УДК 517.9

БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ИМПУЛЬСНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: boichuk@dad.imath.kiev.ua

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84112, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We find constructive conditions for appearance of solutions and construct an iteration procedure for finding solutions of the Noether linear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with an impulsive effect in the critical case. We find an estimate for the region for the small parameter such that the iteration procedure would converge.

Одержано конструктивні умови виникнення розв'язків та побудовано итерацiйну процедуру для знаходження розв'язкiв нетерової лiнiйної крайової задачi для системи звичайних диференцiальних рiвнянь з iмпульсним впливом у критичному випадку. Встановлено оцiнку областi значень малого параметра, для яких зберiгається збiжнiсть iтерацiйної процедури.

1. Линейная невозмущенная задача. Рассмотрим задачу о нахождении решения $z_0(t) \in \in C^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z_0 + f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию [1–3]

$$\mathcal{L}z_0(\cdot) = \alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{2}$$

где $A_i(t)$ — $(n \times n)$-мерные матрицы, непрерывные на отрезках $[a;\tau_1]$, $[\tau_1;\tau_2]$, …, $[\tau_p;b]$, $Lz(\cdot)$– линейный ограниченный векторный функционал вида

$$\mathcal{L}z_0(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i\, z_0(\cdot),$$

причем

$$\ell_i\, z_0(\cdot) : C^1[\tau_i,\tau_{i+1}[\times \ldots \times C^1[\tau_i,\tau_{i+1}[\to R^m, \quad i = 0,1,2,\ldots,p-1, \quad \tau_0 = a,$$

$$\ell_p z_0(\cdot) : C^1[\tau_p,b] \times \ldots \times C^1[\tau_p,b] \to R^m$$

— линейные ограниченные функционалы, $f(t)$ — непрерывная, за исключением точек τ_i, вектор-функция (в точках τ_i функция $f(t)$, возможно, претерпевает разрывы первого рода), $\alpha \in R^m$.

Задача (1), (2) является обобщением ряда краевых задач [1, 2, 4 – 8] на случай импульсных систем с переключениями. С другой стороны, задача (1), (2) является частным случаем гибридных систем [9, 10].

Нормальная $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица $X_0(t)$ линейного однородного дифференциального уравнения с переключениями

$$\frac{dz_0}{dt} = A_i(t)z_0, \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \tag{3}$$

представима в виде

$$X_0(t) = \begin{cases} W_0(t), & t \in [a; \tau_1], \quad W_0(a) = I_n, \\ W_1(t), & t \in [\tau_1; \tau_2], \quad W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1), \\ \dots\dots & \dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Wp(t), & t \in [\tau_p; b], \quad W_p(\tau_p) = W_{p-1}(\tau_1). \end{cases}$$

Здесь $W_0(t)$– нормальная $(W_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица системы (3) на отрезке $[a; \tau_1]$, а $W_1(t)$ — фундаментальная матрица системы (3) на отрезке $[\tau_1; \tau_2]$, которая удовлетворяет условию $W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1), \dots, W_p(t)$ — фундаментальная матрица системы (3) на отрезке $[\tau_p; b]$, которая удовлетворяет условию $W_{p-1}(\tau_p) = W_p(\tau_p)$. Общее решение системы (3) обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями представимо в виде $z(t, c) = X_0(t)c, c \in R^n$, где $X_0(t)$ — нормальная $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица системы (3). Матрицу

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_0} X_0(t) P_Q^{(0)} \tilde{I}, & t \in [a, \tau_1[, \\ \\ \dfrac{1}{p_0} X_0(t) P_Q^{(1)} \tilde{I}, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{p_0} X_0(t) P_Q^{(p)} \tilde{I}, & t \in [\tau_p, b], \end{cases} \tag{4}$$

назовем фундаментальной матрицей однородной задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A_i(t)z_0, \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \quad \mathcal{L}z_0(\cdot) = 0, \tag{5}$$

