УДК 517.9

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ АВТОНОМНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We find an estimate for the region for values of a small parameter where the convergence of an iteration procedure for constructing solutions of an autonomous Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case is preserved.

Знайдено оцінку області значень малого параметра, для яких зберігається збіжність ітераційної процедури для побудови розв'язків автономної нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку.

1. Постановка задачи. Найдем оценку ε_* длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры для построения решения

$$z(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\Big(z^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t,\varepsilon)\Big), \quad z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию [1]

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t) = \operatorname{col}\Big(z_0^{(1)}(t), \ldots, z_0^{(n)}(t)\Big), \quad z_0^{(i)}(\cdot) \in C^1[a, b^*], \quad b^* = b(0),$$

порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Здесь A — постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, f — постоянный вектор-столбец, $Z(z,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, дважды непрерывно дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot, \varepsilon)$, $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b(\varepsilon)] \to R^m$, причем второй функционал дважды непрерывно дифференцируем по неизвестной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Для оценки величины ε^* ранее был использован метод мажорирующих уравнений Ляпунова [2 – 4], основной трудностью которого было нахождение этих уравнений. В статье [5] для оценки длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$ в случае неавтономной краевой задачи были предложены конструктивные формулы, полученные при условии, что оператор, используемый при построении искомого решения исходной задачи, является сжимающим. В данной статье получены аналогичные формулы для оценки величины ε^* в случае автономной краевой задачи в критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$). Предположим, что выполнено условие $P_{Q_d^*} \{\alpha - \ell K [f] (\cdot)\} = 0$; при этом порождающая задача (3) имеет r-параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + G\Big[f; \alpha\Big](t), \quad c_r \in R^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1 \leq \min(m, n)$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (3), $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из $d = m - n_1$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, $G[f; \alpha](t) = X(t) Q^+ \{\alpha - \ell K [f] (\cdot)\} + K [f] (t)$ — обобщенный оператор Грина задачи (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1], $K[f](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f \, ds$ — оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3), I_n — единичная $(n \times n)$-матрица.

Задача (1), (2) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач. В отличие от последних правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), (2), неизвестен и подлежит определению в процессе построения самого решения. Будем искать его в виде $b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon (b^* - a) \beta(\varepsilon)$. Функция $\beta(\varepsilon)$ непрерывна на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, положим $\beta(0) = \beta^*$. Выполняя в задаче (1), (2) замену независимой переменной [6]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)), \tag{4}$$

получаем задачу об отыскании решения

$$z(\tau, \varepsilon) = \operatorname{col}\Big(z^{(1)}(\tau, \varepsilon), \ldots, z^{(n)}(\tau, \varepsilon)\Big), \quad z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b^*],$$

$$z^{(i)}(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{d\tau} = Az + f + \varepsilon \{\beta(\varepsilon) A (z(\tau, \varepsilon) + f) + (1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)) Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\}, \tag{5}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

Решение задачи $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon)$ (5), (6) ищем в окрестности решения $z_0(\tau,c_r)$ порождающей задачи (3). Для нахождения возмущения $x(\tau,\varepsilon)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + \varepsilon\left\{\beta(\varepsilon)\left(A(z_0+x)+f\right) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\,Z(z_0+x,\varepsilon)\right\}, \tag{7}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{8}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (7), (8) имеет вид

$$P_{Q_d^*}\big\{J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\ell K\left[\beta(\varepsilon)\left(A(z_0+x)+f\right)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\,Z(z_0+x,\varepsilon)\right](\cdot)\big\} = 0. \tag{9}$$

Обозначая $f_0(s,c^*) = \beta^*\left(Az_0(s,c_r^*)+f\right) + Z(z_0(s,c_r^*),0)$, как и в [6], приходим к необходимому условию разрешимости задачи (7), (8).

Теорема 1. *Если краевая задача (1), (2) в критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) имеет решение*

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,z^{(n)}(t,\varepsilon)\right),\quad z^{(i)}(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\quad i=1,2,\ldots,n,$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$, то вектор $c^* = \mathrm{col}\,(c_r^*,\beta^*) \in \in R^{r+1}$ удовлетворяет уравнению

$$F_0(c^*) = P_{Q_d^*}\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) - \ell K\left[f_0(s,c^*)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{10}$$

Первые r компонент $c_r^* \in R^r$ корня $c^* \in R^{r+1}$ уравнения (10) определяют амплитуду порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$, в малой окрестности которого может существовать искомое решение исходной задачи (1), (2). Кроме того, из уравнения (10) можно найти величину $\beta^* \in R^1$, определяющую первое приближение $b_1(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^*-a)\beta^*$ к длине отрезка $b(\varepsilon)$, на котором определено искомое решение. Если же уравнение (10) не имеет действительных корней, то исходная задача (1), (2) не имеет искомых решений. Далее уравнение (10) будем называть уравнением для порождающих амплитуд краевой задачи (1), (2).

