УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. А. Козьма

Одес. эконом. у-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Преображенская, 8
e-mail: emdenl@farlep.net

We find asymptotic representations for solutions of second-order differential equations that have right-hand sides containing nonlinearities in a form more general than Emden – Fowler type nonlinearities.

Встановлено асимптотичні зображення для розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями більш загального вигляду, ніж нелінійності типу Емдена – Фаулера.

1. Формулировка основных результатов. Будем рассматривать дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\},\ i = 1, \ldots, m, p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[,\ i = 1, \ldots, m, -\infty < a < \omega \leq \leq +\infty,$ — непрерывно дифференцируемые функции (при $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$), $r_i : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \longrightarrow]0, +\infty[,\ k = 0, 1;\ i = 1, \ldots, m,$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо} \quad [y_k^0, Y_k[, \\ \\ \text{либо} \quad]Y_k, y_k^0], \end{cases} \quad y_k^0 \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad \pm\infty^1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \tag{1.3}$$

причем φ_{ik} таковы, что при каждом $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0, \quad 0 \leq \varphi_{ik}^0 \leq +\infty, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

и если $\varphi_{ik}(z) \not\equiv \text{const}$ на промежутке Δ_k, то

$$\varphi'_{ik}(z) \neq 0 \ \text{ при } z \in \Delta_k, \ \ \lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \text{const}, \ \ \limsup_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \left| \frac{z\varphi''_{ik}(z)}{\varphi'_{ik}(z)} \right| < +\infty. \tag{1.5}$$

[1] При $Y_k = +\infty$ ($Y_k = -\infty$) считаем, что $y_k^0 > 0$ ($y_k^0 < 0$).

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение 1.1. *Решение* y *уравнения (1.1), определенное на промежутке* $[t_0, \omega[\subset \subset [a, \omega[$, *назовем* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$*-решением, где* $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, *если оно удовлетворяет следующим условиям*:

$$y^{(k)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_k, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k, \quad k = 0, 1, \tag{1.6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0 \quad \textit{и при} \quad \mu_0 = +\infty \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2} = 1. \tag{1.7}$$

В работах [1–3] для частного случая, когда все функции $\varphi_{i1}(z)$ тождественно равны 1 на промежутке Δ_1, для каждого из возможных значений μ_0 были указаны признаки, при которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решении y правая часть уравнения (1.1) при $t \uparrow \omega$ асимптотически эквивалентна одному слагаемому $\alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}(y(t)),\ i \in \{1, \ldots, m\}$. Это позволило с использованием идей, заложенных в работах [4–7], установить условия существования и асимптотику при $t \uparrow \omega$ таких решений. Нашей целью является получение аналогичных результатов в случаях, когда не все $\varphi_{i1}(z)$ тождественно равны 1 на Δ_1. При этом мы ограничимся лишь выделением и исследованием случаев, когда на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$- решении правая часть уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ слагаемому, которое принадлежит одному из четырех возможных типов.

Положим $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ и введем следующие четыре множества:

$$M_1 = \left\{ i \in M \ : \ \varphi_{ik}^0 = \text{const} \neq 0, \ k = 1, 2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ i \in M \setminus M_1 \ : \ \varphi_{i1}^0 = \text{const} \neq 0 \right\},$$

$$M_3 = \left\{ i \in M \setminus M_1 \ : \ \varphi_{i0}^0 = \text{const} \neq 0 \right\}, \quad M_4 = M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3).$$

Кроме того, предположив, что $M_1 \neq \varnothing$, введем для каждого $i \in M_1$ вспомогательные функции

$$I_{i0}(t) = \int\limits_{A_{i0}}^{t} I_{i1}(s)\, ds, \quad I_{i1}(t) = \int\limits_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\, ds,$$

где

$$A_{i1} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_a^\omega p_i(s)\, ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_a^\omega p_i(s)\, ds < +\infty, \end{cases} \qquad A_{i0} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_a^\omega |I_{i1}(s)|\, ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_a^\omega |I_{i1}(s)|\, ds < +\infty. \end{cases}$$

Для уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть* $|\mu_0| < +\infty$, $M_1 \neq \varnothing$ *и для некоторого* $i \in M_1$ *выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)}{p_i(t)} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in M_1,\ j \neq i, \tag{1.8}$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < \xi_{ij}^0 \quad \textit{при} \quad j \in M \setminus M_1, \tag{1.9}$$

