УДК 517.929

ОДИН ВАРІАНТ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ*

В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

In this paper, conditions of consistency for systems of linear differential equations with constant delay of neutral type and restrictions are established. The projection-iterative method for such problems is substantiated.

Установлены условия совместимости для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием нейтрального типа и ограничениями. Обосновано применение к таким задачам проекционно-итеративного метода.

Функціонально-диференціальні рівняння та їх системи є математичними моделями різноманітних фізичних процесів. Широта застосувань стала поштовхом до інтенсивного розвитку теорії таких рівнянь у останні півстоліття $[1-4]$. Окремим напрямком досліджень є встановлення умов сумісності та обґрунтування наближених методів розв'язання функціонально-диференціальних рівнянь при умові накладання на їх розв'язки додаткових обмежень. Зокрема, у $[5,6]$ за допомогою підходу, уперше запропонованого в $[7]$, та методики роботи $[8]$ проведено дослідження систем диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями. В даній роботі згаданий вище підхід застосовано до вивчення аналогічних питань для систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням нейтрального типу та додатковими умовами.

1. Об'єкт дослідження. Розглянемо задачу

$$\frac{d}{dt}x(t) + N(t)\frac{d}{dt}x(t-\Delta) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad \frac{d}{dt}x(t) = \psi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x(a) = \varphi(a), \tag{2}$$

$$\int\limits_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{3}$$

*Частково підтримано грантом Президії НАН України для молодих учених (№ 0105U005666).

у якій $\Delta > 0$ — стале запізнення, $N(t)$, $L(t)$, $M(t)$ та $S(t)$ – матриці розмірностей $m \times m$, $m \times m$, $m \times m$ та $l \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[a, b]$, причому $N(t) \neq 0$ на $[a, b]$, $f \in L_2([a, b], \mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathbb{C}([a - \Delta, a), \mathbb{R}^m)$ та $\psi \in \mathbb{C}([a - \Delta, a), \mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$.

Задачу (1) – (3) вважатимемо сумісною, якщо існує вектор-функція $x \in W_2^1([a, b], \mathbb{R}^m)$, яка майже скрізь задовольняє рівняння (1), умову (2) та обмеження (3). Якщо ж такої вектор-функції не існує, то задача (1) – (3) є несумісною. За наявності умов (3) ($l > 0$), взагалі кажучи, остання ситуація є типовою.

Метою даної статті є встановлення умов сумісності задачі (1) – (3) та обґрунтування застосування до неї одного із варіантів проекційно-ітеративного методу.

2. Зведення системи функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з обмеженнями. Задачу (1) – (3) можна звести до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з обмеженнями. Такий крок дає змогу застосувати при дослідженні поставленої задачі методики, розроблені для звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, встановлення умов сумісності задачі (1) – (3) та обґрунтування застосування до неї різних наближених методів можна проводити методом інтегральних рівнянь.

Отже, припустимо, не зменшуючи загальності, що $b = a + N\Delta$. Розглядаючи, дотримуючись методики із [5], систему рівнянь (1) на кожному інтервалі (τ_i, τ_{i+1}), вводячи заміну $t = cs + \tau_i$, де $\tau_i = a + (i-1)\Delta$, $i = \overline{0, N}$, $c = \Delta/T$, $s \in [0, T]$, та враховуючи неперервність вектор-функції $x(t)$ у точках τ_i, $i = \overline{2, N-1}$, отримуємо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь порядку mN

$$Q(s)\frac{dz}{ds} + P(s)z(s) = q(s), \quad z(0) = \gamma + Dz(T), \tag{4}$$

з обмеженнями

$$\int_0^T V(s)z(s)ds = \alpha, \tag{5}$$

в якій

$$z(s) = \operatorname{col}(z_1(s)\ \ z_2(s)\ \ \ldots\ \ z_N(s)), \quad q(s) = \operatorname{col}(q_1(s)\ \ q_2(s)\ \ \ldots\ \ q_N(s)),$$

$$Q(s) = \begin{pmatrix} I & O & \ldots & O & O \\ N_2(s) & I & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & N_N(s) & I \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O & O \\ I & O & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & I & O \end{pmatrix},$$

$$P(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) & O & \ldots & O & O \\ M_2(s) & L_2(s) & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & M_N(s) & L_N(s) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\gamma = \mathrm{col}\,(\varphi(a)\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)\,, \quad V(s) = \mathrm{col}\,(S_1(s)\ \ S_2(s)\ \ \ldots\ \ S_N(s))\,,$$

