УДК 517.977

НАБЛИЖЕНА ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОБМЕЖЕНИМ КЕРУВАННЯМ

А. В. Сукретна

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

For an optimal stabilization problem for a processes that is described by a boundary-value problem for parabolic equation, we construct and substantiate an approximate averaged feedback control (synthesis).

Для задачі оптимальної стабілізації процесу, що описується крайовою задачею для параболічного рівняння, побудовано і обґрунтовано наближене усереднене керування у формі оберненого зв'язку (синтезу).

1. Вступ. Для нескінченновимірних систем задача побудови обмеженого оптимального керування у формі оберненого зв'язку ще далека від свого остаточного розв'язання. Для систем з розподіленими параметрами проблема оптимального синтезу зводиться до розв'язності функціонального рівняння Беллмана. При розв'язанні цього рівняння у випадку лінійно-квадратичної задачі приходимо до нескінченновимірного рівняння типу Ріккаті, отримання точного розв'язку якого зазвичай не є технічно можливим. Крім того, результуючі синтезовані оптимальні керування виражаються нескінченними рядами і для сильно неоднорідних середовищ (тобто у випадку, коли початкова задача має швидко осцилюючі коефіцієнти) нерегулярно залежать від малого параметра. Наведені обставини унеможливлюють практичне застосування реальних оптимальних керувань і спонукають до пошуку наближених усереднених регуляторів, які б забезпечували необхідні екстремальні властивості.

У даній роботі для задачі оптимальної стабілізації параболічного процесу розв'язано питання побудови наближеного усередненого синтезу у випадку виходу керування на обмеження.

2. Постановка задачі. В області

$$Q = \{(x,t) : \ x \in \Omega, \ t_0 < t < \infty\},$$

де Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $t_0 \geq 0$ — фіксований момент часу, розглянемо наступну задачу оптимальної стабілізації: знайти керування

$$v(t) \in U = \{v(t) : v \in L_2(\mathbb{R}^+), \ |v(t)| \leq \xi \text{ майже скрізь в } \mathbb{R}^+ = [t_0; +\infty)\}, \tag{1}$$

що доставляє найменше значення функціоналу

$$J(v) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \left(\int\limits_{\Omega} (y^{\varepsilon}(x,t))^2 \, dx + \gamma v^2(t) \right) dt, \quad \gamma = \text{const} \ > 0, \tag{2}$$

визначеному на розв'язках крайової задачі для параболічного рівняння

$$y_t^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon y^\varepsilon(x,t) + g^\varepsilon(x)v(t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq t_0, \tag{3}$$

$$y^\varepsilon(x,t_0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Тут $A^\varepsilon = \operatorname{div}(a^\varepsilon(x)\overrightarrow{\operatorname{grad}}) + b^\varepsilon(x)$, де $a^\varepsilon(x) = a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $b^\varepsilon(x) = b\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $g^\varepsilon(x) == g\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $g^\varepsilon, \varphi \in L_2(\Omega),\ \varepsilon \in (0,1)$ — малий параметр.

Будемо вимагати, щоб оператор A^ε задовольняв наступні умови:

1) a — $(n \times n)$-вимірна симетрична 1-періодична матриця, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності:

$$\begin{gathered}\exists\, \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1) \quad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, \overrightarrow{\chi} \in \mathbb{R}^n : \\ \alpha_1 \sum_{k=1}^n \chi_k^2 \leq a_{ij}^\varepsilon(x)\chi_i\chi_j \leq \alpha_2 \sum_{k=1}^n \chi_k^2, \quad i,j = \overline{1,n};\end{gathered} \tag{4}$$

2) функція b є вимірною симетричною 1-періодичною та обмеженою, а саме

$$\exists\, \beta_1, \beta_2 > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1) \quad \forall\, x \in \Omega : \quad \beta_1 \leq b^\varepsilon(x) \leq \beta_2. \tag{5}$$

Відомо, що при кожному фіксованому керуванні $v \in U$ крайова задача (3) має розв'язок $y^\varepsilon \in W_2^{1,0}(Q)$ [1]. Крім того, задача оптимального керування (1)–(3) має єдиний розв'язок $u^\varepsilon \in U$ [2].

Розглянемо наступну спектральну задачу при $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\begin{gathered}A^\varepsilon X^\varepsilon(x) + (\lambda^\varepsilon)^2 X^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ X^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{gathered} \tag{6}$$

При виконанні умов (4), (5) з [1] відомо, що спектральна задача (6) має зліченну множину розв'язків $(\lambda^\varepsilon)^2 = (\lambda_k^\varepsilon)^2, \quad X^\varepsilon(x) = X_k^\varepsilon(x), \quad k = \overline{1,\infty}$, причому власні значення

$$0 \leq (\lambda_1^\varepsilon)^2 \leq \ldots \leq (\lambda_k^\varepsilon)^2 \leq (\lambda_{k+1}^\varepsilon)^2 \leq \ldots, \quad (\lambda_k^\varepsilon)^2 \to \infty,\ k \to \infty,$$

а власні функції $\{X_k^\varepsilon(x)\}_{k=1}^\infty$ утворюють базис у просторах $L_2(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$, що ортонормований у $L_2(\Omega)$ й ортогональний у $H_0^1(\Omega)$.