где

$$\xi_{ij}^0 = \begin{cases} -(1+\mu_0)\sigma_{j0} \operatorname{sign} \pi_\omega(t), & \textit{если} \quad j \in M_2, \\ -\mu_0\sigma_{j1} \operatorname{sign} \pi_\omega(t), & \textit{если} \quad j \in M_3, \\ -[(1+\mu_0)\sigma_{j0} + \mu_0\sigma_{j1}] \operatorname{sign} \pi_\omega(t), & \textit{если} \quad j \in M_4. \end{cases}$$

Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$*-решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} = \mu_0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \alpha_i I_{ik}(t) = Y_k, \quad \alpha_i y_k^0 I_{ik}(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \qquad k = 0, 1. \tag{1.11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y^{(k)}(t) = \alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 I_{ik}(t)[1 + o(1)], \quad k = 0, 1, \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.12}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $M_1 \neq \varnothing$ *и для некоторого* $i \in M_1$ *наряду с (1.8) выполняются условия*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < +\infty \quad \textit{при} \quad j \in M \setminus M_1, \tag{1.13}$$

$$\sigma_{jk-2} \operatorname{sign} \pi_\omega(t) < 0 \textit{ при } j \in M_k,\ k = 2, 3,\ (\sigma_{j0} + \sigma_{j1}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) < 0 \textit{ при } j \in M_4. \tag{1.14}$$

Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$*-решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} = +\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_{i0}''(t) I_{i0}(t)}{[I_{i0}'(t)]^2} = 1 \tag{1.15}$$

и выполнялись условия (1.11), причем каждое такое решение допускает асимптотические представления вида (1.12).

Теорема 1.3. *Пусть* $M_1 \neq \varnothing$ *и для некоторого* $i \in M_1$ *наряду с (1.8) и (1.13) выполняются неравенства*

$$\sigma_{jk-2} \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0 \textit{ при } j \in M_k,\ k = 2, 3,\ (\sigma_{j0} + \sigma_{j1}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0 \textit{ при } j \in M_4. \tag{1.16}$$

Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -\infty)$-решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = -\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I''_{i0}(t) I_{i0}(t)}{[I'_{i0}(t)]^2} = 1 \tag{1.17}$$

и выполнялись условия (1.11), причем каждое такое решение допускает асимптотические представления вида (1.12).

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теорем 1.1 – 1.3 нам потребуются некоторые априорные асимптотические свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений уравнения (1.1).

Из леммы 1.1 работы [1] и леммы 2.2 работы [2] непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_0$ — $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решение уравнения (1.1), то*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 1 + \mu_0 \quad \text{при} \quad |\mu_0| < +\infty, \tag{2.1}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty \quad \text{при} \quad \mu_0 = \pm\infty. \tag{2.2}$$

Кроме того, имеют место следующие утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть $|\mu_0| < +\infty$, $M_1 \neq \varnothing$ и для некоторого $i \in M_1$ выполняются условия (1.8) и (1.9). Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решения уравнения (1.1)*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0 \quad \text{при} \quad j \in M, \quad j \neq i. \tag{2.3}$$

Лемма 2.3. *Пусть $M_1 \neq \varnothing$ и для некоторого $i \in M_1$ наряду с (1.8) и (1.13) выполняются неравенства (1.14) (неравенства (1.16)). Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ ($\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -\infty)$)-решения уравнения (1.1) имеют место предельные соотношения (2.3).*

Доказательства лемм 2.2 и 2.3 проводятся по той же схеме, что и доказательства лемм 1.3, 1.5 из работы [1] и лемм 2.3, 2.5 из работы [2]. При этом возникает необходимость исследования случаев, которые существенно отличаются от рассмотренных в указанных двух работах. Поэтому ограничимся лишь установлением предельных соотношений (2.3) при $j \in M_3$ и $j \in M_4$.