I — одинична матриця в $\mathbb{R}^m$,

$$z_i(s) = x(cs + \tau_i), \quad L_i(s) = cL(cs + \tau_i),$$

$$M_i(s) = cM(cs + \tau_i), \quad S_i(s) = cS(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N},$$

$$q_1(s) = cf(cs + \tau_1) - M_1(s)\varphi(cs + \tau_0) - N_1(s)\psi(cs + \tau_0),$$

$$q_i(s) = cf(cs + \tau_i), \quad N_i(s) = N(cs + \tau_i), \quad i = \overline{2, N}.$$

3. Умови сумісності. Задача (1) – (3) є перевизначеною. Тому одним із перших та найважливіших питань, що постають при її дослідженні, є питання сумісності. Як зазначено у п. 1, розглядувана задача, взагалі кажучи, несумісна, і, отже, виникає потреба у відшуканні умов, за яких вона матиме розв'язок. Встановимо деякі із таких умов.

Важливу роль у подальшому дослідженні відіграватиме задача

$$Q(s)\frac{dz}{ds} + H(s)z(s) = y(s) + E(s)\lambda, \quad s \in (0, T), \tag{7}$$

$$z(0) = \gamma + Dz(T), \quad \int\limits_0^T V(s)z(s)ds = \alpha, \tag{8}$$

у якій $H(s)$ — неперервна при $s \in [0, T]$ $(mN \times mN)$-матриця, $E(s)$ — $(mN \times l)$-матриця із сумовними з квадратом на $[0, T]$ елементами. Тут вектор-функція $y \in L_2\left([0, T], \mathbb{R}^{mN}\right)$ є заданою, а вектор-функцію $z \in W_2^1\left([0, T], \mathbb{R}^{mN}\right)$ та вектор $\lambda \in \mathbb{R}^l$ потрібно визначити.

Припустимо, що задача (7), (8) має єдиний розв'язок при довільній вектор-функції $y \in L_2\left([0, T], \mathbb{R}^{mN}\right)$, що зображується формулами

$$z(s) = h(s) + \int\limits_0^T G(s, \xi)y(\xi)d\xi, \quad \widehat{u}(s) = E(s)\lambda = r(s) - \int\limits_0^T R(s, \xi)y(\xi)d\xi, \tag{9}$$

і справджуються рівності

$$\int\limits_0^T G(s, \xi)E(\xi)d\xi = O, \quad E(s) - \int\limits_0^T R(s, \xi)E(\xi)d\xi = O. \tag{10}$$

Наведене вище припущення ґрунтується на результатах роботи [5] (лема 2) і на тому факті, що за умови $N(t) \neq 0$ на $[a, b]$ $(mN \times mN)$-матриця $Q(s)$ має обернену матрицю $Q^{-1}(s)$,

$$Q^{-1}(s) = \begin{pmatrix} I & O & \dots & O & O \\ n_{21}(s) & I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{N1}(s) & n_{N2}(s) & \dots & n_{NN-1}(s) & I \end{pmatrix},$$

де

$$n_{ij}(t) = (-1)^{i-j} \prod_{k=j}^{i-1} N_k(s), \quad j < i.$$

Введемо у розгляд оператор

$$(\Pi y)(s) := \int_0^T \Pi(s, \xi) y(\xi) d\xi, \tag{11}$$

де

$$\Pi(s, \xi) = E(s)\Delta^{-1}E^*(\xi), \quad \Delta = \int_0^T E^*(s)E(s)ds. \tag{12}$$

Оператор Π ортогонально проектує простір $L_2\left([0, T], \mathbb{R}^{mN}\right)$ на його підпростір $U_{mN}\left([0, T], \mathbb{R}^{mN}\right)$, породжений лінійно незалежними стовпцями матриці $E(s)$.