нормированной в точке $\tau_{i_0} + 0 : \|X(\tau_{i_0} + 0)\| = 1$. Если же $\operatorname{rank} P_Q^{(i)} \tilde{I}$ достигает своего максимума сразу в нескольких точках $\tau_{i_0}, \tau_{i_1}, \dots$, нормируем матрицу $X(t)$ в точке τ_{i_0}, представляющей наименьшее из этих чисел. Здесь

$$\max \operatorname{rank} P_Q^{(i)} \tilde{I} = \operatorname{rank} P_Q^{(i_0)} \tilde{I}, \quad \left\| X_0(\tau_{i_0+0}) P_Q^{(i_0)} \tilde{I} \right\| = p_0,$$

$$Q = [\ell_0 X_0(\cdot)\ell_1 X_0(\cdot)\ldots\ell_p X_0(\cdot)]\,,$$

$P_Q\,:\,R^{n(p+1)} \to N(Q)0 - \Big(n(p+1)\times n(p+1)\Big)$-мерная матрица-ортопроектор [5],

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ \\ P_Q^{(1)} \\ \vdots \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix}, \quad C = \tilde{I}\cdot C^{(0)}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix},$$

$P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \ldots, P_Q^{(p)} - \Big(n\times n(p+1)\Big)$-мерные блоки ортопроектора P_Q. Норму функции $z(t) \in C^1\Big\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\}$ положим [8] равной $||z(t)|| = |z(a)| + \mathrm{var}_a^b\, z(t)$. Задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда [3]

$$P_{Q^*}\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{6}$$

Здесь P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор: $R^m \to N(Q^*)$. При выполнении требования (6) общее решение задачи (1), (2) имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + G\Big[f(s);\alpha\Big](t),$$

где

$$\mathrm{col}(\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_p) = Q^+\Big\{\alpha - \mathcal{L}\,K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\},$$

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma}_0 + K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[a,\tau_1[, \\ \\ X_0(t)\bar{\gamma}_1 + K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[\tau_1,\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t)\bar{\gamma}_p + K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[\tau_p,b], \end{cases} \tag{7}$$

— обобщенный оператор Грина [3] задачи (1), (2),

$$K\Big[f(s)\Big](t) = X_0(t)\int\limits_{\tau_i}^{t} X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t\in[\tau_i,\tau_{i+1}[,$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (1). При условии $P_{Q^*} \neq 0$ задача (1), (2) разрешима для тех и только тех неоднородностей $f(t) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$ и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют условию (6). Следуя традиционной классификации краевых задач [5], случай $P_{Q^*} \neq 0$ назовем критическим.

2. Постановка задачи. Предположим, что условие (6) не выполняется для произвольных неоднородностей $f(t)$ и α краевой задачи (1), (2):

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\right\} \neq 0. \tag{8}$$

Поставим задачу о нахождении линейных возмущений $\varepsilon A_0(t)z$ и $\varepsilon\mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon)$, которые обеспечивали бы существование решений $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$, $z(t,\cdot) \in C]0,\varepsilon_0]$ краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z + f(t) + \varepsilon A_0(t)z, \quad t \neq \tau_i, \tag{9}$$

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon) \tag{10}$$

для любых неоднородностей $f(t)$ и α. Здесь $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-мерная матрица, составленная из $d = m - n_1$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $A_0(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, непрерывная на отрезках $[a;\tau_1]$, $[\tau_1;\tau_2]$, $\ldots$, $[\tau_p;b]$, $\mathcal{L}_0 z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал вида

$$\mathcal{L}_0 z_0(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i^{(0)} z_0(\cdot),$$

причем

$$\ell_i^{(0)} z_0(\cdot) : C^1[\tau_i,\tau_{i+1}[\times \ldots \times C^1[\tau_i,\tau_{i+1}[\to R^m, \quad i = 0,1,2,\ldots,p-1, \quad \tau_0 = a,$$

$$\ell_p^{(0)} z_0(\cdot) : C^1[\tau_p,b] \times \ldots \times C^1[\tau_p,b] \to R^m$$

— линейные ограниченные функционалы. Поставленная задача является обобщением задачи о возникновении решений дифференциальной системы с невырожденным импульсным воздействием, а также задачи о возникновении гладких решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 11, 12]. Впервые импульсное воздействие было использовано для регуляризации периодической краевой задачи Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в монографии [13]. Традиционно для решения этих задач использовался метод Вишика – Люстерника [5, 11]. Целью же данной работы является построение искомого решения краевой задачи (9), (10) методом простых итераций.