Пусть $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решение уравнения (1.1). Положим

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)} \quad \text{при} \quad j \in M_3$$

и

$$v_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)} \quad \text{при} \quad j \in M_4.$$

Тогда

$$z'_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)} \left[\frac{p'_j(t)}{p'_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p'_i(t)} + \frac{y''(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} \right]$$

и

$$v_j'(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)}\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i'(t)} + \frac{y'(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \frac{y''(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right].$$

Теперь перепишем два последних соотношения в виде

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[|\pi_\omega(t)|\left(\frac{p_j'(t)}{p_j'(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i'(t)}\right) + \frac{|\pi_\omega(t)|y''(t)}{y'(t)}\frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right]$$

и

$$v_j'(t) =$$

$$= \frac{v_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[|\pi_\omega(t)|\left(\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i'(t)}\right) + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \frac{|\pi_\omega(t)|y''(t)}{y'(t)}\frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right].$$

Здесь в силу (1.6) и второго из условий (1.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} = \sigma_{j0}, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} = \sigma_{j1}. \tag{2.4}$$

Кроме того, согласно (1.6) и лемме 2.1

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 1+\mu_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0 \quad \text{при} \quad |\mu_0| < +\infty, \\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty \quad \text{при} \quad \mu_0 = \pm\infty \quad (\text{соответственно}).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Поэтому если $|\mu_0| < +\infty$, $M_1 \neq \varnothing$ и для некоторого $i \in M_1$ выполняются условия (1.9) при $j \in M_3$ и $j \in M_4$, то существуют постоянные $z_j^0 < 0$, $v_j^0 < 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega[$ такие, что имеют место неравенства

$$z_j'(t) \le \frac{z_j^0 z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}, \quad v_j'(t) \le \frac{v_j^0 v_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[. \tag{2.6}$$

Отсюда находим

$$\ln\left|\frac{z_j(t)}{z_j(t_1)}\right| \le z_j^0\int_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \quad \text{и} \quad \ln\left|\frac{v_j(t)}{v_j(t_1)}\right| \le v_j^0\int_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Поскольку здесь выражения, стоящие справа, стремятся к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_j(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} v_j(t) = 0.$$

Из этих предельных соотношений с учетом определений множеств M_1, M_3 и M_4 вытекают условия (2.3) при $i \in M_1$ и $j \in M_3 \cup M_4$.

Если же $\mu_0 = +\infty$ ($\mu_0 = -\infty$), $M_1 \neq \varnothing$ и для некоторого $i \in M_1$ выполняются наряду с (1.13) неравенства (1.14) (соответственно (1.16)), то, переписывая полученную выше формулу для v_j' в виде

$$v_j'(t) =$$

$$= \frac{v_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[|\pi_\omega(t)|\left(\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i'(t)}\right) + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\left(\frac{y(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2}\frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right)\right],$$

и учитывая (2.4), (2.5), также приходим к выводу о существовании постоянных $z_j^0 < 0$, $v_j^0 < 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega[$ таких, что имеют место неравенства (2.6). Из этих неравенств, как было показано выше, непосредственно вытекают условия (2.3) при $i \in M_1$ и $j \in M_3 \cup M_4$.

3. Доказательства основных теорем. ***Доказательство теоремы 1.1.*** *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решение уравнения (1.1). Тогда в силу условий леммы 2.2 имеют место предельные соотношения (2.3), и поэтому из (1.1) следует

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку $i \in M_1$ и выполняются условия (1.6), это асимптотическое соотношение можно переписать в виде

$$y''(t) = \alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 p_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.1}$$

Интегрируя обе части (3.1) два раза на промежутке от t_0 до t, $t \in [t_0, \omega[$, и учитывая, что y' и y удовлетворяют условиям (1.6), получаем соотношения вида

$$y'(t) \sim \alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \int\limits_{A_{i1}}^{t} p_i(\tau)\,d\tau, \qquad y(t) \sim \alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \int\limits_{A_{i0}}^{t}\int\limits_{A_{i1}}^{\tau} p_i(s)\,ds\,d\tau \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.2}$$

Значит, имеют место асимптотические представления (1.12) и выполняются в силу (1.6) условия (1.11). Условие (1.10) непосредственно вытекает из (3.1) и первого из представлений (3.2), если учесть первое из условий (1.7) определения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решения.