Розкладаючи всі функції задачі оптимальної стабілізації (1)–(3) в ряд Фур'є за системою $\{X_k^\varepsilon(x)\}_{k=1}^\infty$, отримуємо задачу відносно відповідних коефіцієнтів Фур'є

$$\begin{gathered}\dot{y}_i^\varepsilon(t) = -(\lambda_i^\varepsilon)^2 y_i^\varepsilon(t) + g_i^\varepsilon v(t),\ t > t_0, \\ y_i^\varepsilon(t_0) = \varphi_i^\varepsilon, \quad i = \overline{1,\infty},\end{gathered} \tag{7}$$

$$v(t) \in U, \tag{8}$$

$$I(v) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (y_i^{\varepsilon}(t))^2 + \gamma v^2(t) \right] dt \to \inf . \tag{9}$$

Для розв'язків задачі Коші (7)

$$y_i^{\varepsilon}(t) = \varphi_i^{\varepsilon} e^{-(\lambda_i^{\varepsilon})^2 (t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} g_i^{\varepsilon} e^{(\lambda_i^{\varepsilon})^2 (s-t)} v(s) ds \tag{10}$$

справджуються оцінки

$$(y_i^{\varepsilon})^2 \leq 2(\varphi_i^{\varepsilon})^2 + \frac{2}{(\lambda_i^{\varepsilon})^2} (g_i^{\varepsilon})^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |v(t)|^2,$$

$$(\dot{y}_i^{\varepsilon})^2 \leq 2(\lambda_i^{\varepsilon})^2 (\varphi_i^{\varepsilon})^2 + 4(g_i^{\varepsilon})^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |v(t)|^2, \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} (y_i^{\varepsilon})^2 (t) dt \leq \frac{(\varphi_i^{\varepsilon})^2}{(\lambda_i^{\varepsilon})^2} + \frac{(g_i^{\varepsilon})^2}{(\lambda_i^{\varepsilon})^4} \|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^+)},$$

з яких випливають оцінки для розв'язку початкової крайової задачі (3):

$$\|y^{\varepsilon}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq 2 \left(\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{(\lambda_1^{\varepsilon})^2} \|g^{\varepsilon}\|^2_{L_2(\Omega)} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |v(t)|^2 \right), \tag{12}$$

$$\|y_t^{\varepsilon}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq 2 \left(\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\|g^{\varepsilon}\|^2_{L_2(\Omega)} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} |v(t)|^2 \right), \tag{13}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_{\Omega} (y^{\varepsilon}(x,t))^2 dx dt \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi_i^{\varepsilon})^2}{(\lambda_i^{\varepsilon})^2} + \|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^+)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(g_i^{\varepsilon})^2}{(\lambda_i^{\varepsilon})^4}. \tag{14}$$

У роботі [3] за допомогою методу динамічного програмування задачу оптимального керування (7)–(9) (а отже, і задачу (1)–(3)) розв'язано повністю. Проте розв'язок, отриманий тут, не є зручним для практичного застосування, оскільки:

1) записується у вигляді нескінченного ряду;

2) коефіцієнти нерегулярно $\left(\text{порядку } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ залежать від малого параметра;

3) для отримання керування потрібно розв'язати нелінійну нескінченновимірну систему рівнянь.

Метою даної роботи є побудова на базі точного оптимального керування задачі (1)–(3) у випадку виходу на обмеження наближеного усередненого керування, яке б реалізовувало мінімум критерію якості (2) і разом з тим не мало б недоліків 1–3.

Зауважимо, що аналогічна задача у випадку, коли керування є внутрішньою точкою допустимої множини U, розглядалась у [4].

3. Побудова наближеного усередненого синтезу. Далі будемо вважати виконаними наступні припущення.

Припущення 1. Для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ справджується оцінка

$$\|g^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{2}(\lambda_1^\varepsilon)^4\gamma.$$

Припущення 2. Для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ виконуються нерівності

$$\varphi_i^\varepsilon g_i^\varepsilon < 0, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

Припущення 3. Для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ виконується нерівність

$$-\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^\varepsilon g_i^\varepsilon}{(\lambda_1^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)} > \xi.$$

Нехай закон синтезу оптимального керування має вигляд

$$u^\varepsilon[y^\varepsilon] = \begin{cases} \xi, & t \in [t_0, \tau^\varepsilon], \\ -\dfrac{1}{2\gamma}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{g_i^\varepsilon y_i^\varepsilon(t)}{(\lambda_1^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)} = (\Re^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot,t)), & t \in [\tau^\varepsilon; +\infty), \end{cases} \tag{15}$$

де числа $\gamma_i^\varepsilon > 0$, $i = \overline{1,\infty}$, є розв'язками нелінійної системи

$$\gamma_i^\varepsilon = \frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(g_j^\varepsilon)^2}{(\lambda_j^\varepsilon)^2((\lambda_i^\varepsilon)^2+(\lambda_j^\varepsilon)^2)(1+\gamma_j^\varepsilon)}, \tag{16}$$

$y_i^\varepsilon(t)$ — розв'язки задачі Коші (7) з керуванням $u^\varepsilon[y^\varepsilon]$,

$$\Re^\varepsilon(x) = -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i^\varepsilon X_i^\varepsilon(x)}{(\lambda_i^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)},$$

$y^\varepsilon(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (3) з керуванням (15), $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $L_2(\Omega)$, а точка перемикання τ^ε визначається з рівняння

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i^\varepsilon y_i^\varepsilon(t)e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2(\tau^\varepsilon-t)}}{(\lambda_i^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(g_i^\varepsilon)^2\xi(1-e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2(\tau^\varepsilon-t)})}{(\lambda_i^\varepsilon)^4(1+\gamma_i^\varepsilon)} = -2\gamma\xi \tag{17}$$

або

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^\varepsilon \varphi_i^\varepsilon e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2(\tau^\varepsilon - t_0)}}{(\lambda_i^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(g_i^\varepsilon)^2 \xi (1 - e^{-(\lambda_i^\varepsilon)^2(\tau^\varepsilon - t_0)})}{(\lambda_i^\varepsilon)^4(1+\gamma_i^\varepsilon)} = -2\gamma\xi. \tag{18}$$

Зауважимо, що в загальному випадку припущення 1 – 3 не гарантують вигляд (15) оптимального керування (тобто наявність єдиної точки перемикання). Однак при досить широких умовах на дані задачі (1) – (3) (наприклад, якщо $g^\varepsilon(x) = \alpha X_i^\varepsilon(x)$ для деякого $i = \overline{1, \infty}$ і $\alpha \in \mathbb{R}$) оптимальне керування справді має вигляд (15). При цьому:

припущення 1 гарантує існування єдиного додатного розв'язку системи (16);

при виконанні умов припущень 2, 3 розв'язок рівняння для точки перемикання (17) (або (18)) існує й єдиний, причому розв'язок рівняння (17) є одним і тим самим вздовж оптимальної траєкторії $\overrightarrow{y}^\varepsilon(t) = \{y_i^\varepsilon(t)\}_{i=1}^\infty$ (таким чином, рівняння (17), (18) справді еквівалентні).