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (9), (10) имеет вид

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon) - \mathcal{L}K\Big[f(s) + \varepsilon A_0(s)z(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\} = 0.$$

Если это условие выполнено, то общее решение задачи (9), (10)

$$z(t,\varepsilon) = X(t)c(\varepsilon) + z^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$z^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[f(s) + \varepsilon A_0(s)z(s,\varepsilon); \quad \alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon)\Big](t)$$

представимо с помощью обобщенного оператора Грина (7) задачи (1), (2). Для нахождения вектора $c(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$B_0\varepsilon c(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} -$$

$$-\varepsilon P_{Q_d^*}\Big\{\mathcal{L}_0 z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - \mathcal{L}K\Big[A_0(s)z^{(1)}(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}, \qquad (11)$$

где

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Big\{\mathcal{L}_0 X(\cdot) - \mathcal{L}K\Big[A_0(s)X(s)\Big](\cdot)\Big\}$$

— $(d\times n)$-мерная матрица. При $\varepsilon \neq 0$, $P_{B_0^*} = 0$ уравнение (11) имеет ρ-параметрическое решение, следовательно, и краевая задача (9), (10) имеет не менее одного решения, представимого операторной системой

$$z(t,\varepsilon) = X(t)c(\varepsilon) + z^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$z^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[f(s) + \varepsilon A_0(s)z(s,\varepsilon); \alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon)\Big](t),$$

$$c(\varepsilon) = -B_0^+\frac{1}{\varepsilon}\,P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} - \qquad (12)$$

$$-B_0^+\cdot P_{Q_d^*}\Big\{\mathcal{L}_0 z^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - \mathcal{L}K\Big[A_0(s)z^{(1)}(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho,$$

где $P_{B_0^*}$ — $(d\times d)$-мерная матрица-ортопроектор: $R^d \to N(B_0^*)$, $P_{B_0} : \ R^n \to N(B_0)$ — $(n\times \times n)$-матрица-ортопроектор, P_ρ — $(r\times\rho)$-матрица, составленная из ρ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_{B_0}.

Операторная система (12) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [5, 14]. Первое приближение к решению операторной системы (12) ищем, как решение краевой задачи первого приближения к задаче (9), (10):

$$\frac{dz_1}{dt} = A_i(t)z_1, \quad t \neq \tau_i, \quad \mathcal{L}z_1(\cdot,\varepsilon) = 0. \qquad (13)$$

Существование решения задачи (13) гарантировано однородностью задачи (13), само же решение задачи (13) представимо в виде $z_1(t,\varepsilon) = X(t)c_1(\varepsilon)$. Второе приближение к решению операторной системы (12) ищем, как решение краевой задачи второго приближения к задаче (9), (10):

$$\frac{dz_2}{dt} = A_i(t)z_2(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon A_0(t)z_1(t,\varepsilon),$$
$$\mathcal{L}z_2(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z_1(\cdot,\varepsilon). \tag{14}$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ из условия разрешимости задачи (14) находим первое приближение $c_1(\varepsilon)$ к вектору $c(\varepsilon)$:

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ \frac{1}{\varepsilon} P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\right\} + P_\rho c_\rho.$$

Таким образом, на втором шаге итерационной процедуры найдено первое приближение $z_1(t,\varepsilon)$ к решению операторной системы (12). Второе приближение к решению операторной системы (12)

$$z_2(t,\varepsilon) = X(t)c_2(\varepsilon) + z_2^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$z_2^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[f(s) + \varepsilon A_0(s)z_1(s,\varepsilon);\ \alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z_1(\cdot,\varepsilon)\Big](t)$$

может быть найдено с точностью до вектора $c_2(\varepsilon)$, который будет найден при следующей итерации. Третье приближение к решению операторной системы (12) ищем, как решение краевой задачи третьего приближения к задаче (9), (10):

$$\frac{dz_3}{dt} = A_i(t)z_3(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon A_0(t)z_2(t,\varepsilon),$$
$$\mathcal{L}z_3(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\mathcal{L}_0 z_2(\cdot,\varepsilon). \tag{15}$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ из условия разрешимости задачи (15) находим второе приближение $c_2(\varepsilon)$ к вектору $c(\varepsilon)$:

$$c_2(\varepsilon) = -B_0^+ \frac{1}{\varepsilon} P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\right\} -$$
$$-B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{\mathcal{L}_0 z_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - \mathcal{L}K\Big[A_0(s)z_2^{(1)}(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\} + P_\rho\, c_\rho.$$