Достаточность. Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$y^{(k)}(t) = \alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 I_{ik}(t)[1 + v_{k+1}(t)], \quad k = 0, 1, \tag{3.3}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{I_{i0}'(t)}{I_{i0}(t)}(v_2 - v_1), \\ v_2' &= \frac{I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}\left(-1 - v_2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j p_j(t)[1 + r_j(t)]\varphi_{j0}\left(q_{i0}(t)(1 + v_1)\right)\varphi_{j1}\left(q_{i1}(t)(1 + v_2)\right)}{\alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 p_i(t)[1 + r_i(t)]}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$q_{ik}(t) = \alpha_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 I_{ik}(t), \quad k = 0, 1.$$

Эту систему рассмотрим на множестве $\Omega = [t_0, \omega[\times D$, где

$$D = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |v_{k+1}| \leq \frac{1}{2}, \; k = 0, 1 \right\}$$

и $t_0 \in [a, \omega[$ выбрано с учетом условий (1.11) так, что $q_{ik}(t)[1 + v_{k+1}] \in \Delta_k \;\; k = 0, 1,$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $|v_{k+1}| \leq \dfrac{1}{2}$. На данном множестве правые части системы (3.4) непрерывны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменным v_1 и v_2.

Поскольку для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $k \in \{0, 1\}$

$$\frac{\partial \varphi_{jk}(q_{ik}(t)(1 + v_{k+1}))}{\partial v_{k+1}} = q_{ik}(t) \varphi'_{jk}(q_{ik}(t)(1 + v_{k+1})),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{jk}(q_{ik}(t)(1 + v_{k+1}))}{\partial v_{k+1}^2} = q_{ik}^2(t) \varphi''_{jk}(q_{ik}(t)(1 + v_{k+1})),$$

с использованием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем разложение

$$\varphi_{jk}(q_{ik}(t)(1 + v_{k+1})) = \varphi_{jk}(q_{ik}(t)) + q_{ik}(t) \varphi'_{jk}(q_{ik}(t)) v_{k+1} + q_{ik}^2(t) \varphi''_{jk}(q_{ik}(t)(1 + \xi_{kj})) v_{k+1}^2,$$

в котором $\xi_{jk} = \xi_{jk}(t, v_{k+1})$ такова, что $|\xi_{jk}(t, v_{k+1})| < |v_{k+1}| \leq \dfrac{1}{2}$ при всех $t \in [t_0, \omega[$. Заметим также, что оно принимает вид $\varphi_{jk}(q_{ik}(t)(1 + v_{k+1})) \equiv \varphi_{jk}^0$ в случае, когда $\varphi_{jk}(z) \equiv$ $\equiv \mathrm{const}$ на промежутке Δ_k.

Выделяя с учетом этих разложений линейные слагаемые в правой части второго уравнения системы (3.4), получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{I_{i0}'(t)}{I_{i0}(t)} (v_2 - v_1), \\ v_2' &= \frac{I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} \left(f(t) + c_1(t) v_1 + c_2(t) v_2 + V(t, v_1, v_2) \right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$f(t) = -1 + \frac{\varphi_{i0}(q_{i0}(t)) \varphi_{i1}(q_{i1}(t))[1 + r_i(t)]}{\varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{\alpha_j p_j(t)[1 + r_j(t)] \varphi_{j0}(q_{i0}(t)) \varphi_{j1}(q_{i1}(t))}{\alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0},$$

$$c_1(t) = q_{i0}(t) \left(\frac{\varphi'_{i0}(q_{i0}(t)) \varphi_{i1}(q_{i1}(t))[1 + r_i(t)]}{\varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{\alpha_j p_j(t)[1 + r_j(t)] \varphi'_{j0}(q_{i0}(t)) \varphi_{j1}(q_{i1}(t))}{\alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0} \right),$$

$$c_2(t) = -1 + q_{i1}(t)\left(\frac{\varphi_{i0}(q_{i0}(t))\varphi'_{i1}(q_{i1}(t))[1+r_i(t)]}{\varphi^0_{i0}\varphi^0_{i1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi_{j0}(q_{i0}(t))\varphi'_{j1}(q_{i1}(t))}{\alpha_i p_i(t)\varphi^0_{i0}\varphi^0_{i1}}\right),$$

$$V(t, v_1, v_2) = \frac{1}{\alpha_i p_i(t)\varphi^0_{i0}\varphi^0_{i1}}\left[\frac{1}{2}\, q^2_{i0}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi''_{j0}(q_{i0}(t)[1+\xi_{j0}])\varphi_{j1}(q_{i1}(t))\right) v_1^2 + \right.$$