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (10) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c^* \in R^{r+1}$ уравнения (10), приходим к задаче об отыскании решения $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)$ задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c_r^*) = X_r(\tau)c_r^* + G\left[f;\alpha\right](\tau)$. Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(\tau,c_r^*),0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + R_1(z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$A_1(\tau) = \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Остаток $R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ при условии $Z'_\varepsilon(z_0(\tau,c_r^*),0) \equiv 0$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первых два члена разложения, поэтому $R_1(z_0(\tau,c_r^*),0) \equiv \equiv 0$, $R_1' z(z_0(\tau,c_r^*),\varepsilon) \equiv 0$. Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейную $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ часть этого функционала и член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0) = J(z(\cdot,0),0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{11}$$

Остаток $J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ при условии $J'_\varepsilon(z_0(\cdot,c_r^*),0) = 0$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x = = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первых два члена разложения, поэтому $J_1(z(\cdot,c_r^*),0) = 0$, $J'_{1z}(z(\cdot,c_r^*),0) = = 0$. Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках в условии (9):

$$\begin{aligned}\beta(\varepsilon)\,(A(z_0+x)+f) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\,Z(z_0+x,\varepsilon) = f_0(s,c^*)+\\ + (\beta^* A + A_1(s))\,x(s,\varepsilon) + \bar\beta\,(A(z_0(s,c_r^*+f)+\\ + \bar\beta A x(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon).\end{aligned}$$

Здесь $\bar\beta(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ — неизвестная непрерывная скалярная функция,

$$\begin{aligned}r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) = \bar\beta A x(s,\varepsilon) + \varepsilon\beta Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)+\\ + R_1(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\end{aligned}$$

— n-мерный вектор-столбец. Решение задачи (5), (6) представимо в виде

$$x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

где

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\left[\begin{matrix}Z(z_0(s,c_r^*),0) + A_1(s)x(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);\\ \\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\end{matrix}\right](\tau).$$

Неизвестная $c_r = c_r(\varepsilon) \in R^r$ — непрерывная в малой положительной окрестности нуля вектор-функция малого параметра. Обозначая $\Big(d \times (r+1)\Big)$-матрицу через

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{\ell_1 X_r(\cdot) I_1 - \ell K\left[\bar A_1(s)\right](\cdot)\right\},$$

приходим к операторной системе, равносильной задаче о нахождении решений системы (7), удовлетворяющих краевому условию (8):

$$x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)I_1c(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$B_0\cdot c(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\left[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\Big\}, \tag{12}$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s,c^*) + \bar{A}_1(s)c(\varepsilon) +$$

$$+\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\tau).$$

Здесь $I_1 = \operatorname{col}(I_r, 0)$ — постоянная $(r\times(r+1))$-мерная матрица,

$$\bar{A}_1(s) = \Big\{\Big[\beta^* A + A_1(s)\Big]X_r(s);\ Az_0(s,c_r^*) + f\Big\}$$

— $(n\times(r+1))$-мерная матрица. При условии $P_{B_0^*} = 0$ общее решение второго уравнения операторной системы (12) имеет вид

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\left[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\Big\} + P_{B_0}\bar{c},$$

где $\bar{c} \in R^{r+1}$— произвольный вектор. Пусть $\operatorname{rank} P_{B_0} = \rho$; здесь $P_{B_0} : R^{r+1} \to N(B_0)$ — $((r+1)\times(r+1))$-матрица-ортопроектор, $P_{B_0^*}$ — $((r+1)\times(r+1))$-мерная матрица-ортопроектор: $R^(r+1) \to N(B_0^*)$. Обозначим через $P_\rho((r+1)\times\rho)$ матрицу, составленную из ρ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_{B_0}; при этом вектор-функция

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\left[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho$$

зависит от произвольного вектора

$$c_\rho = \operatorname{col}\left(c_\rho^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_\rho^{(\rho)}(\varepsilon)\right), \quad c_\rho^{(i)}(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0^*], \quad c_\rho^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Таким образом, при условии $P_{B_0^*} = 0$ общее решение краевой задачи (7), (8) определяет операторная система

$$x(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K\left[\left(\beta^* A + A_1(s)\right) x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho, \qquad (13)$$

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s, c^*) + \bar{A}_1(s) c(\varepsilon) +$$

$$+ \left(\beta^* A + A_1(s)\right) x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon);$$

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big](\tau),$$

для любого $c_\rho \in R^\rho$ эквивалентная задаче о построении решения системы уравнений (7), удовлетворяющих краевому условию (8).