Введемо нову вектор-функцію

$$\widehat{y}(s) = y(s) - \int_0^T \Pi(s, \xi) y(\xi) d\xi, \tag{13}$$

яка, як випливає із властивостей (10) та позначень (11), (12), задовольняє співвідношення

$$\int_0^T G(s, \xi) y(\xi) d\xi = \int_0^T G(s, \xi) \widehat{y}(\xi) d\xi \quad \forall y \in L_2\left([0, T], \mathbb{R}^{mN}\right). \tag{14}$$

За умови однозначної розв'язності задачі (7), (8), задачу (4), (5), а отже і задачу (1) – (3), можна звести до деякої системи інтегральних рівнянь. Для цього запишемо задачу (4), (5) у вигляді задачі (7), (8), поклавши в ній

$$y(s) = q(s) + [H(s) - P(s)]z(s) - E(s)\lambda. \tag{15}$$

Підставивши зображення (9) у (15), отримаємо

$$y(s) = p(s) + \int_0^T [R(s,\xi) + K(s,\xi)]y(\xi)d\xi, \tag{16}$$

де

$$p(s) = q(s) - r(s) + [H(s) - P(s)]h(s), \quad K(s,\xi) = [H(s) - P(s)]G(s,\xi). \tag{17}$$

Використовуючи властивість (14), зображення (13) та враховуючи, що [5]

$$R(s,\xi) - \int_0^T \Pi(s,\tau)R(\tau,\xi)d\tau = 0,$$

інтегральне рівняння (16) можна трактувати як систему рівнянь

$$y(s) = p(s) + \int_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi + \int_0^T K(s,\xi)\widehat{y}(\xi)d\xi, \tag{18}$$

$$\widehat{y}(s) = g(s) + \int_0^T L(s,\xi)\widehat{y}(\xi)d\xi, \tag{19}$$

у якій

$$g(s) = p(s) - \int_0^T \Pi(s,\xi)p(\xi)d\xi, \quad L(s,\xi) = K(s,\xi) - \int_0^T \Pi(s,\tau)K(\tau,\xi)d\tau. \tag{20}$$

Питання сумісності задачі (1) – (3) тісно пов'язане з питанням розв'язуваності системи (18), (19).

Проаналізувавши схему доведення теореми 1 із [9], можна переконатися у справедливості наступного твердження.

Теорема. *Якщо задача (7), (8) має єдиний розв'язок, то задача (1) – (3) сумісна тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sigma + \int_0^T \Gamma(\xi)\widehat{y}(\xi)d\xi = 0, \tag{21}$$

де

$$\sigma = \int_0^T V(s)p(s)ds = 0, \quad \Gamma(\xi) = \int_0^T V(s)K(s,\xi)ds = 0,$$

$\widehat{y} \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{mN}\right)$ — *розв'язок системи (19).*

Зауважимо, що крім умови (21) існують інші, рівносильні їй, умови сумісності задачі (1) – (3). Наведемо деякі з них.

Для цього спершу, скориставшись властивістю (10), зазначимо, що

$$\int_0^T [R(s,\xi) + K(s,\xi)]\widehat{u}(\xi)d\xi = \widehat{u}(s) \quad \forall \widehat{u} \in U_{mN}\left([0,T], \mathbb{R}^{mN}\right), \tag{22}$$

тобто одиниця є власним значенням інтегрального рівняння (16). Згідно з теорією лінійних інтегральних рівнянь, рівняння (16), а отже і задача (1) – (3), матиме розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься умова

$$\int_0^T p(s)\eta(s)ds = 0, \tag{23}$$

де $\eta \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{mN}\right)$ — довільний розв'язок рівняння, спряженого до рівняння (22), тобто

$$\eta(s) = \int_0^T [R^*(s,\xi) + K^*(s,\xi)]\eta(\xi)d\xi.$$

Зауваження. Умова (21), умова [5]

$$\int_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi = r(s),$$

де $y \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{mN}\right)$ — розв'язок системи

$$y(s) = p(s) + r(s) + \int_0^T K(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{24}$$

та умова (23) є рівносильними.

4. Проекційно-ітеративний метод. Умови сумісності, наведені у попередньому пункті, дозволяють зробити висновок про існування розв'язку задачі (1) – (3). Однак у деяких випадках цієї інформації не достатньо і постає питання відшукання розв'язку поставленої задачі в явному вигляді або наближено.