На базі реального оптимального керування (15) побудуємо і обґрунтуємо закон наближеного усередненого синтезу.

Для цього поряд зі спектральною задачею (6) розглянемо спектральну задачу

$$\begin{gathered} A^0 X^0(x) + (\lambda^0)^2 X^0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ X^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{19}$$

для усередненого оператора $A^0 = \operatorname{div}(a^0 \overrightarrow{\operatorname{grad}}) + b^0$, де a^0 — усереднена матриця, b^0, g^0 — середні значення відповідних функцій [5].

Нехай $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty$ — власні функції спектральної задачі (19), які відповідають простим власним значенням $\{(\lambda_i^0)^2\}_{i=1}^\infty$, причому

$$0 \le (\lambda_1^0)^2 < \ldots < (\lambda_k^0)^2 < (\lambda_{k+1}^0)^2 < \ldots, \qquad (\lambda_k^0)^2 \to \infty, \ k \to \infty.$$

Тоді система $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty$ утворює ортонормований у $L_2(\Omega)$ і ортогональний в $H_0^1(\Omega)$ базис і відомо, що [5]

$$\begin{gathered} |(\lambda_k^\varepsilon)^2 - (\lambda_k^0)^2| \le c_k \varepsilon, \quad \|X_k^\varepsilon - X_k^0\|_{L_2(\Omega)} \le C_k \varepsilon, \qquad k = \overline{1, \infty}, \\ g^\varepsilon \to g^0, \quad b^\varepsilon \to b^0 \quad \text{слабко в } L_2(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Замінимо у формулі для оптимального керування ряди на скінченні суми та коефіцієнти Фур'є за системою функцій $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$ на коефіцієнти Фур'є за системою функцій $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty$, при цьому дещо посилимо припущення 1 – 3. А саме, будемо вимагати, щоб виконувалися наступні припущення.

Припущення 4. Для всіх $\varepsilon \in [0, 1)$ справджується оцінка

$$\|g^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \le (\lambda_1^0)^4 \gamma. \tag{21}$$

Припущення 5. Для всіх $\varepsilon \in [0, 1)$ виконуються нерівності

$$\varphi_i^\varepsilon g_i^\varepsilon < 0, \quad i = \overline{1, \infty}.$$

Припущення 6. Для всіх $\varepsilon \in [0,1)$ виконується нерівність

$$-\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^\varepsilon g_i^\varepsilon}{(\lambda_1^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)} > \xi.$$

де $\{\gamma_i^0\}_{i=1}^\infty$ — додатний розв'язок системи

$$\gamma_i^0 = \frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(g_j^0)^2}{(\lambda_j^0)^2((\lambda_i^0)^2+(\lambda_j^0)^2)(1+\gamma_j^0)}. \tag{22}$$

Далі основним об'єктом дослідження є наближене усереднене керування

$$u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}] = \begin{cases} \xi, \quad t\in[t_0,\tau_N^0], \\ -\dfrac{1}{2\gamma}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{g_i^0 y_{iN}^{\varepsilon 0}(t)}{(\lambda_1^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)} = \left(\Re_N^0(\cdot), y_N^{\varepsilon 0}(\cdot,t)\right), \quad t\in(\tau_N^0;+\infty), \end{cases} \tag{23}$$

де γ_{iN}^0, $i=\overline{1,\infty}$, — додатний розв'язок системи

$$\begin{gathered} \gamma_{iN}^0 = \frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\frac{(g_j^0)^2}{(\lambda_j^0)^2((\lambda_i^0)^2+(\lambda_j^0)^2)(1+\gamma_{jN}^0)}, \\ \Re_N^0(x) = -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\frac{g_i^0 X_i^0(x)}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)}, \end{gathered} \tag{24}$$

τ_N^0 — точка перемикання, яка визначається з рівняння

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{g_i^0\varphi_i^0 e^{-(\lambda_i^0)^2(\tau_N^0-t_0)}}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)} + \sum_{i=1}^{N}\frac{(g_i^0)^2\xi(1-e^{-(\lambda_i^0)^2(\tau_N^0-t_0)})}{(\lambda_i^0)^4(1+\gamma_{iN}^0)} = -2\gamma\xi, \tag{25}$$

а $y_{iN}^{\varepsilon 0}(t) = (y_N^{\varepsilon 0}(\cdot,t), X_i^0(\cdot))$, $y_N^{\varepsilon 0}(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (3) з керуванням (23).

Зауважимо, що керування (23) не є, взагалі кажучи, неперервним у точці $t=\tau_N^0$.

4. Деякі допоміжні результати. Для обґрунтування коректності запропонованого керування (23), тобто перед тим як довести, що керування (23) реалізує мінімум критерію якості (2), будемо використовувати наступні результати, доведення яких є досить громіздкими, і тому ми їх не наводимо.

Насамперед зауважимо, що з огляду на (20) очевидними є збіжності

$$(\lambda_i^\varepsilon)^2 \to (\lambda_i^0)^2, \quad \varphi_i^\varepsilon \to \varphi_i^0, \quad g_i^\varepsilon \to g_i^0, \quad \varepsilon\to 0, \qquad i=\overline{1,\infty}.$$

Крім того, як і у випадку $\varepsilon>0$, за умови виконання припущення 4 ((21)) додатний розв'язок системи (22) існує й єдиний. Метод знаходження цього розв'язку дає така лема.

Лема 1. *Для кожного $N \geq 1$ існує єдиний додатний розв'язок $\{\gamma_{iN}^0\}_{i=1}^N$ системи (24), причому*

$$\gamma_{iN}^0 \to \gamma_i^0, \quad N \to \infty,$$

де $\{\gamma_i^0\}_{i=1}^\infty$ — єдиний додатний розв'язок системи (22).