Операторная система (13) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [1–3]. Оценим длину отрезка $[0, \varepsilon^*], \varepsilon^* \le \varepsilon_0$, на котором применим этот метод. Система (13) эквивалентна задаче о построении решения уравнения $x(\tau, \varepsilon) = \Phi x(\tau, \varepsilon)$ на множестве функций $x(\tau, \varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$. Здесь

$$\Phi x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](\tau) -$$

$$- X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon \ell_1 G\left[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot) +$$

$$+ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K\Big[\varepsilon\left(\beta^* A + A_1(s)\right) G\left[Z(z_0(\nu, c_r^*) + x(\nu, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](s) +$$

$$+ r(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} - X_r(\tau) P_\rho c_\rho.$$

Непрерывный ограниченный оператор $\Phi x(\tau,\varepsilon)$ представляет собой суперпозицию билинейного [5] по $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, действующего на непрерывно дифференцируемые по z функцию $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ и нелинейный функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Оператор $\Phi x(\tau,\varepsilon)$ действует из пространства непрерывных на отрезках $[a;b^*]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций в это же пространство. С учетом билинейности оператора $\Phi x(\tau,\varepsilon)$ представим его в виде

$$\Phi x(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{7}\Phi_i x(\tau,\varepsilon) - X_r(\tau)P_\rho c_\rho,$$

где

$$\Phi_1 x(\tau,\varepsilon) = -G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\tau),$$

$$\Phi_2 x(\tau,\varepsilon) = -\varepsilon X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell_1 G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot),$$

$$\Phi_3 x(\tau,\varepsilon) = -X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\Phi_4 x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Bigg\{\Bigg(\beta^*A+A_1(s)\Bigg)G\Bigg[Z(z_0(\nu,c_r^*)+x(\nu,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](s)\Bigg\}(\cdot),$$

$$\Phi_5 x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Bigg\{\bar\beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon)\Bigg\}(\cdot),$$

$$\Phi_6 x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Bigg\{R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}(\cdot),$$

$$\Phi_7 x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Bigg\{\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}(\cdot).$$

Пусть $x(\tau,\varepsilon)$, $y(\tau,\varepsilon)$ — вектор-функции из малой окрестности нуля, причем

$$x(\tau,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(x^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ldots,x^{(n)}(\tau,\varepsilon)\Big),\quad y(\tau,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(y^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ldots,y^{(n)}(\tau,\varepsilon)\Big),$$

$$x^{(i)}(\cdot,\varepsilon), y^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b^*],\quad x^{(i)}(\tau,\cdot), y^{(i)}(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Норму функции $\varphi(t) = \mathrm{col}(\varphi^{(1)}(t),\ldots,\varphi^{(n)}(t))$, $\varphi_i(\cdot) \in C[a,b]$, $i=1,2,\ldots,n$, полагаем равной [7, с. 123] $\|\varphi(t)\| = \max\limits_{1\le i\le n}\|\varphi^{(i)}(t)\|$, $\|\varphi^{(i)}(t)\| = \max\limits_{a\le t\le b}|\varphi^{(i)}(t)|$. Нормой $(m\times n)$-матрицы $A(t) = a_{ij}(t)$, $a_{ij}(\cdot)\in C[a,b]$, будем называть число

$$\|A(t)\| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}(t)\|.$$

В силу теоремы Рисса векторный функционал $\ell x(\cdot) = \mathrm{col}\,\big(\ell^{(1)}x(\cdot), \ldots, \ell^{(m)}x(\cdot)\big)$, определенный на пространстве непрерывных вектор-функций, представим в виде интеграла Римана – Стильтьеса $\ell x(\cdot) = \int_a^b d\Omega(t)x(t)$, где $\Omega(t)$ — $(m \times n)$-матрица, элементы которой — функции ограниченной на $[a, b]$ вариации; при этом $\|\ell x(\cdot)\| = \|\Omega(t)\|$. Пусть $\xi_1(\tau, \varepsilon)$, $\zeta_1(t, \varepsilon)$ — некоторые точки отрезка, соединяющего точки $z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon)$ и $z_0(\tau, c_r^*) + y(\tau, \varepsilon)$. Обозначая

$$\sigma_1 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\| \le \rho,\\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\xi_1(\tau,\varepsilon)} \right\|,$$

$$\sigma_2 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\| \le \rho,\\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\zeta_1(t,\varepsilon)} \right\|,$$

$$q = \|X(t)Q^+\|, \quad \lambda = \|\ell K[*](\cdot)\|, \quad \mu = \|K[*](\tau)\|,$$