Таким образом, на третьем шаге итерационной процедуры найдено второе приближение $z_2(t,\varepsilon)$ к решению операторной системы (12). Продолжая рассуждения, приходим к итерационной процедуре

$$z_1(t,\varepsilon) = X(t)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ \frac{1}{\varepsilon} P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \mathcal{L}K \Big[f(s) \Big](\cdot) \right\} + P_\rho c_\rho;$$

$$z_2(t,\varepsilon) = X(t)c_2(\varepsilon) + z_2^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$z_2^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[f(s) + \varepsilon A_0(s) z_1(s,\varepsilon);\ \alpha + \varepsilon \mathcal{L}_0 z_1(\cdot,\varepsilon) \Big](t),$$

$$c_2(\varepsilon) = -B_0^+ \frac{1}{\varepsilon} P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \mathcal{L}K \Big[f(s) \Big](\cdot) \right\} - \tag{16}$$

$$-B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \mathcal{L}_0 z_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - \mathcal{L}K \Big[A_0(s) z_2^{(1)}(s,\varepsilon) \Big](\cdot) \right\} + P_\rho c_\rho;$$

. . . .

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = X(t)c_{k+1}(\varepsilon) + z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[f(s) + \varepsilon A_0(s) z_k(s,\varepsilon); \alpha + \varepsilon \mathcal{L}_0 z_k(\cdot,\varepsilon) \Big](t),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^+ \frac{1}{\varepsilon} P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \mathcal{L}K \Big[f(s) \Big](\cdot) \right\} -$$

$$-B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \mathcal{L}_0 z_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - \mathcal{L}K \Big[A_0(s) z_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon) \Big](\cdot) \right\} + P_\rho c_\rho, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Докажем сходимость этой процедуры к искомому решению задачи (9), (10) и одновременно оценим длину промежутка $]0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется ее сходимость. Операторная система (12) эквивалентна задаче о построении решения операторного уравнения $z(t,\varepsilon) = \Phi z(t,\varepsilon)$, где

$$\Phi z(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} X(t) B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \mathcal{L}K \Big[f(s) \Big](\cdot) \right\} -$$

$$-X(t) B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{ \mathcal{L}_0 G \Big[f(s) + \varepsilon A_0(s) z(s,\varepsilon);\ \alpha + \varepsilon \mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon) \Big](\cdot) -$$

$$-\mathcal{L}K \Big[A_0(s) G \Big[f(\tau) + \varepsilon A_0(\tau) z(\tau,\varepsilon);\ \alpha + \varepsilon \mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon) \Big](s) \Big](\cdot) \Big\} +$$

$$+X(t) P_\rho c_\rho + G \Big[f(s) + \varepsilon A_0(s) z(s,\varepsilon);\ \alpha + \varepsilon \mathcal{L}_0 z(\cdot,\varepsilon) \Big](t).$$

$\Phi z(t,\varepsilon)$ — непрерывный ограниченный оператор, действующий из пространства действительных вектор-функций $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$, $z(t,\cdot) \in C]0,\varepsilon_0]$ в себя. Для оценки длины промежутка, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (16) к искомому решению задачи (9), (10), оценим длину промежутка, на котором оператор $\Phi z(t,\varepsilon)$ является сжимающим. Норму вектор-функции $\varphi(t) = \mathrm{col}\Big(\varphi^{(1)}(t),\ldots,\varphi^{(n)}(t)\Big)$ полагаем таковой [14, 15]:

$$\|\varphi(t)\| = \max_{1\le i\le n} \|\varphi^{(i)}(t)\|, \quad \|\varphi_i(t)\| = \max_{a\le t\le b} |\varphi^{(i)}(t)|.$$