$$+ q_{i0}(t)q_{i1}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi'_{j0}(q_{i0}(t))\varphi'_{j1}(q_{i1}(t))\right) v_1 v_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, q^2_{i1}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi_{j0}(q_{i0}(t))\varphi''_{j1}(q_{i1}(t)[1+\xi_{j1}])\right) v_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, q^2_{i0}(t)q_{i1}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi''_{j0}(q_{i0}(t)[1+\xi_{j0}])\varphi'_{j1}(q_{i1}(t))\right) v_1^2 v_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, q_{i0}(t)q^2_{i1}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi'_{j0}(q_{i0}(t))\varphi''_{j1}(q_{i1}(t)[1+\xi_{j1}])\right) v_1 v_2^2 +$$

$$\left. + \frac{1}{4}\, q^2_{i0}(t)q^2_{i1}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi''_{j0}(q_{i0}(t)[1+\xi_{j0}])\varphi''_{j1}(q_{i1}(t)[1+\xi_{j1}])\right) v_1^2 v_2^2\right].$$

Поскольку $q_{i1}(t) = q'_{i0}(t)$ и в силу (1.10), (1.11), а также выбора числа t_0

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_{ik}(t) = Y_k, \quad q_{ik} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_k, \quad k = 0, 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)q''_{i0}(t)}{q'_{i0}(t)} = \mu_0,$$

функция q_{i0} имеет те же асимптотические свойства, что и любое $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решение уравнения (1.1). Поэтому согласно лемме 2.2

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(q_{i0}(t))\varphi_{j1}(q_{i1}(t))}{p_i(t)\varphi^0_{i0}\varphi^0_{j1}} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m, \quad j \neq i. \tag{3.6}$$

Кроме того, в силу (1.5) для любых $j \in \{1, \dots, m\}$ и $k \in \{0, 1\}$ таких, что $\varphi_{jk}(z) \not\equiv \mathrm{const}$ на промежутке Δ_k, имеем
$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q_{ik}(t)\varphi'_{jk}(q_{ik}(t))}{\varphi_{jk}(q_{ik}(t))} = \sigma_{jk} \tag{3.7}$$
и
$$\left|\frac{\varphi_{jk}(q_{ik}(t)[1+\xi_{jk}])}{\varphi_{jk}(q_{ik}(t))}\right| \le L_1, \quad \left|\frac{q_{ik}(t)\varphi'_{jk}(q_{ik}(t)[1+\xi_{jk}])}{\varphi_{jk}(q_{ik}(t)[1+\xi_{jk}])}\right| \le L_2,$$
$$\left|\frac{q_{ik}(t)\varphi''_{jk}(q_{ik}(t)[1+\xi_{jk}])}{\varphi'_{jk}(q_{ik}(t)[1+\xi_{jk}])}\right| \le L_3 \quad \text{при} \quad (t, v_1, v_2) \in \Omega, \tag{3.8}$$
где $L_i,\ i = 1, 2, 3,$ — некоторые положительные постоянные. При этом заметим, что (3.7) при $j = i$ принимает вид
$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q_{ik}(t)\varphi'_{ik}(q_{ik}(t))}{\varphi_{ik}(q_{ik}(t))} = 0, \quad k = 0, 1. \tag{3.9}$$
Действительно, если бы этот предел был равен отличной от нуля постоянной σ_{ik}, то имело бы место асимптотическое представление
$$\varphi'_{ik}(q_{ik}(t)) = \frac{\sigma_{ik}\varphi^0_{ik} + o(1)}{q_{ik}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$
откуда следовало бы, что
$$\varphi_{ik}(q_{ik}(t)) = [\sigma_{ik}\varphi^0_{ik} + o(1)] \ln |q_{ik}(t)| \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$
Но это невозможно, так как здесь функция, стоящая слева, имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а справа — бесконечный.

В силу условий (1.2), (3.6) – (3.9)
$$\lim_{t \uparrow \omega} f(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_1(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_2(t) = -1$$
и
$$\lim_{|v_1|+|v_2| \to 0} \frac{V(t, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_0, \omega[.$$
Значит, для системы дифференциальных уравнений (3.5) выполнены все условия леммы 2.2 из работы [8]. Согласно этой лемме система (3.5) имеет, по крайней мере, одно решение $(v_1, v_2) : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t_1 \in [t_0, \omega[$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Этому решению вследствие замен (3.1) соответствует решение $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.12) и удовлетворяющее согласно (1.10) и (1.11) определению $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решения.