получаем оценку нормы разности

$$\Big\|\Phi_1 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_1 y(\tau, \varepsilon)\Big\| \le \varepsilon \Big[q\Big(\sigma_1 + \lambda\sigma_2\Big) + \mu\Big] \|x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon)\|.$$

Аналогично

$$\Big\|\Phi_2 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_2 y(\tau, \varepsilon)\Big\| \le \varepsilon q_1 \Big(\lambda_1\sigma_2 + \lambda\lambda_1\sigma_2 + \lambda_2\sigma_1\Big) \|x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon)\|,$$

где

$$q_1 = \|A\|, \quad q_2 = \Big\|X_r(\tau)I_1 B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\|, \quad \lambda_1 = \Big\|\ell_1 X(\cdot)Q^+\Big\|,$$

$$\lambda_2 = \Big\|\ell_1 K\Big[\,*\,\Big](\cdot)\Big\|, \quad \lambda_3 = \Big\|\ell_1 K\Big[A_1(s)\,*\Big](\cdot)\Big\|.$$

Согласно теореме о среднем

$$\|J_1(z_0 + x, \varepsilon) - J_1(z_0 + y, \varepsilon)\| = \left\| \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon)} (x - y) \right\|.$$

Функционал $J'_{1_z}(\zeta_2(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ представляет собой производную (в смысле Фреше) функционала $J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ в некоторой точке $\zeta_2(\tau, \varepsilon)$ отрезка, соединяющего точки $z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon)$ и $z_0(\tau, c_r^*) + y(\tau, \varepsilon)$. При условии $\|x\|, \|y\| \le \rho$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ функционал $J'_{1_z}(\zeta_2(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ представляет собой бесконечно малую величину, следовательно, по теореме о среднем, в некоторой точке ε_1 отрезка $[0, \varepsilon_0]$ имеет место представление

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon)} (x - y) = \frac{\partial^2 J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z\, \partial \varepsilon}\Big|_{\substack{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_1}} \varepsilon(x - y).$$

Таким образом, $\|J_1(z_0+x,\varepsilon)-J_1(z_0+y,\varepsilon)\| \le \sigma_3\varepsilon\|x-y\|$, где

$$\sigma_3 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho,\\ \varepsilon_1\in[0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial^2 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\,\partial\varepsilon}\Big|_{\substack{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_1}} \right\|,$$

следовательно,

$$\left\|\Phi_3 x(\tau,\varepsilon)-\Phi_3 y(\tau,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon q_2\sigma_3\|x-y\|.$$

Оценим разность

$$\left\|\Phi_4 x(\tau,\varepsilon)-\Phi_4 y(\tau,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon q_2\lambda_4\Big[q(\lambda\sigma_1+\sigma_2)+\mu\sigma_1\Big]\|x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Здесь

$$\lambda_4 = \left\|\ell K\left[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)\ *\ \right](\cdot)\right\|.$$

Представим неизвестную $\beta(\varepsilon)$ в виде суммы $\beta(\varepsilon)=\beta^*+\varepsilon\beta^{**}+\varepsilon\omega(\varepsilon,x)$. Согласно принятым обозначениям $\bar\beta(\varepsilon)=\varepsilon\left(\beta^{**}+\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right)$. Здесь $\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ — малый остаток при условиях $\|x\|\le\rho$, а также $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. В этом случае существует число ρ_1, для которого имеет место неравенство $\varepsilon\left(\beta^{**}-\rho_1\right)\le\bar\beta(\varepsilon)\le\varepsilon\left(\beta^{**}+\rho_1\right)$. Пусть

$$\rho_2 = \max\left\{|\beta^{**}+\rho_1|,\ |\beta^{**}-\rho_1|\right\}.$$

В этом случае $\|\bar\beta(\varepsilon)\| = |\bar\beta(\varepsilon)| \le \varepsilon\rho_2$. Таким образом,

$$\|\Phi_5 x(\tau,\varepsilon)-\Phi_5 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1 q_2\lambda\rho_2\|x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Согласно теореме о среднем

$$\|R_1(z_0+x,\varepsilon)-R_1(z_0+y,\varepsilon)|| = \left\|\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\xi_2(\tau,\varepsilon)}\ (x-y)\right\|.$$

Производная $R'_{1_z}(\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ представляет собой производную вектор-функции $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в некоторой точке $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ отрезка, соединяющего точки $z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon)$ и $z_0(\tau,c_r^*)+y(\tau,\varepsilon)$. При условии $\|x\|,\|y\|\le\rho$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ эта производная бесконечно мала, следовательно, по теореме о среднем, в некоторой точке ε_2 отрезка $[0,\varepsilon_0]$ имеет место представление

$$\|R_1(z_0+x,\varepsilon)-R_1(z_0+y,\varepsilon)\| = \left\|\frac{\partial^2 R_1(z,\varepsilon)}{\partial z\,\partial\varepsilon}\Big|_{\substack{z=\xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_2}}\ \varepsilon(x-y)\right\|.$$

