топологічної спряженості двох довільних лінійних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ збігаються. Та це не вірно. Виявляється, що топологічна класифікація всіх афінних відображень не зводиться до топологічної класифікації лінійних відображень. І це буде доведено в наступному підпункті.

3.2. Топологічна класифікація афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ ***в*** $\mathbb{R}^2$***, що не мають нерухомих точок.*** Сформулюємо деякі допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$ *— афінне відображення. Якщо* f *не має нерухомої точки, то одне з власних чисел матриці* A *дорівнює 1.*

Доведення. Відображення $f(x) = Ax + b$ не має нерухомої точки, якщо не існує $x \in \mathbb{R}^2$ такого, що $f(x) = x$, тобто система $(A - E)x = -b$ не має розв'язку на $\mathbb{R}^2$.

Припустимо, що матриця A не має жодного власного числа, що дорівнює 1, тобто $\det(A-E) \neq 0$, а отже, існує $(A-E)^{-1}$. Звідси випливає, що система $(A-E)x = -b$ має розв'язок $\tilde{x} = -(A-E)^{-1}b$, тобто f має нерухому точку, що суперечить умові леми.

Лему доведено.

Зауваження 3. Далі, якщо афінне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$, не має нерухомої точки та $\lambda_A^{(1)}$, $\lambda_A^{(2)}$ — власні числа матриці A, будемо вважати, що $\lambda_A^{(1)} = 1$.

Твердження 2, 3 ідейно однакові, оскільки дають необхідні та достатні умови для випадків, коли конкретні афінні відображення не мають нерухомих точок. Ці результати будуть використані при доведенні теорем 5 та 6.

Твердження 2. *Нехай* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. *Відображення* f *не має нерухомої точки тоді і тільки тоді, коли* $b_2 \neq 0$.

Доведення. Відображення f не має нерухомої точки, якщо не існує $x \in \mathbb{R}^2$ такого, що $f(x) = x$, тобто якщо не існує $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ такого, що $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, тобто у випадку, коли

$$\begin{aligned} &x_2 + b_1 = 0, \\ &b_2 = 0, \end{aligned}$$

така система не має розв'язку на $\mathbb{R}^2$.

А це можливо тоді і тільки тоді, коли $b_2 \neq 0$.

Твердження доведено.

Твердження 3. *Нехай* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$, *де* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$. *Відображення* f *не має нерухомої точки тоді і тільки тоді, коли* $\delta_1 \neq 0$.

Доведення аналогічне доведенню твердження 2.

Твердження 4. *Нехай* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *де* $f(x) = x + b$ *та* $g(x) = x + d$, $b, d \in \mathbb{R}^2$. *Відображення* f *і* g *топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли* b *та* d *або одночасно дорівнюють* 0, *або одночасно відмінні від* 0.

Доведення. Топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, тому $f(x) = x + b$ та $g(x) = x + d$ або одночасно тотожні відображення, або одночасно відмінні від тотожного.

Якщо $b = d = 0$, то $f(x) = g(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Якщо $b \neq 0$ та $d \neq 0$, то $f \overset{t}{\sim} g$, оскільки існує гомеоморфізм $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\psi(x) = Bx$, де матриця B така, що $\det B \neq 0$, $Bb = d$, такий, що $g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$.

Твердження доведено.

Оскільки топологічно спряжені відображення є одночасно або бієктивними, або не бієктивними, то топологічну класифікацію афінних відображень, які діють з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ та не мають нерухомих точок, розіб'ємо на два можливі випадки:

а) топологічна класифікація афінних відображень $f(x) = Ax + b$, що не мають нерухомих точок та $\det A \neq 0$;

б) топологічна класифікація афінних відображень $f(x) = Ax + b$, що не мають нерухомих точок та $\det A = 0$.

Топологічна класифікація афінних відображень $f(x) = Ax + b$, що не мають нерухомих точок та $\det A \neq 0$. Основним результатом у цьому випадку є теорема 5, яка стверджує, що довільне бієктивне афінне відображення, що не має нерухомих точок, та $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, є топологічно спряженими.

Теорема 5. *Нехай* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$, $g(x) = x + d$ — *афінні відображення такі, що:*

1) не існує $q, \nu \in \mathbb{R}^2$ *таких, що* $f(q) = q$ *та* $g(\nu) = \nu$;

2) $\det A \neq 0$.

Тоді $f \overset{t}{\sim} g$.

Доведення. Ідея доведення: для відображень f та g, що задовольняють умови теореми, побудуємо гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$, тим самим доведемо, що $f \overset{t}{\sim} g$.

За умовою теореми відображення f задовольняє умови: $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q, \det A \neq 0$.

Використовуючи лему 1 маємо $\lambda_A^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} \neq 0$.

Доведення теореми розіб'ємо на два можливі випадки:

1) $\lambda_A^{(1)} = 1$ та $\lambda_A^{(2)} = 1$;

2) $\lambda_A^{(1)} = 1$ та $\lambda_A^{(2)} = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

і побудуємо відповідні спрягаючі гомеоморфізми у кожному з них.