Лема 2. *Для розв'язків рівняння (25) має місце збіжність*

$$\tau_N^0 \to \tau^0, \quad N \to \infty,$$

де τ^0 — розв'язок рівняння

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{g_i^0 \varphi_i^0 e^{-(\lambda_i^0)^2(\tau^0 - t_0)}}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_i^0)} + \sum_{i=1}^\infty \frac{(g_i^0)^2 \xi (1 - e^{-(\lambda_i^0)^2(\tau^0 - t_0)})}{(\lambda_i^0)^4(1+\gamma_i^0)} = -2\gamma\xi. \tag{26}$$

Лема 3. *Нехай $\{\gamma_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ — додатний розв'язок нелінійної системи (16). Тоді*

$$\gamma_i^\varepsilon \to \gamma_i^0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = \overline{1, \infty},$$

де $\{\gamma_i^0\}_{i=1}^\infty$ — єдиний додатний розв'язок системи (22).

Лема 4. *Нехай τ^ε — розв'язок рівняння для точки перемикання (18). Тоді*

$$\tau^\varepsilon \to \tau^0, \quad \varepsilon \to 0,$$

де τ^0 — розв'язок рівняння (26).

Лема 5. $\Re_N^0 \to \Re^0 = -\dfrac{1}{2\gamma} \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \frac{g_i^0 X_i^0}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_i^0)}$, $N \to \infty$ *слабко в* $L_2(\Omega)$.

Лема 6. $\Re^\varepsilon \to \Re^0$, $\varepsilon \to 0$ *в* $L_2(\Omega)$.

5. Коректність запропонованого наближеного усередненого керування. Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай в задачі оптимального керування (1)–(3) $g^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ та виконуються припущення 4–6. Тоді справджуються наступні оцінки близькості між реальним оптимальним керуванням (15) і побудованим наближеним усередненим керуванням (23):*

$$\forall\, \eta > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, N \geq N_0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) :$$

$$\|u^\varepsilon[y^\varepsilon] - u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}]\|_{L_2([t_0; +\infty))}^2 < \eta, \tag{27}$$

$$\left| J(u^\varepsilon[y^\varepsilon]) - J(u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}]) \right| < \eta. \tag{28}$$

Таким чином, побудоване наближене керування реалізує мінімум критерію якості та є близьким до реального оптимального керування, що й обґрунтовує його коректність.

Доведення. Зафіксуємо довільне достатньо мале η.
1. З лем 2, 4 випливає, що

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} \quad \exists\, \varepsilon_1 > 0 \quad \forall\, N \geq N_1 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) :$$

$$|\tau^\varepsilon - \tau^0| < \frac{\eta}{40\xi^2}, \quad |\tau^0_N - \tau^0| < \frac{\eta}{40\xi^2}.$$

Таким чином, для відповідних значень ε та N отримуємо

$$\tau^\varepsilon, \tau^0_N \in \left(\tau^0 - \frac{\eta}{40\xi^2}, \tau^0 + \frac{\eta}{40\xi^2}\right),$$

а тому на проміжку $\left[t_0, \tau^0 - \dfrac{\eta}{40\xi^2}\right]$ керування (15), (23) збігаються між собою і дорівнюють ξ, а при $t \geq \tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}$ задаються нижнім рядком формул (у вигляді ряду). Звідси маємо

$$\int\limits_{t_0}^{\tau^0 + \frac{\eta}{40\xi^2}} \left(u^\varepsilon[y^\varepsilon] - u^\varepsilon_N[y^{\varepsilon 0}_N]\right)^2 dt \leq \frac{\eta}{5}. \tag{29}$$

Оцінимо $\left|\left\|y^\varepsilon\left(\tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}\right)\right\|_{L_2(\Omega)} - \left\|y^{\varepsilon 0}_N\left(\tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}\right)\right\|_{L_2(\Omega)}\right|$. Для цього достатньо оцінити $\left\|y^\varepsilon\left(\tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}\right) - y^{\varepsilon 0}_N\left(\tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}\right)\right\|_{L_2(\Omega)}$.

Оскільки $y^\varepsilon(x,t)$ та $y^{\varepsilon 0}_N(x,t)$ є розв'язками крайової задачі (3) з керуваннями $u^\varepsilon[y^\varepsilon]$ і $u^0_N[y^{\varepsilon 0}_N]$ відповідно, то $d^{\varepsilon 0}_N(x,t) = y^\varepsilon(x,t) - y^{\varepsilon 0}_N(x,t)$ — розв'язок крайової задачі

$$(d^{\varepsilon 0}_N)_t = A^\varepsilon d^{\varepsilon 0}_N + g^\varepsilon(u^\varepsilon[y^\varepsilon] - u^0_N[y^{\varepsilon 0}_N]),$$

$$d^{\varepsilon 0}_N|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$d^{\varepsilon 0}_N|_{t=t_0} = 0.$$

Звідси, використовуючи (10), знаходимо

$$\|y^\varepsilon(t) - y^{\varepsilon 0}_N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\|g^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}}{2(\lambda^\varepsilon_1)^2} \int\limits_{t_0}^{t} (u^\varepsilon[y^\varepsilon] - u^0_N[y^{\varepsilon 0}_N])^2 ds.$$

Оскільки $(\lambda^\varepsilon_1)^2 \to (\lambda^0_1)^2, \ \varepsilon \to 0$, то

$$\exists\, \widetilde{\varepsilon} > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}) : \quad (\lambda^0_1)^2 \leq \sqrt[4]{2}(\lambda^\varepsilon_1)^2 \tag{30}$$

(зауважимо, що з (30) видно, що при достатньо малих ε припущення 1 випливає з припущення 4).