Таким образом,

$$\|\Phi_6 x(\tau,\varepsilon)-\Phi_6 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_2\lambda\sigma_4\|x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Здесь

$$\sigma_4 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}} \left\| \left. \frac{\partial^2 R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\,\partial\varepsilon} \right|_{\substack{z=\xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_2}} \right\|.$$

Аналогично

$$\|\Phi_7 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_7 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_2 \lambda \rho_3 \sigma_1 \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Итак, получаем оценку $\varepsilon_* \le \varepsilon^*$, где

$$\frac{1}{\varepsilon_*} = q(\sigma_1 + \lambda\sigma_2) + \mu + q_1\left[\lambda(\sigma_2 + \lambda_1\sigma_2 + q_1\rho_2) + \lambda_2\sigma_1\right] +$$

$$+ q_2\left\{\sigma_3 + \lambda_4[q(\sigma_2 + \lambda\sigma_1) + \mu\sigma_1] + \lambda(\sigma_4 + q_2\rho_3\sigma_1)\right\}.$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для каждого простого* ($P_{B_0^*} = 0$) *корня* $c^* = \operatorname{col}(c_r^*, \beta^*)$ *уравнения* $F(c^*) = 0$ *для порождающих амплитуд задача (1), (2) имеет ρ-параметрическое решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(\tau,0) = z_0(\tau, c_r^*)$. *Это решение можно определить с помощью сходящегося при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *итерационного процесса*

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s,c^*); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](\tau),$$

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho,$$

. . . .

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon), \tag{14}$$

$$x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\bar{A}_1(s) c_k + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_k^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x_k^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\ell_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\tau),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad c_\rho = c_\rho(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(c_\rho^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_\rho^{(\rho)}(\varepsilon)\right),$$

$$c_\rho^{(j)}(\cdot) \in C^1[0, \varepsilon^*], \quad c_\rho(0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho.$$

С учетом замены независимой переменной (4) задача (1), (2) имеет ρ-параметрическое решение, которое можно найти с помощью итерационного процесса (14) по формуле $z_k(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x_k(\tau, \varepsilon)$. Величина $\beta_k(\varepsilon)$ представляет собой последнюю компоненту вектора $c_k(\varepsilon)$.

2. Автономные периодические задачи. Исследуем задачу о нахождении решения $z(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t, \varepsilon)\right)$,

$$z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, T_1(\varepsilon)], \quad T_1(0) = T, \quad z^{(i)}(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Az + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \tag{15}$$

удовлетворяющих периодическому краевому условию

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = z(0, \varepsilon) - z(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{16}$$

Решение задачи (15), (16) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = Az_0, \quad \ell z_0(\cdot) = z(0, \varepsilon) - z(T, \varepsilon). \tag{17}$$

Представим период искомого решения $T_1(\varepsilon) = T(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. Величина $\beta(\varepsilon)$, $\beta(0) = \beta^*$ подлежит определению в процессе нахождения решения задачи (15), (16). Замена независимой переменной (4) в случае периодической задачи принимает вид $t = \tau(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$. Существенным отличием автономной задачи (15), (16) от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое решение $z(t, \varepsilon)$ задачи (15), (16) существует наряду с серией решений $z(t + h, \varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет [8] зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы последняя компонента вектора $c_r \in R^r$ в представлении решения порождающей задачи (17) была нулевой; таким образом, без потери общности решение $z_0(t, c_{r-1}) = X_{r-1}(t)c_{r-1}$, $c_{r-1} \in R^{r-1}$ порождающей задачи (17) определяется $(n \times (r-1))$-мерной матрицей $X_{r-1}(t)$, аналогичной матрице $X_r(t)$, и зависит от $r-1$ компоненты постоянного вектора $c_{r-1} \in R^{r-1}$. Обозначая $f_1(s, c_r^*) = \beta^* A z_0(s, c_{r-1}^*) + Z(z_0(s, c_{r-1}^*), 0)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть краевая задача (15), (16) представляет критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и имеет решение*

$$z(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t, \varepsilon)\right),$$

$$z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, T_1(\varepsilon)], \quad z^{(i)}(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c^*_{r-1})$. *Тогда вектор* $c^*_r = \mathrm{col}\,(c^*_{r-1}, \beta^*) \in R^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$F_0(c^*_r) = P_{Q^*_r}\left\{\ell K\left[f_1(s, c^*_r)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{18}$$