Випадок 1: $\lambda_A^{(1)} = 1$ та $\lambda_A^{(2)} = 1$. Зауважимо, що якщо матриця A є одиничною, то теорема випливає з твердження 4, тому далі будемо вважати, що матриця A не є одиничною.

Використавши твердження 2, доведемо, що відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\; q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1 = \lambda_A^{(2)}$, $A \neq E$, та $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, є топологічно спряженими.

Побудова відповідного гомеоморфізму базується на 4 кроках:

1. Спрягаючи гомеоморфізмом $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi_1(x) = Sx$, де матриця S така, що $\det S \neq 0$, $SAS^{-1} = J$, відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\; q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1 = \lambda_A^{(2)}$, $A \neq E$, отримуємо відображення

$$f_1(x) = Jx + \delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \qquad \delta = Sb,\ \delta_1 \in \mathbb{R},\ \delta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Зауважимо, що умови $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ випливають з твердження 2, оскільки відображення $f_1(x) = Jx + \delta$ не має нерухомих точок ($f_1 = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$, а f не має нерухомих точок за умовою).

2. Відображення $f_1(x) = Jx + \delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$, де $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, та $f_2(x) = Jx + e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ є топологічно спряженими, оскільки існує гомеоморфізм $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $f_2 = \phi_2 \circ f_1 \circ \phi_2^{-1}$, а саме

$$\phi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\delta_2} & -\dfrac{\delta_1}{\delta_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \delta_1 \in \mathbb{R}, \quad \delta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

3. Відображення $f_2(x) = Jx + e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $f_3(x) = x + e_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ є топологічно спряженими, тому що існує гомеоморфізм $\phi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $f_3 = \phi_3 \circ f_2 \circ \phi_3^{-1}$, а саме

$$\phi_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \dfrac{1}{2}\left(x_2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

4. Відображення $f_3(x) = x + e_2 \overset{t}{\sim} g(x) = x + d$, $d \neq 0$, за твердженням 4, тобто існує гомеоморфізм ψ такий, що $g = \psi \circ f_3 \circ \psi^{-1}$.

З кроків 1–4 випливає, що афінні відображення $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1 = \lambda_A^{(2)}$, $A \neq E$, та $g(x) = x+d$, $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, є топологічно спряженими, тому що існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = \psi \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(x)$, такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$ (тут $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi$ — відповідні гомеоморфізми з кроків 1–4).

Випадок 2: $\lambda_A^{(1)} = 1$ та $\lambda_A^{(2)} = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Використавши твердження 3, доведемо, що відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, та $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, є топологічно спряженими.

Доведення є аналогічним доведенню попереднього випадку: за 4 кроки побудуємо гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

$1'$. Спрягаючи гомеоморфізмом $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi_1(x) = Bx$, де матриця B така, що $\det B \neq 0$, $BAB^{-1} = J$, відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, отримуємо

$$f_1(x) = Jx+\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\},\ \delta = Bb,\ \delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \delta_2 \in \mathbb{R}.$$

Умови $\delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\delta_2 \in \mathbb{R}$ випливають з твердження 3, оскільки відображення $f_1(x) = Jx + \delta$ не має нерухомих точок ($f_1 = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$).

$2'$. Відображення $f_1(x) = Jx + \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ та $f_2(x) = Jx + e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $\delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\delta_2 \in \mathbb{R}$, є топологічно спряженими, тому що існує гомеоморфізм $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $f_2 = \phi_2 \circ f_1 \circ \phi_2^{-1}$, а саме

$$\phi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\delta_1} \\ x_2 + \dfrac{\delta_2}{\alpha - 1} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\},\ \delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \delta_2 \in \mathbb{R}.$$

$3'$. Відображення $f_2(x) = Jx + e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, та $f_3(x) = x+e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ є топологічно спряженими, оскільки існує гомеоморфізм

$\phi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $f_3 = \phi_3 \circ f_2 \circ \phi_3^{-1}$, а саме

$$\phi_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \alpha^{-x_1} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

$4'$. Відображення $f_3(x) = x + e_1 \overset{t}{\sim} g(x) = x + d,\ d \neq 0$, за твердженням 4, тобто існує гомеоморфізм ψ такий, що $g = \psi \circ f_3 \circ \psi^{-1}$.

З кроків $1'-4'$ випливає, що $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax+b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, та $g(x) = x+d$, $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, є топологічно спряженими, тому що існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = \psi\circ\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1(x)$, такий, що $g = h\circ f\circ h^{-1}$ (тут $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi$ — відповідні гомеоморфізми з кроків $1'-4'$).

Висновки. З випадку 1 випливає, що відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 :$ $f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = \lambda_A^{(2)} = 1$, та $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, є топологічно спряженими.

З випадку 2 випливає, що $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, та $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, є топологічно спряженими.

Отже, афінне відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\det A \neq 0$ $(\Leftrightarrow \lambda_A^{(2)} \neq 0)$, та відображення $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, є топологічно спряженими.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Cx + d$ — бієктивні афінні відображення без нерухомих точок. Тоді $f \overset{t}{\sim} g$.*

Топологічна класифікація афінних відображень $f(x) = Ax + b$, що не мають нерухомих точок та $\det A = 0$. Наступна теорема стверджує, що два довільні не бієктивні афінні відображення з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ без нерухомих точок є топологічно спряженими.