Теорема доказана.

Доказательство теорем 1.2 и 1.3 проводится точно так же, как и доказательство теоремы 1.1, с использованием вместо леммы 2.2 леммы 2.3.

4. Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим при $t \in [1,+\infty[$ дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} a_i e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{4.1}$$

в котором $a_i, \beta_i, \gamma_i, \rho_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$, $i = i, \dots, m$, функции $r_i : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,m$, непрерывны и таковы, что $\lim\limits_{t\to+\infty} r_i(t) = 0$, $i = 1,\dots,m$, а функции $\varphi_{ik} : \Delta_k \longrightarrow]0,+\infty[$, $i = 1,\dots,m$; $k = 0,1$, дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям (1.4), (1.5), где Δ_k определены в (1.3).

Таким образом, имеем уравнение вида (1.1), в котором

$$\alpha_i = \operatorname{sign} a_i, \quad p_i(t) = |a_i| e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t, \quad i = 1,\dots,m, \ \omega = +\infty.$$

Поэтому $\pi_\omega(t) = t$ и для каждого $i \in \{1,\dots,m\}$ при $t \to +\infty$ имеют место асимптотические соотношения

$$\frac{\pi_\omega(t)p_i'(t)}{p_i(t)} = \begin{cases} \beta_i t[1+o(1)], & \text{если} \quad \beta_i \neq 0, \\ \gamma_i + o(1), & \text{если} \quad \beta_i = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$I_{i1}(t) = \int\limits_{A_{i1}}^{t} p_i(\tau)\,d\tau \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i|}{\beta_i} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t, & \text{если} \quad \beta_i \neq 0, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\gamma_i} t^{1+\gamma_i} \ln^{\rho_i} t, & \text{если} \quad \beta_i = 0, \gamma_i \neq -1, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\rho_i} \ln^{1+\rho_i} t, & \text{если} \quad \beta_i = 0, \quad \gamma_i = -1, \quad \rho_i \neq -1, \\ |a_i| \ln\ln t, & \text{если} \quad \beta_i = 0, \quad \gamma_i = -1, \quad \rho_i = -1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Предположив, что $M_1 \neq \varnothing$, для каждого $i \in M_1$ в случае, когда $|\mu_0| < +\infty$, введем условия

$S_1(i,\mu_0)$: $\beta_j < \beta_i$ при $j \in M \setminus \{i\}$,

$S_2(i,\mu_0)$: $\beta_j < \beta_i$ при $j \in M_1$, $\beta_j = \beta_i$ и $\gamma_j - \gamma_i < \xi_{ij}^0$ при $j \in M \setminus M_1$,

$S_3(i,\mu_0)$: $\beta_j = \beta_i$, $\gamma_j < \gamma_i$ при $j \in M_1$, $\gamma_j - \gamma_i < \xi_{ij}^0$ при $j \in M \setminus M_1$,

$S_4(i,\mu_0)$: $\beta_j = \beta_i$, $\gamma_j = \gamma_i$, $\rho_j < \rho_i$ при $j \in M_1$, $\xi_{ij}^0 > 0$ при $j \in M \setminus M_1$,

где

$$\xi_{ij}^0 = \begin{cases} -(1+\mu_0)\sigma_{j0}, & \text{если} \quad j \in M_2, \\ -\mu_0\sigma_{j1}, & \text{если} \quad j \in M_3, \\ -[(1+\mu_0)\sigma_{j0} + \mu_0\sigma_{j1}], & \text{если} \quad j \in M_4, \end{cases}$$

а в случае $\mu_0 = \pm\infty$ — условия

$S_1(i,\pm\infty)$: $\beta_j < \beta_i$ при $j \in M \setminus \{i\}$,

$S_2(i,+\infty)$: $\beta_j < \beta_i$ при $j \in M_1$, $\beta_j = \beta_i$ и $\xi_{ij}^1 < 0$ при $j \in M \setminus M_1$,

$S_2(i,-\infty)$: $\beta_j < \beta_i$ при $j \in M_1$, $\beta_j = \beta_i$ и $\xi_{ij}^1 > 0$, где

$$\xi_{ij}^1 = \begin{cases} \sigma_{jk-2}, & \text{если} \quad j \in M_k, \ k = 2, 3, \\ \sigma_{j0} + \sigma_{j1}, & \text{если} \quad j \in M_4. \end{cases}$$

В силу (4.2) и (4.3) из теорем 1.1 – 1.3 непосредственно вытекают следующие утверждения для уравнения (4.1).