Отже, при $t = \tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}$

$$\|y^\varepsilon(t) - y_N^{\varepsilon 0}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big|_{t=\tau^0+\frac{\eta}{40\xi^2}} \leq \frac{\|g^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}}{2(\lambda_1^\varepsilon)^2}\frac{\eta}{5} = \frac{\sqrt[4]{2}\gamma\eta(\lambda_1^0)^2}{9}.$$

Тому при достатньо малих η можна вважати, що

$$\left\|y_N^{\varepsilon 0}\left(\tau^0 + \frac{\eta}{40\xi^2}\right)\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\left\|y^\varepsilon\left(\tau^0 + \frac{\eta}{40\xi^2}\right)\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{31}$$

2. Розглянемо тепер проміжок часу $\left[\tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}\,, +\infty\right)$. Для розв'язку $y^\varepsilon(x,t)$ з (3), (15) маємо

$$y_t^\varepsilon = A^\varepsilon y^\varepsilon + g^\varepsilon(y^\varepsilon, \Re^\varepsilon). \tag{32}$$

Помножимо (32) скалярно на y^ε. Тоді, враховуючи (6), отримуємо

$$(y_t^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq -(\lambda_1^\varepsilon)^2\|y^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\|y^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}\|\Re^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отже,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + (\lambda_1^\varepsilon)^2\|y^\varepsilon\|^2 \leq \|g^\varepsilon\|\|\Re^\varepsilon\|\|y^\varepsilon\|^2 \tag{33}$$

(тут і далі $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$).

Використовуючи рівність Парсеваля, оцінюємо

$$\|\Re^\varepsilon\|^2 = \left\|-\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i^\varepsilon X_i^\varepsilon}{(\lambda_i^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4\gamma^2}\frac{(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^4(1+\gamma_i^\varepsilon)} \leq \frac{\|g^\varepsilon\|^2}{4\gamma^2(\lambda_1^\varepsilon)^4},$$

звідки, враховуючи (30), одержуємо

$$\|\Re^\varepsilon\| \leq \frac{\|g^\varepsilon\|}{2\gamma(\lambda_1^\varepsilon)^2} \leq \frac{\sqrt[4]{2}\|g^\varepsilon\|}{2\gamma(\lambda_1^0)^2}.$$

Підставляючи останню оцінку в (33) і беручи до уваги (21), маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + (\lambda_1^\varepsilon)^2\|y^\varepsilon\|^2 \leq \frac{\sqrt[4]{2}}{2\gamma}\frac{\|g^\varepsilon\|^2}{(\lambda_1^0)^2}\|y^\varepsilon\|^2 \leq \frac{\sqrt[4]{2}}{2\gamma}\frac{(\lambda_1^0)^4\gamma}{(\lambda_1^0)^2}\|y^\varepsilon\|^2 \leq \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\lambda_1^0)^2\|y^\varepsilon\|^2,$$

або, ще раз скориставшись (30),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + \frac{(\lambda_1^0)^2}{\sqrt[4]{2}}\|y^\varepsilon\|^2 \leq \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\lambda_1^0)^2\|y^\varepsilon\|^2.$$

Отже,

$$\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + \delta\|y^\varepsilon\|^2 \le 0,$$

де $\delta = \sqrt[4]{2}(\lambda_1^0)^2(\sqrt{2}-1)$, а тому

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2 \le \|y^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)}, \tag{34}$$

де $\widetilde{t}_0 = \tau^0 + \dfrac{\eta}{40\xi^2}$, причому $\delta > 0$ і не залежить від ε.

Аналогічна оцінка має місце і для $y_N^{\varepsilon 0}(x,t)$:

$$\frac{d}{dt}\|y_N^{\varepsilon 0}\|^2 + (\lambda_1^0)^2\left(\frac{2}{\sqrt[4]{2}} - 1\right)\|y_N^{\varepsilon 0}\|^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\|y_N^{\varepsilon 0}\|^2 + \delta\|y_N^{\varepsilon 0}\|^2 \le 0,$$

звідки, беручи до уваги (31), остаточно знаходимо оцінку

$$\|y_N^{\varepsilon 0}(t)\|^2 \le \|y_N^{\varepsilon 0}(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)} \le 2\|y^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)}. \tag{35}$$

З оцінок (34), (35) неважко дістати оцінки для відповідних керувань:

$$(u^\varepsilon[y^\varepsilon])^2 = (\Re^\varepsilon, y^\varepsilon)^2 \le \frac{1}{2\gamma}\|y^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)},$$

$$(u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}])^2 = (\Re_N^0, y_N^{\varepsilon 0})^2 \le \frac{1}{2\gamma}\|y^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)}.$$

Звідси для $t \ge \widetilde{t}_0$ отримуємо

$$\int_t^\infty (u^\varepsilon[y^\varepsilon] - u_N^0[y_n^{\varepsilon 0}])^2 ds \le \int_t^\infty (u^\varepsilon[y^\varepsilon])^2 ds + \int_t^\infty (u_N^0[y_n^{\varepsilon 0}])^2 ds \le \frac{1}{\gamma\delta}\|y^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)}. \tag{36}$$

Крім того, якщо ввести позначення

$$J_t(v) = \int_t^\infty \left(\int_\Omega (y^\varepsilon(x,s))^2 dx + \gamma v^2(s)\right) ds$$

(при $t = t_0$ маємо $J(v)$), то, враховуючи (34) – (36), знаходимо

$$\left|J_t(u^\varepsilon[y^\varepsilon]) - J_t(u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}])\right| \le \frac{4}{\delta}\|y^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)}. \tag{37}$$

З (36), (37) маємо

$$\exists\, T \ge \widetilde{t}_0 \quad \forall\, t \ge T: \quad \int_t^\infty (u^\varepsilon[y^\varepsilon] - u_N^0[y_n^{\varepsilon 0}])^2 ds < \frac{\eta}{5}, \quad \left|J_t(u^\varepsilon[y^\varepsilon]) - J_t(u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}])\right| < \frac{\eta}{5}, \tag{38}$$

причому T не залежить від ε.

Таким чином, залишилося переконатися в справедливості оцінок (27), (28) при інтегруванні по проміжках $[\widetilde{t}_0, T]$ і $[t_0, T]$ відповідно.