Нормой $(m\times n)$-матрицы $A(t) = a_{ij}(t)$ будем называть число

$$\|A(t)\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}(t)\|.$$

Пусть $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ — вектор-функции из малой окрестности нуля, причем

$$x(\cdot,\varepsilon), y(\cdot,\varepsilon) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad x(t,\cdot), y(t,\cdot) \in C]0,\varepsilon_0].$$

Оценим норму разности

$$\|\Phi x(t,\varepsilon) - \Phi y(t,\varepsilon)\| \le \left\|X(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\mathcal{L}_0 G\Big[A_0(s)*;\mathcal{L}_0 *\Big](\cdot)\right\|\varepsilon\|x-y\| +$$

$$+\left\|X(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\mathcal{L}K\Big\{A_0(s)G\Big[A_0(\tau)*;\mathcal{L}_0 *\Big](s)\Big\}(\cdot)\right\|\varepsilon\|x-y\| +$$

$$+\left\|G\Big[A_0(s)*;\mathcal{L}_0 *\Big](t)\right\|\varepsilon\|x-y|| \le \Big[q\Big(\lambda_1+\lambda_2\mu\Big)+\mu\Big]\varepsilon\|x-y\|.$$

Таким образом, при

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\Big[q\Big(\lambda_1+\lambda_2\mu\Big)+\mu\Big]} = \varepsilon_* \le \varepsilon^*$$

оператор $\Phi z(t,\varepsilon)$ является сжимающим, при этом вследствие принципа Каччиопполи–Банаха [14] и уравнение $z(t,\varepsilon) = \Phi z(t,\varepsilon)$, и операторная система (12) имеют решение, для нахождения которого применима итерационная процедура (16). Здесь

$$q = \left\|X(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\right\|, \quad \lambda_1 = \left\|\mathcal{L}_0 G\Big[A_0(s)*;\mathcal{L}_0 *\Big](\cdot)\right\|,$$

$$\lambda_2 = \left\|\mathcal{L}K\Big[A_0(\tau) *\Big](\cdot)\right\|, \quad \mu = \left\|G\Big[A_0(\tau)*;\mathcal{L}_0 *\Big](s)\right\|.$$

Теорема. *Пусть краевая задача (9), (10) представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$, *при этом условие (6) разрешимости невозмущенной задачи (1), (2) не выполняется при произвольных неоднородностях* $f(t)$ *и* α. *Тогда при условии* $P_{B_0^*} = 0$ *задача (9), (10) имеет не менее одного решения*

$$z(\cdot,\varepsilon) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad z(t,\cdot) \in C]0,\varepsilon_0],$$

где $\operatorname{rank} P_{B_0} = \rho$, $P_{B_0} : R^n \to N(B_0)$ — $(n \times n)$*-матрица-ортопроектор,*

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Big\{\mathcal{L}_0 X(\cdot) - \mathcal{L}K\Big[A_0(s)X(s)\Big](\cdot)\Big\}$$

— $(d \times n)$*-мерная матрица. Это решение можно определить с помощью сходящегося при* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_*]$ *итерационного процесса (16).*

Доказанная теорема является обобщением соответствующих результатов из [5, 11, 12] на случай импульсных краевых задач с переключениями.

Пример. Условия теоремы выполняются в задаче

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z + f(t) + \varepsilon A_0(t)z, \quad t \in [0,3], \quad t \neq 1, \quad t \neq 2, \quad \mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \tag{17}$$

где

$$A_i(t) = \begin{cases} 2t-2, & t \in [0,1[, \\ 0, & t \in [1,2[, \\ 2t-2, & t \in [2,3], \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1[, \\ 1, & t \in [1,2[, \\ 0, & t \in [2,3], \end{cases}$$

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \begin{pmatrix} z(1+0) - z(2-0) \\ z(0+) - z(3-0) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_0(t) \equiv 1.$$

Невозмущенная задача для системы (17) имеет вид

$$\frac{dz_0}{dt} = A_i(t)z_0 + f(t), \quad t \in [0,3], \quad t \neq 1, \quad t \neq 2; \quad \mathcal{L}z_0(\cdot) = \alpha. \tag{18}$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (18)

$$X_0(t) = \begin{cases} e^{t^2-2t}, & t \in [0,1[, \\ e^{-1}, & t \in [1,2[, \\ e^{t^2-2t-1}, & t \in [2,3], \end{cases}$$