Одними з наближених методів розв'язання задачі (1) – (3) є методи проекційно-ітеративного типу. Нижче наведено обґрунтування застосування до задачі (1) – (3) одного із таких методів [10]. Суть методу стосовно задачі (1)–(3) полягає у тому, що послідовні наближення $x_k(t)$ визначаються із задачі

$$\frac{d}{dt}x_k(t) + N(t)\frac{d}{dt}x_k(t-\Delta) + A(t)x_k(t) + B(t)x_k(t-\Delta) = v_k(t) + \Phi(t)\lambda_k, \quad t \in [a,b], \tag{25}$$

$$x_k(t) = \varphi(t), \quad \frac{d}{dt}x_k(t) = \psi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x_k(a) = \varphi(a), \tag{26}$$

$$\int_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha, \tag{27}$$

де

$$v_k(t) = f(t) + [A(t) - L(t)]u_k(t) + [B(t) - M(t)]u_k(t-\Delta), \tag{28}$$

вектор-функція $u_k(t)$ має вигляд

$$u_k(t) = x_{k-1}(t) + W(t)\mu_k, \tag{29}$$

а невідомий вектор $\mu_k \in \mathbb{R}^\nu$ визначається з умови

$$\int_a^b \Psi(t)\left(\frac{du_k}{dt} + N(t)\frac{d}{dt}u_k(t-\Delta) + L(t)u_k(t) + M(t)u_k(t-\Delta) - f(t)\right)dt = 0. \tag{30}$$

Тут $A(t)$ та $B(t)$ — неперервні при $t \in [a,b]$ $(m \times m)$-матриці, $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ — матриці із сумовними з квадратом на $[a,b]$ елементами розмірності $m \times l$ та $\nu \times m$ відповідно. Стовпці матриці $\Phi(t)$ та рядки матриці $\Psi(t)$ є лінійно незалежними. Матриця $W(t)$, що фігурує у зображенні (29), визначається із задачі

$$\frac{d}{dt}W(t) + N(t)\frac{d}{dt}W(t-\Delta) + A(t)W(t) + B(t)W(t-\Delta) = D(t), \quad t \in [a,b], \tag{31}$$

$$W(t) = O, \quad \frac{d}{dt}W(t) = O, \quad t \in [a-\Delta, a), \quad W(a) = O, \tag{32}$$

$$\int_a^b S(t)W(t)dt = 0, \tag{33}$$

де $D(t)$ — $(m \times \nu)$-матриця із сумовними з квадратом на $[a,b]$ елементами, стовпці якої лінійно незалежні.

У задачі (25) – (27) вектор-функція $v_k \in L_2([a,b],\mathbb{R}^m)$ є заданою, а вектор-функція $x_k \in W_2^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ та вектор $\lambda_k \in \mathbb{R}^l$ — шуканими.

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із задачі (25) – (27) при $k=0$ і заданій вектор-функції $v_0 \in L_2([a,b],\mathbb{R}^m)$.

Зауважимо, що за наближення до точного розв'язку задачі (1) – (3) можна вважати як вектор-функцію $x_k(t)$, так і $u_k(t)$.

Окремим випадком методу (25) – (33) є ітераційний метод (не містить умови (30) та $W(t)=0$), а вектор-функція $u_1(t)$ збігається із наближенням, побудованим за проекційним методом.

Встановимо умови збіжності запропонованого методу. Для цього покажемо, що згаданий вище метод можна звести до проекційно-ітеративного методу для системи інтегральних рівнянь (24). Справді, таким самим способом, як при зведенні задачі (1) – (3) до задачі (4), (5), алгоритм (25) – (33) можна переписати у вигляді

$$Q(s)\frac{dz_k}{ds}+H(s)z_k(s)=y_k(s)+E(s)\lambda_k, \tag{34}$$

$$z_k(0)=\gamma+Dz_k(T), \quad \int\limits_0^T V(s)z_k(s)ds=\alpha, \tag{35}$$

$$y_k=q(s)+[H(s)-P(s)]w_k(s), \tag{36}$$

$$w_k(s)=z_{k-1}(s)+K(s)\mu_k, \tag{37}$$

$$\int\limits_0^T Z(s)\left(Q(s)\frac{dw_k}{ds}+P(s)w_k(s)-q(s)\right)ds=0, \tag{38}$$