3. Спочатку встановимо близькість значень керувань, а потім близькість значень цільових функцій на проміжку $[t_0, T]$, після чого, з урахуванням (38), отримаємо (27), (28).

Розглянемо на інтервалі $[\widetilde{t}_0, T]$ задачу (3) з керуванням (23). Оскільки для розв'язку цієї задачі має місце оцінка (35), то, позначаючи

$$F_N^{\varepsilon 0} := g^\varepsilon(x)(y_N^{\varepsilon 0}, \Re_N^0) = g^\varepsilon(x)\left(y_N^{\varepsilon 0}, -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^N \frac{g_i^0 X_i^0}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)}\right),$$

отримуємо, що $F_N^{\varepsilon 0} \in L_\infty(\tilde{t}_0, T; L_2(\Omega))$ і з (21), (35) для всіх $t \in [\widetilde{t}_0, T]$ знаходимо

$$\|F_N^{\varepsilon 0}(t)\| \le (\lambda_1^0)^2 \|y_N^{\varepsilon 0}(\widetilde{t}_0)\|. \tag{39}$$

З оцінок (11) випливає, що якщо $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ та $v \in U$, тобто $|v(t)| \le \xi$ майже скрізь на $\mathbb{R}^+$, то для розв'язку $y^\varepsilon(x,t)$ крайової задачі (3) виконується оцінка

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^\infty (\lambda_i^\varepsilon)^2 (y_i^\varepsilon(t))^2 \le 2\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\xi^2 \|g^\varepsilon\|^2.$$

Отже, для всіх t $y_N^{\varepsilon 0}(t) \in H_0^1(\Omega)$, зокрема $y_N^{\varepsilon 0}(\widetilde{t}_0) \in H_0^1(\Omega)$ і

$$\|y_N^{\varepsilon 0}(\widetilde{t}_0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 2\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\xi^2\|g^\varepsilon\|^2. \tag{40}$$

Тоді можна отримати оцінку

$$\int_{\widetilde{t}_0}^t \|(y_N^{\varepsilon 0})_s\|^2 ds + \|y_N^{\varepsilon 0}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|y_N^{\varepsilon 0}(\widetilde{t}_0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (\lambda_1^0)^4 (T - \widetilde{t}_0)\|y_N^{\varepsilon 0}(\widetilde{t}_0)\|^2 \le$$

$$\le 2\left[\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \xi^2\|g^\varepsilon\|^2 + (\lambda_1^0)^4(T-\widetilde{t}_0)\|\varphi\|^2 + \sqrt[4]{2}(\lambda_1^0)^2\xi^2\|g^\varepsilon\|^2(T-\widetilde{t}_0)\right]. \tag{41}$$

Поширимо оцінку (41) на $t \in [t_0, \widetilde{t}_0]$, беручи до уваги той факт, що в цьому випадку $|v(t)| \le \xi$.

З (13), (40) маємо

$$\int_{\widetilde{t}_0}^t \|(y_N^{\varepsilon 0})_s\|^2 ds \le 2\left(\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\xi^2\|g^\varepsilon\|^2\right)(t - t_0),$$

$$\|y_N^{\varepsilon 0}(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 2\left(\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\xi^2\|g^\varepsilon\|^2\right). \tag{42}$$

Таким чином, з (41), (42) і (21) для всіх $t \in [t_0, T]$ отримуємо

$$\int_{t_0}^{t} \|(y_N^{\varepsilon 0})_s\|^2 ds + \|y_N^{\varepsilon 0}(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2 \Big[\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \gamma\xi^2(\lambda_1^0)^4 +$$
$$+ (T - t_0) \Big(\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (\lambda_1^0)^4\|\varphi\|^2 + 2\gamma\xi^2(\lambda_1^0)^4 + \sqrt[4]{2}\gamma(\lambda_1^0)^6\xi^2 \Big) \Big]. \tag{43}$$

Тоді, згідно з лемою про компактність, існує функція $z^\varepsilon = z^\varepsilon(x,t)$ така, що $y_N^{\varepsilon 0} \to$ $\to z^\varepsilon$, $N \to \infty$ в сенсі наведених нижче збіжностей принаймні по деякій підпослідовності

$$y_N^{\varepsilon 0} \to z^\varepsilon \text{ слабко в } L_2(t_0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$y_N^{\varepsilon 0} \to z^\varepsilon \text{ в } L_2(t_0, T; L_2(\Omega)),$$

$$(y_N^{\varepsilon 0})_t \to z_t^\varepsilon \text{ слабко в } L_2(t_0, T; L_2(\Omega)),$$

$$y_N^{\varepsilon 0}(t) \to z^\varepsilon(t) \text{ слабко в } L_2(\Omega) \text{ для будь-якого } t \in [t_0, T], \tag{44}$$

$$y_N^{\varepsilon 0}(t) \to z^\varepsilon(t) \text{ сильно в } L_2(\Omega) \text{ для майже всіх } t \in [t_0, T],$$

$$y_N^{\varepsilon 0}(x,t) \to z^\varepsilon(x,t) \text{ для майже всіх } (x,t) \in \Omega \times [t_0, T]$$

при $N \to \infty$.

Для того щоб перейти до границі при $N \to \infty$ в крайовій задачі (3) з керуванням (23), необхідно довести збіжність $\Re_N^0$. Потрібну збіжність забезпечує лема 5.

Звідси переходом до границі в крайовій задачі (3) отримуємо, що z^ε — розв'язок крайової задачі

$$z_t^\varepsilon = A^\varepsilon z^\varepsilon + g^\varepsilon \begin{cases} (z^\varepsilon, \Re^0), \ t \in (\tau_0, T], \\ \xi, \ [t_0, \tau_0], \end{cases}$$
$$z^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \tag{45}$$
$$z^\varepsilon|_{t=t_0} = \varphi,$$

причому цей розв'язок є єдиним у класі $C([t_0, T]; L_2(\Omega))$, а тому збіжність відбувається по всій послідовності.