определяет матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -e^2 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1+e^4} \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{e^2}{1+e^4} \end{pmatrix}$$

и ортопроекторы

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} \dfrac{e^4}{1+e^4} & 0 & \dfrac{e^2}{1+e^4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{e^2}{1+e^4} & 0 & \dfrac{1}{1+e^4} \end{pmatrix}, \quad P_{Q_d^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Строки ортопроектора P_Q определяют фундаментальную матрицу однородной части краевой задачи (18). Нормируя ее, получаем

$$X(t) = \begin{cases} e^{t^2-2t}, & t \in [0,1[, \\ \beta, & t \in [1,2[, \\ e^{t^2-2t-3}, & t \in [2,3], \end{cases} \qquad \beta = \frac{1+e^4}{e^3(1+e^4)}.$$

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, имеет место критический случай, при этом условие (6) разрешимости невозмущенной задачи (18) не выполняется для данных неоднородностей $f(t)$ и α;

$$K\Big[f(s)\Big](t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1[, \\ t-1, & t \in [1,2[, \\ 0, & t \in [2,3], \end{cases} \qquad P_{Q^*}\mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot) = 1 \neq 0.$$

Матрица B_0 для задачи (17) принимает вид $B_0 = \beta \neq 0$, следовательно, $P_{B_0} = P_{B_0^*} = 0$ и, согласно теореме, задача (17) имеет единственное ($\rho = \operatorname{rank} P_{B_0} = 0$) решение, которое можно определить с помощью итерационного процесса (16). Первое приближение к решению задачи (17) представимо в виде

$$z_1(t,\varepsilon) = X(t)c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon\beta}.$$

Поскольку

$$K\Big[A_0(s)X(s)\Big](t) = \begin{cases} t\, e^{t^2-2t}, & t \in [0,1[, \\ \beta\,(t-1), & t \in [1,2[, \\ (t-2)\, e^{t^2-2t-3}, & t \in [2,3], \end{cases}$$

то

$$z_2^{(1)}(t) = \begin{cases} \left[\dfrac{\beta-1}{\beta(1+e^4)} - \dfrac{t}{\beta}\right] e^{t^2-2t}, & t \in [0,1[, \\ 0, & t \in [1,2[, \\ -\left[\dfrac{e^4(\beta-1)}{\beta(1+e^4)} - \dfrac{t-2}{\beta}\right] e^{t^2-2t-3}, & t \in [2,3], \end{cases}$$

следовательно, $c_1(\varepsilon) = c_2(\varepsilon)$. Таким образом, найдено второе приближение $z_2(t,\varepsilon) = X(t)c_2(\varepsilon) + z_2^{(1)}(t)$ к решению задачи (17). Согласно доказанной теореме, это решение определено для $\varepsilon \in]0, \varepsilon_*]$. Поскольку $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = e^3$,

$$q = \frac{2e^3-1}{\beta e^3}, \quad \mu \leq \frac{(2e^2-1)(2e^5+1)}{e^2(1+e^4)},$$

то

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\mu\Bigl(1 + qe^3\Bigr)} \approx 0,000\,837.$$

Для нахождения величины ε_* можно также использовать метод мажорирующих уравнений Ляпунова [5].

1. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Докл. Академии наук. — 2001. — **379**, № 2. — С. 170 – 172.
2. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 8. — С. 1132 – 1135.
3. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 51 – 65.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
6. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. — 1967. — **74 (116)**, № 2. — С. 202 – 208.
7. *Sčhwabik S.* Differential equations with interface conditions // Čas. pěstov. mat. — 1980. — № 105. — P. 391 – 410.
8. *Анохин А. В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1986. — **286**, № 5. — С. 1037 – 1040.
9. *Myshkis A. D.* On the relation between systems with switching and hybrid systems // Funct. Different. Equat. — 2004. — № 11. — P. 467 – 473.
10. *Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J.* Hybrid systems with time scales and impulses // Nonlinear Anal. — 2006. — **65**, № 11. — P. 2147 – 2152.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.
12. *Чуйко С. М.* Возникновение решений линейной нетеровой краевой задачи // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 8. — С. 1148 – 1152.
13. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Получено 30.08.07