Решение $z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau, \varepsilon)$ задачи (15), (16) ищем в окрестности решения $z_0(t, c^*_{r-1})$ порождающей задачи (17). С учетом замены независимой переменной для нахождения возмущения $x(\tau, \varepsilon)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + \varepsilon\left\{\beta(\varepsilon)A\left(z_0 + x\right) + \left(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\right)Z(z_0 + x, \varepsilon)\right\}, \tag{19}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = x(0, \varepsilon) - x(T, \varepsilon) = 0. \tag{20}$$

В случае невырожденности $(r \times r)$-матрицы $B_0 = P_{Q^*_r}\left\{\ell K\left[\bar{A}_2(s)\right](\cdot)\right\}$ приходим к операторной системе, равносильной задаче о нахождении решений системы (19), удовлетворяющих условию периодичности (20):

$$x(\tau, \varepsilon) = X_{r-1}(\tau)I_1 c_r + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

$$c_r(\varepsilon) = -B_0^{-1}P_{Q^*_r}\left\{\ell K\left[\left(\beta^* A + A_1(s)\right)x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x(s, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\}, \tag{21}$$

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[f_1(s, c^*_r) + \bar{A}_2(s)c_r + \left(\beta^* A + A_1(s)\right)x^{(1)}(s, \varepsilon) +$$

$$+ r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x(s, \varepsilon), \varepsilon); 0\Bigg](\tau).$$

Здесь $I_1 = \mathrm{col}\,(I_r, 0)$ — постоянная $\left(r \times (r+1)\right)$-мерная матрица,

$$\bar{A}_2(s) = \left\{\left[\beta^* A + A_1(s)\right]X_{r-1}(s); AX_{r-1}(s)c^*_{r-1}\right\}$$

— $(n \times r)$-мерная матрица, $c_r(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(c_{r-1}(\varepsilon), \bar{\beta}(\varepsilon)\right)$ — r-мерная вектор-функция,

$$r(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = \bar{\beta}Ax(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\beta Z(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) +$$

$$+ R_1(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$$

— n-мерный вектор-столбец. Операторная система (21) эквивалентна задаче о построении решения операторного уравнения $x(\tau,\varepsilon) = \Phi_0 x(\tau,\varepsilon)$ на множестве функций $x(\tau,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$. Здесь

$$\Phi_0 x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);0\Bigg](\tau) -$$

$$- X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \Bigg\{\varepsilon\Bigg(\beta^* A + A_1(s)\Bigg) G\Bigg[Z(z_0(\nu,c_{r-1}^*) + x(\nu,\varepsilon),\varepsilon);0\Bigg](s) +$$

$$+ \bar\beta A x(s,\varepsilon) + \varepsilon\beta Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}(\cdot).$$

Непрерывный ограниченный оператор $\Phi_0 x(\tau,\varepsilon)$ представляет собой суперпозицию линейного по $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, действующего на непрерывно дифференцируемую по x функцию $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, и нелинейной функции $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$. Оператор $\Phi_0(Z(z_0(\tau,c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon))$ действует из пространства непрерывных на отрезках $[0;T]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций в это же пространство. Учитывая линейность оператора $\Phi x(\tau,\varepsilon)$, представляем его в виде

$$\Phi_0 x(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{5} \Phi_i x(\tau,\varepsilon),$$

где

$$\Phi_1 x(\tau,\varepsilon) = -\varepsilon X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1} P_{Q_r^*} \times$$
$$\times \ell K\left\{(\beta^* A + A_1(s))\, G\left[Z(z_0(\nu,c_{r-1}^*) + x(\nu,\varepsilon),\varepsilon);0\right](s)\right\}(\cdot),$$

$$\Phi_2 x(\tau,\varepsilon) = -X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K\left[\bar\beta(\varepsilon) A x(s,\varepsilon)\right](\cdot),$$

$$\Phi_3 x(\tau,\varepsilon) = -X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K\left[R_1(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot),$$

$$\Phi_4 x(\tau,\varepsilon) = -\varepsilon X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K\left[\beta(\varepsilon) Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot),$$

$$\Phi_5 x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);0\right](\tau).$$