4. Оскільки

$$\|\Re^0\| \leq \frac{\|g^0\|}{2\gamma(\lambda_1^0)^2}, \tag{46}$$

то для розв'язку z^ε крайової задачі (45) отримуємо оцінку

$$\|z^\varepsilon(t)\|^2 \leq \|z^\varepsilon(\widetilde{t}_0)\|^2 e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)} \leq c e^{-\delta(t-\widetilde{t}_0)}, \tag{47}$$

де c не залежить від ε, N і отримується внаслідок (12), (21) і (30).

Оцінки (46), (47) дозволяють стверджувати, що для z^ε справджується оцінка типу (43). Отже, існує функція $z^0 = z^0(x,t)$ така, що $z^\varepsilon \to z^0$, $\varepsilon \to 0$ по деякій підпослідовності в сенсі збіжностей (44).

Як ми вже встановили, z^ε — розв'язок крайової задачі (45). Розкладаючи функції цієї крайової задачі за ортонормованим базисом $\{X_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$, для коефіцієнтів Фур'є $\{z_i^\varepsilon(t)\}_{i=1}^\infty$ функції $z^\varepsilon = z^\varepsilon(x,t)$ отримуємо задачу Коші

$$\dot{z}_i^\varepsilon = -(\lambda_i^\varepsilon)^2 z_i^\varepsilon + g_i^\varepsilon \begin{cases} (z^\varepsilon, \Re^0), \ t \in (\tau^0, T], \\ \xi, \ t \in [t_0, \tau^0], \end{cases}$$
$$z_i^\varepsilon|_{t=t_0} = \varphi_i^\varepsilon. \tag{48}$$

Оскільки $z^\varepsilon \to z^0$ в сенсі збіжностей (44), то в задачі Коші можемо перейти до границі при $\varepsilon \to 0$. Отримуємо, що $\{z_i^0(t)\}_{i=1}^\infty$ — розв'язок задачі Коші

$$\dot{z}_i^0 = -(\lambda_i^0)^2 z_i^0 + g_i^0 \begin{cases} (z^0, \Re^0), \ t \in (\tau^0, T], \\ \xi, \ t \in [t_0, \tau^0], \end{cases}$$

$$z_i^0|_{t=t_0} = \varphi_i^0.$$

Останнє означає, що функція $p(x,t) = \sum\limits_{i=1}^\infty z_i^0(t) X_i^0(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$p_t = A^0 p + g^0 \begin{cases} (z^0, \Re^0), \ t \in (\tau_0, T], \\ \xi, \ [t_0, \tau_0], \end{cases}$$

$$p|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$p|_{t=t_0} = \varphi.$$

Покажемо тепер, що при $t \in [t_0, T]$ $p \equiv z^0$. Для цього при кожному $t \in [\widetilde{t_0}, T]$ оцінимо

$$\|z^\varepsilon(t) - p(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^\infty (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon - z_i^0(t) X_i^0) \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{i=1}^k (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon - z_i^0(t) X_i^0) \right\| + \left\| \sum_{i=k+1}^\infty (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon - z_i^0(t) X_i^0) \right\| = D_1 + D_2$$

для довільного фіксованого k.

Оскільки для довільного $t \in [t_0, T]$ $z^\varepsilon(t) \to z^0(t)$, $\varepsilon \to 0$ слабко в $L_2(\Omega)$ по підпослідовності та $X_i^\varepsilon \to X_i^0$, $\varepsilon \to 0$ сильно в $L_2(\Omega)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $D_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0$ по цій послідовності.

Оцінимо D_2.

Для розв'язку задачі Коші (48) знаходимо

$$(z_i^\varepsilon(t))^2 \leq 2\frac{(g_i^\varepsilon)^2\xi^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^4} + 2(z_i^\varepsilon(\widetilde{t}_0))^2 e^{-2(\lambda_i^\varepsilon)^2(t-\widetilde{t}_0)}.$$

Аналогічно

$$(z_i^0(t))^2 \leq 2\frac{(g_i^0)^2\xi^2}{(\lambda_i^0)^4} + 2(z_i^0(\widetilde{t}_0))^2 e^{-2(\lambda_i^0)^2(t-\widetilde{t}_0)}.$$

Тому, оскільки з (20) випливає, що для достатньо великих k та достатньо малих ε

$$0 < (\lambda_{k+1}^0)^2 - 1 < (\lambda_{k+1}^0)^2 - c_{k+1}^\varepsilon \leq (\lambda_{k+1}^\varepsilon)^2,$$

маємо

$$D_2^2 \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} (z_i^\varepsilon(t))^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} (z_i^0(t))^2 \leq$$

$$\leq \frac{2\xi^2}{((\lambda_{k+1}^0)^2-1)^2}\|g^\varepsilon\|^2 + 2ce^{-2((\lambda_{k+1}^0)^2-1)(t-\widetilde{t}_0)} +$$

$$+ \frac{2\xi^2}{(\lambda_{k+1}^0)^4}\|g^0\|^2 + 2ce^{-2(\lambda_{k+1}^0)^2(t-\widetilde{t}_0)} \leq$$

$$\leq \frac{4\gamma\xi^2(\lambda_1^0)^4}{((\lambda_{k+1}^0)^2-1)^2} + 4ce^{-2((\lambda_i^0)^2-1)(t-\widetilde{t}_0)} \to 0,\ k \to \infty.$$

Таким чином,

$$\forall\,\zeta > 0 \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, \widetilde{\widetilde{\varepsilon}} > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \widetilde{\widetilde{\varepsilon}}) \quad \forall\, t \in [\widetilde{t}_0, T]: \quad D_1 < \frac{\zeta}{2}, \quad D_2 < \frac{\zeta}{2}.$$

Звідси $z^\varepsilon(t) \to p(t)$, $\varepsilon \to 0$ при $[\widetilde{t}_0, T]$ в $L_2(\Omega)$, а тому внаслідок єдиності границі $p \equiv z^0$ і збіжність відбувається по всій послідовності.