де матриця $K(s)$ розмірності $mN\times\nu$ визначається із задачі

$$Q(s)\frac{dK}{ds}+H(s)K(s)=C(s), \quad s\in(0,T), \tag{39}$$

$$K(0)=DK(T), \quad \int\limits_0^T V(s)K(s)ds=0. \tag{40}$$

Тут матриці $Q(s)$, $H(s)$, D, $V(s)$, $P(s)$, вектор γ та вектор-функція $q(s)$ мають вигляд (6) і

$$z_k(s)=\operatorname{col}\left(z_1^k(s)\;\; z_2^k(s)\;\;\ldots\;\; z_N^k(s)\right), \quad w_k(s)=\operatorname{col}\left(w_1^k(s)\;\; w_2^k(s)\;\;\ldots\;\; w_N^k(s)\right),$$

$$z_i^k(s) = x_k(cs+\tau_i), \quad w_i^k(s) = u_k(cs+\tau_i), \quad i = \overline{1,N},$$

$$y_k(s) = \mathrm{col}\left(y_1^k(s) \;\; y_2^k(s) \;\; \ldots \;\; y_N^k(s)\right),$$

$$y_1^k(s) = cv_k(cs+\tau_1) - B_1(s)\varphi(cs+\tau_0) - N_1(s)\psi(cs+\tau_0),$$

$$y_i^k(s) = cv_k(cs+\tau_i), \quad i = \overline{2,N},$$

$$E(s) = \mathrm{col}\left(E_1(s) \;\; E_2(s) \;\; \ldots \;\; E_N(s)\right), \quad K(s) = \mathrm{col}\left(K_1(s) \;\; K_2(s) \;\; \ldots \;\; K_N(s)\right),$$

$$Z(s) = \left(\Psi_1(s) \;\; \Psi_2(s) \;\; \ldots \;\; \Psi_N(s)\right), \quad C(s) = \mathrm{col}\left(C_1(s) \;\; C_2(s) \;\; \ldots \;\; C_N(s)\right),$$

$$E_i(s) = c\Phi(cs+\tau_i), \quad K_i(s) = cW(cs+\tau_i),$$

$$\Psi_i(s) = c\Psi(cs+\tau_i), \quad C_i(s) = cD(cs+\tau_i), \quad i = \overline{1,N}.$$

Згідно з викладеним у попередньому пункті, задача (34), (35) має єдиний розв'язок

$$z_k(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y_k(\xi)d\xi. \tag{41}$$

Якщо тепер підставити зображення (41), замінивши в ньому індекс k на $k-1$, у співвідношення (37) та скористатись тим, що матриця $K(s)$ є розв'язком задачі (39), (40), тобто її можна подати у вигляді

$$K(s) = \int_0^T G(s,\xi)C(\xi)d\xi,$$

то матимемо

$$w_k(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)[y_{k-1}(\xi) + C(\xi)\mu_k]d\xi. \tag{42}$$

Підставивши (42) у (36) та виконавши нескладні перетворення, отримаємо проекційно-ітеративний метод для системи інтегральних рівнянь (24):

$$y_k(s) = p(s) + r(s) + \int_0^T K(s,\xi)v_k(\xi)d\xi, \tag{43}$$

$$v_k(s) = y_{k-1}(s) + C(s)\mu_k, \tag{44}$$

$$\int_0^T Z(s)[y_k(s) - v_k(s)]ds = 0. \tag{45}$$

Отже, питання встановлення умов збіжності методу (25) – (33) звелося до відповідного питання для проекційно-ітеративного методу (43) – (45) для системи інтегральних рівнянь (24). Умови ж збіжності останнього є відомими [10].

Таким чином, у результаті проведених в даній статті досліджень:

1) встановлено умови сумісності систем лінійних диференціальних рівнянь із сталим запізненням нейтрального типу та обмеженнями;

2) обґрунтовано проекційно-ітеративний метод побудови наближених розв'язків таких задач.

Отримані результати можуть бути основою для аналогічних досліджень для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням нейтрального типу та обмеженнями і можуть бути перенесені на випадок змінного запізнення та більш складних додаткових умов.

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
2. *Хейл Дж. К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1983. — 431 с.
3. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
5. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із загаюванням та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206 – 232.
6. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Модифікований проекційно-ітеративний метод для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженням // Там же. — 2004. — **7**, № 2. — С. 188 – 207.
7. *Лучка А. Ю.* Крайова задача для диференціальних рівнянь з імпульсною дією і побудова її розв'язку проекційним методом // Допов. НАН України. — 1993. — № 8. — С. 11 – 16.
8. *Лучка А. Ю.* Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 465 – 488.
9. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.
10. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 19.07.2006