Пусть $\xi(\tau,\varepsilon)$ — некоторая точка отрезка, соединяющего точки $z_0(\tau,c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon)$ и $z_0(\tau,c_{r-1}^*) + y(\tau,\varepsilon)$. Обозначая

$$\sigma_1^{(a)} = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\xi(\tau,\varepsilon)} \right\|,$$

$$q_1^{(a)} = \|X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1}\|, \quad \mu = \|G[*;0](s)\|,$$

$$\lambda_a = \|P_{Q_r^*} \ell K[(\beta^* A + A_1(s))*](\cdot)\|,$$

получаем оценку нормы разности

$$\|\Phi_1 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_1 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1^{(a)} \lambda_a \mu \sigma_1^{(a)} \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Аналогично

$$\|\Phi_2 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_2 y(\tau,\varepsilon)\| \le \|X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1}\| \, \|P_{Q_r^*} \ell K[*](\cdot)\| \times \|\bar{\beta}(\varepsilon)\| \, \|A\| \, \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Представим неизвестную $\beta(\varepsilon)$ в виде суммы $\beta(\varepsilon) = \beta^* + \varepsilon\beta^{**} + \varepsilon\omega(\varepsilon, x)$. Согласно принятым обозначениям $\bar{\beta}(\varepsilon) = \varepsilon\left(\beta^{**} + \omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right)$. Здесь $\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ — малый остаток при условии $\|x\| \le \rho$, а также $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. В этом случае существует число ρ_1, для которого имеет место неравенство $\varepsilon\left(\beta^{**} - \rho_1\right) \le \bar{\beta}(\varepsilon) \le \varepsilon\left(\beta^{**} + \rho_1\right)$. Пусть

$$\rho_2 = \max\left\{|\beta^{**} + \rho_1|, \quad |\beta^{**} - \rho_1|\right\}.$$

В этом случае $\|\bar{\beta}(\varepsilon)\| = |\bar{\beta}(\varepsilon)| \le \varepsilon\rho_2$. Таким образом,

$$\|\Phi_2 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_2 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1^{(a)} \lambda q_1 \rho_2 \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|,$$

где $\lambda = \|P_{Q_r^*} \ell K[*](\cdot)\|$. Согласно формуле конечных приращений

$$\|R_1(z_0 + x, \varepsilon) - R_1(z_0 + y, \varepsilon)\| = \left\| \left.\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=\xi_2(\tau,\varepsilon)} (x - y) \right\|.$$

Производная $R'_{1_z}(\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ представляет собой производную вектор-функции $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в некоторой точке $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ отрезка, соединяющего точки $z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon)$ и $z_0(\tau, c_{r-1}^*) + y(\tau,\varepsilon)$. При условии $\|x\|, \|y\| \le \rho$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ эта производная бесконечно мала, следовательно, в некоторой точке ε_2 отрезка $[0, \varepsilon_0]$ имеет место представление

$$\|R_1(z_0 + x, \varepsilon) - R_1(z_0 + y, \varepsilon)\| = \left\| \left.\frac{\partial^2 R_1(z,\varepsilon)}{\partial z \, \partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=\xi_2(\tau,\varepsilon) \\ \varepsilon=\varepsilon_2}} \varepsilon(x - y) \right\|.$$

Таким образом,

$$\|\Phi_3 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_3 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1^{(a)} \lambda \sigma_4 \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Аналогично

$$\|\Phi_4 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_4 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1^{(a)} \lambda \rho_3 \sigma_1^{(a)} \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|,$$

$$\|\Phi_5 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_5 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon \|G[*;0](\tau)\| \, \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|,$$

значит,

$$\|\Phi_5 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_5 y(\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon\mu \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|.$$

Итак,

$$\|\Phi x - \Phi y\| \le \varepsilon\left\{\mu + q_1^{(a)}\left[\lambda_a \mu \sigma_1^{(a)} + \lambda\left(q_1 \rho_2 + \sigma_4 + \rho_2 \sigma_1^{(a)}\right)\right]\right\} \|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\|,$$

при этом искомое значение $\varepsilon_* \leq \varepsilon^*$, где

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\mu + q_1^{(a)} \left\{ \lambda_a \mu \sigma_1^{(a)} + \lambda \left[q_1 \rho_2 + \sigma_4 + \rho_3 \sigma_1^{(a)} \right] \right\}}.$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Для каждого простого* $(\det B_0 \neq 0)$ *корня* $c^* = \mathrm{col}\,(c^*_{r-1}, \beta^*)$ *уравнения* $F(c^*_r) = 0$ *задача (19), (20) имеет единственное* T*-периодическое решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в нулевое. Это решение можно определить с помощью сходящегося при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *итерационного процесса*

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau) I_1 c_{r_1} + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s, c_r^*); 0\Big](\tau),$$

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -B_0^{-1} P_{Q_r^*} \Big\{ \ell K \Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon), \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\},$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau) I_1 c_{r_2} + x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\bar{A}_1(s) c_{r_1} + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon), \varepsilon); 0\Big](\tau), \tag{22}$$

$$c_{r_2}(\varepsilon) = -B_0^{-1} P_{Q_r^*} \Big\{ \ell K \Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\},$$

. . . .