Отже, z^0 — розв'язок крайової задачі

$$z_t^0 = A^0 z^0 + g^0 \begin{cases} (z^0, \Re^0),\ t \in (\tau_0, T], \\ \xi,\ [t_0, \tau_0], \end{cases}$$

$$z^0|_{\partial\Omega} = 0, \tag{49}$$

$$z^0|_{t=t_0} = \varphi.$$

5. Розглянемо крайову задачу (3) з керуванням (15). Оскільки для y^ε справджується оцінка (34), то $\|y^\varepsilon(t)\| \le \|y^\varepsilon(\widetilde{t_0})\|$, і, отже,

$$|(y^\varepsilon(t), \Re^\varepsilon)| \le \|y^\varepsilon(t)\| \left\| -\frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^\varepsilon X_i^\varepsilon}{(\lambda_i^\varepsilon)^2 (1+\gamma_i^\varepsilon)} \right\| \le \frac{\|y^\varepsilon(\widetilde{t_0})\| \|g^\varepsilon\|}{2\gamma (\lambda_1^\varepsilon)^2}.$$

Звідси з урахуванням (21), (30) остаточно знаходимо

$$\|g^\varepsilon(y^\varepsilon(t), \Re^\varepsilon)\| \le \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (\lambda_1^0)^2 \|y^\varepsilon(\widetilde{t_0})\| \le (\lambda_1^0)^2 \|y^\varepsilon(\widetilde{t_0})\|.$$

Таким чином, ми отримали оцінку вигляду (39). Повтрюючи міркування з п. 3, приходимо до висновку, що для y^ε буде справедливою оцінка (43) і, отже, існує функція $y^0 = y^0(x,t)$ така, що $y^\varepsilon \to y^0$ при $\varepsilon \to 0$ по деякій підпослідовності в сенсі збіжностей (44).

Для того щоб перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ в крайовій задачі (3) з керуванням $u^\varepsilon[y^\varepsilon]$, що задається формулою (15), скористаємося лемою 6.

Таким чином, аналогічно попередньому можемо перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ в крайовій задачі (3) з керуванням $u^\varepsilon[y^\varepsilon]$, що задається формулою (15), і внаслідок єдиності розв'язку крайової задачі (49) отримати, що $z^0 \equiv y^0$ і всі розглядувані збіжності насправді відбуваються по всій послідовності.

Отже, ми показали, що

$$\begin{array}{ccccc} y_N^{\varepsilon 0} & \xrightarrow{N\to\infty} & z^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon\to 0} & z^0 \\ & & & & ||| \\ & & y^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon\to 0} & y^0 \end{array}$$

і для керувань

$$\begin{array}{ccccc} u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}] = (y_N^{\varepsilon 0}, \Re_N^0) & \xrightarrow{N\to\infty} & (z^\varepsilon, \Re^0) & \xrightarrow{\varepsilon\to 0} & (z^0, \Re^0) \\ & & & & ||| \\ & & u^\varepsilon[y^\varepsilon] = (y^\varepsilon, \Re^\varepsilon) & \xrightarrow{\varepsilon\to 0} & (y^0, \Re^0), \end{array}$$

причому збіжність керувань є поточковою на $[t_0, T]$.

Звідси за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N}\, \exists\, \varepsilon_2 > 0\, \forall\, N \ge N_2\, \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_2) : \int_{\widetilde{t_0}}^{T} ((y_N^{\varepsilon 0}, \Re_N^0) - (y^\varepsilon, \Re^\varepsilon))^2 ds < \eta$$

і з (29), (38) для $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ і $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\widetilde{\varepsilon}}\}$ остаточно знаходимо

$$\forall\, N \ge N_0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \int_{t_0}^{\infty} (u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}] - u^\varepsilon[y^\varepsilon])^2 dt < \eta.$$

6. Оцінимо

$$\left|J(u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}]) - J(u^\varepsilon[y^\varepsilon])\right| = \left|\int_{t_0}^{\infty} [\|y_N^{\varepsilon 0}\|^2 - \|y^\varepsilon\|^2 + \gamma((u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}])^2 - (u^\varepsilon[y^\varepsilon])^2)]dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{\infty} \left[\left|\|y_N^{\varepsilon 0}\| - \|y^\varepsilon\|\right| \left(\|y_N^{\varepsilon 0}\| + \|y^\varepsilon\|\right) + \right.$$

$$\left. +\gamma \left|u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}] - u^\varepsilon[y^\varepsilon]\right| \left(|u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}]| + |u^\varepsilon[y^\varepsilon]|\right)\right] dt \leq$$

$$\leq k_1 \left(\int_{t_0}^{\infty} \|y_N^{\varepsilon 0} - y^\varepsilon\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + k_2 \left(\int_{t_0}^{\infty} (u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}] - u^\varepsilon[y^\varepsilon])^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

де сталі k_1, k_2 отримуються з оцінок (12), (14), (21), (30), (36). З останньої нерівності, використовуючи (14), (21), (30), знаходимо

$$\left|J(u_N^0[y_N^{\varepsilon 0}]) - J(u^\varepsilon[y^\varepsilon])\right| < \widetilde{k}\sqrt{\eta}.$$

Тоді, застосовуючи всі попередні міркування для числа $\min\left\{\eta, \dfrac{\eta^2}{\widetilde{k}}\right\}$, отримуємо обидві оцінки (27), (28) одночасно, що і завершує доведення теореми.

Висновки. В роботі побудовано й обґрунтовано наближене усереднене синтезоване керування для параболічної задачі оптимальної стабілізації зі швидко осцилюючими коефіцієнтами у випадку виходу керування на обмеження. Доведено збіжність побудованого наближеного керування до точного та близькість значень критеріїв якості на відповідних керуваннях.

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
3. *Капустян В. Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 58–67.
4. *Капустян О. А.* Наближений синтез оптимального керування для задачі оптимальної стабілізації зі швидко осцилюючими коефіцієнтами // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 1. — С. 29–38.
5. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматгиз, 1993. — 461 с.

Одержано 31.03.2006