Следствие 4.1. *Пусть* $|\mu_0| < +\infty$, $M_1 \neq \varnothing$ *и для некоторого* $i \in M_1$ *выполняется условие* $S_k(i, \mu_0)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Тогда для существования* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$*-решений уравнения (4.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\beta_i = 0 \quad \textit{и} \quad 1 + \gamma_i = \mu_0.$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \to +\infty$ *асимптотические представления вида*

$$y(t) \sim \frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{(1 + \gamma_i)(2 + \gamma_i)} t^{2 + \gamma_i} \ln^{\rho_i} t, \quad y'(t) \sim \frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{1 + \gamma_i} t^{1 + \gamma_i} \ln^{\rho_i} t, \quad \textit{если} \quad \gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\},$$

$$y(t) \sim \frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{(1 + \rho_i)} t \ln^{1 + \rho_i} t, \quad y'(t) \sim \frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{1 + \rho_i} \ln^{1 + \rho_i} t, \quad \textit{если} \quad \gamma_i = -1, \quad \rho_i \neq -1,$$

$$y(t) \sim a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \, t \ln \ln t, \quad y'(t) \sim a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \ln \ln t, \quad \textit{если} \quad \gamma_i = -1, \quad \rho_i = -1,$$

$$y(t) \sim -\frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{1 + \rho_i} \ln^{1 + \rho_i} t, \quad y'(t) \sim -a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \frac{\ln^{\rho_i} t}{t}, \quad \textit{если} \quad \gamma_i = -2, \quad \rho_i \neq -1,$$

$$y(t) \sim -a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \ln \ln t, \quad y'(t) \sim -a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0 \frac{1}{t \ln t}, \quad \textit{если} \quad \gamma_i = -2, \quad \rho_i = -1.$$

Следствие 4.2. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$, $M_1 \neq \varnothing$ *и для некоторого* $i \in M_1$ *выполняется одно из условий* $S_1(i, \pm\infty)$ *или* $S_2(i, \pm\infty)$. *Тогда для существования* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений уравнения (4.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\beta_i > 0, \quad \textit{если} \quad \mu_0 = +\infty, \quad \beta_i < 0, \quad \textit{если} \quad \mu_0 = -\infty.$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y(t) \sim \frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{\beta_i^2} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t, \qquad y'(t) \sim \frac{a_i \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}^0}{\beta_i} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t.$$

5. Выводы. В настоящей статье рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (1.1), правая часть которого содержит нелинейности четырех различных типов, определяемых множествами M_i, $i = 1, 2, 3, 4$. При выделении достаточно широкого класса так называемых $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений получены условия, при выполнении которых на любом таком решении (в случае его существования) главным в правой части является слагаемое, относящееся к множеству M_1. При их выполнении установлены необходимые и достаточные условия существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений уравнения (1.1), а также получены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных первого порядка. Результаты исследования проиллюстрированы при $\omega = +\infty$ на примере уравнения с коэффициентами вида $p_i(t) = a_i e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t,\ i = 1, \ldots, m$. Установленные в данной работе теоремы существенно дополняют результаты работ [1–7].

1. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. — 2005. — **5**, № 3. — С. 338–355.
2. *Касьянова В. А.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 5–19.
3. *Касьянова В. А.* Асимптотичне поводження зникаючих розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку // Там же. — 2005. — Вип. 228. — С. 5–19.
4. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations of solutions of non-linear second order differential equations // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. — 2003. — **30**. — P. 153–158.
5. *Кирилова Л. О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена–Фаулера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 30–35.
6. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 8. — С. 1053–1061.
7. *Kirillova L. A.* On asymptotics of solutions of nonlinear differential equations of the second order // Nonlinear Oscillations. — 2005. — **8**, № 1. — P. 14–25.
8. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* О решениях со степенной асимптотикой дифференциальных уравнений с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 3. — С. 306–325.

Получено 16.05.2006