Теорема 6. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax+b$, $g(x) = Cx+d$ — афінні відображення такі, що:*

1) не існують $q, \nu \in \mathbb{R}^2$ такі, що $f(q) = q$ та $g(\nu) = \nu$;

2) $\det A = 0$ та $\det C = 0$.

Тоді $f \overset{t}{\sim} g$.

Доведення аналогічне доведенню попередньої теореми: для відображень f та g, що задовольняють умови теореми, побудуємо гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Тобто, використавши лему 1 та твердження 3, доведемо, що $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$ такі, що $\nexists\, q, \nu \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$ та $g(\nu) = \nu$, $\lambda_A^{(1)} = \lambda_C^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = \lambda_C^{(2)} = 0$, є топологічно спряженими.

Побудова відповідного гомеоморфізму базується на 3 кроках:

1. Спрягаючи гомеоморфізмом $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi_1(x) = Sx$, де матриця S така, що $\det S \neq 0$, $SAS^{-1} = J$, відображення $f(x) = Ax + b$ таке, що $\nexists\, q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = q$, $\lambda_A^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = 0$, отримуємо відображення

$$f_1(x) = Jx + \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \qquad \delta = Sb,\ \delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \delta_2 \in \mathbb{R}.$$

Умови $\delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\delta_2 \in \mathbb{R}$ випливають з твердження 3, оскільки відображення $f_1(x) = Jx + \delta$ не має нерухомих точок ($f_1 = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$).

2. Спрягаючи гомеоморфізмом $\phi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi_3(x) = Kx$, де матриця K така, що $\det K \neq 0$, $K^{-1}CK = J$, відображення $g(x) = Cx + d$ таке, що $\nexists\, \nu \in \mathbb{R}^2 : g(\nu) = \nu$, $\lambda_C^{(1)} = 1$, $\lambda_C^{(2)} = 0$, отримуємо відображення

$$f_2(x) = Jx + \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = K^{-1}d,\ \eta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \eta_2 \in \mathbb{R}.$$

Умови $\eta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\eta_2 \in \mathbb{R}$ випливають з твердження 3, оскільки відображення $f_2(x) = Jx + \eta$ не має нерухомих точок ($g = \phi_3 \circ f_2 \circ \phi_3^{-1}$).

3. Відображення $f_1(x) = Jx + \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$, де $\delta = Sb$, $\delta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\delta_2 \in \mathbb{R}$, та $f_2(x) = Jx + \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, де $\eta = K^{-1}d$, $\eta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\eta_2 \in \mathbb{R}$, є топологічно спряженими, тому що існує гомеоморфізм $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $f_2 = \phi_2 \circ f_1 \circ \phi_2^{-1}$, а саме

$$\phi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\eta_1}{\delta_1} x_1 \\ x_2 - \delta_2 + \eta_2 \end{pmatrix}, \qquad \delta = Sb,\ \eta = K^{-1}d,\ \delta_1,\ \eta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \delta_2, \eta_2 \in \mathbb{R}.$$

З кроків 1 – 3 випливає, що відображення $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax+b$ та $g(x) = Cx+d$ такі, що $\nexists\, q, \nu \in \mathbb{R}^2 :\ f(q) = q$ та $g(\nu) = \nu$, $\lambda_A^{(1)} = \lambda_C^{(1)} = 1$, $\lambda_A^{(2)} = \lambda_C^{(2)} = 0$, є топологічно спряженими, оскільки існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(x)$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$ (тут ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 — гомеоморфізми з кроків 1 – 3).

Теорему доведено.

Підсумовуючи викладене вище для афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, що не мають нерухомих точок, отримуємо таке твердження.

Твердження 5. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$ — афінні відображення, які не мають нерухомих точок. Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $\det A$ та $\det C$ або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.*

Об'єднуючи теорему 4 та твердження 5, отримуємо наступний критерій топологічної спряженості афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 7 (основна теорема). *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Cx + d$ — афінні відображення.*

Якщо f, g мають хоча б по одній нерухомій точці, то $f \overset{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rank}(A_+) = \operatorname{rank}(C_+), \quad \operatorname{sign}(\det(A_+)) = \operatorname{sign}(\det(C_+)),$$

$$\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-), \quad \operatorname{sign}(\det(A_-)) = \operatorname{sign}(\det(C_-)),$$

$$A_\infty = C_\infty, \quad A_0 = C_0.$$

Якщо f, g *не мають нерухомих точок, то* $f \overset{t}{\sim} g$ *тоді і тільки тоді, коли* $\det A$ *та* $\det C$ *або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.*

1. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 301 с.
2. *Kuiper N.H., Robbin J.W.* Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. — 1973. — **19**. — P. 83 – 106.
3. *Robbin J. W.* Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1972. – **78**, № 6. — P. 923 – 952.
4. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.; Л., 1947. — 392 с.

Одержано 30.05.08