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau) I_1 c_{r_{k+1}} + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\bar{A}_1(s) c_{r_k} + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_k^{(1)}(s,\varepsilon) + \\ + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_k^{(1)}(s,\varepsilon), \varepsilon); 0\Big](\tau),$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = -B_0^{-1} P_{Q_r^*} \Big\{ \ell K \Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_k^{(1)}(s,\varepsilon) + \\ + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_k^{(1)}(s,\varepsilon), \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\}, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

С учетом замены независимой переменной $t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$ задача (15), (16) имеет единственное $T_1(\varepsilon) = T(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$-периодическое решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) \equiv z_0(t,c_r^*)$, которое может найдено с помощью итерационного процесса (22) по формуле

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_{r-1}^*) + x_k(t,\varepsilon), \quad t \in [0, T_{1_k}(\varepsilon)], \quad T_{1_k}(\varepsilon) = T(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)).$$

Величина $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ представляет собой последнюю компоненту вектора $c_{r_{k+1}}(\varepsilon)$.

3. Периодическая задача для уравнения Ван дер Поля. Найдем оценку ε_* длины отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (22) для построения периодического решения $z = z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(z^{(a)}, z^{(b)}) \in R^2$ слабонелинейной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = Az + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{23}$$

которое при $\varepsilon = 0$ обращается в решение порождающей системы $dz_0/dt = Az_0$. Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(0, \left(1-(z^{(a)})^2\right) z^{(b)}\right).$$

Поскольку $Q = \ell X(\cdot) = X(0) - X(2\pi) = 0$, имеет место критический случай; при этом $r = 2$, $P_{Q^*} = P_{Q_r} = I_2$. Уравнение для порождающих амплитуд периодической задачи для уравнения (23) приводит к системе

$$F(c_r) = \pi c_{r-1} \begin{bmatrix} 1/4\left(c_{r-1}^2 - 4\right) \\ 2\beta \end{bmatrix} = 0. \tag{24}$$

Первый корень $c_{r-1}^* = 2$, $\beta^* = 0$ уравнения (24) определяет порождающее решение $z_0(t,c_{r-1}^*) = \mathrm{col}\,(2\cos t, -2\sin t)$, второй корень $c_{r-1}^* = -2$, $\beta^* = 0$ — симметричное ему решение. Третий корень $c_{r-1}^* = 0$ соответствует тривиальному порождающему решению. Первому корню уравнения (24) $c_{r-1}^* = 2$, $\beta^* = 0$ соответствуют матрица

$$B_0 = 2\pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det B_0 \neq 0$, периодическая задача для уравнения Ван дер Поля представляет критический случай первого порядка и, согласно теореме 4, имеет единственное нетривиальное $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$-периодическое решение. Первое приближение к искомому периодическому решению уравнения Ван дер Поля имеет вид

$$z_1(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix} \left(2 - \frac{5\varepsilon^2}{64}\right) + \frac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} 3\sin\tau - \sin 3\tau \\ 3\cos\tau - 3\cos 3\tau \end{bmatrix}.$$

Первое приближение к искомому периоду решения этого уравнения — функция

$$T_{1_1}(\varepsilon) = 2\pi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{21\varepsilon^4}{512}\right).$$

Для оценки ε_* длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (22), положим $\rho = \rho_1 = 0,1$ и $\varepsilon \in [0; 0,1]$, при этом $\|z_a(\tau,\varepsilon)\| \leq 2,1$. Аналогично

$$\|1 - z_a^2(\tau,\varepsilon)\| \leq 1 + \|z_a^2(\tau,\varepsilon)\| \leq 1 + \Big(\|2\cos\tau\| + \|x_a(\tau,\varepsilon)\|\Big)^2 \leq 1 + 2,1^2.$$

Таким образом,

$$\sigma_1^{(a)} \leq \big[\| - 2z_a(\tau,\varepsilon) z_b(\tau,\varepsilon)\| + \|1 - z_a^2(\tau,\varepsilon)\|\big] = 14,23.$$

Далее, $q_1^{(a)} = (2\pi)^{-1}$. Аналогично $\mu = 8\pi$, $\lambda_a = 14\pi$; кроме того, $q_1 = \|A\| = 1$, $\sigma_4 = 0$. При этом искомое значение $\varepsilon_* \leq \varepsilon^*$, где

$$\varepsilon_* = \frac{1}{8\pi + 428,9} \approx 0,002\,202\,.$$

Предложенная в статье методика оценки величины ε^* позволяет находить соответствующие оценки для автономных и неавтономных краевых задач вида (1), (2) в более сложных критических случаях, например в критическом случае второго порядка [1, 3, 4], краевых задач с запаздывающим аргументом и различным импульсным воздействием [9].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
4. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62 – 69.
5. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278 – 288.
6. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 – 1674.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
8. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
9. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 8. — С. 1132 – 1135.

Получено 30.12.2005