УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІТО

А. П. Креневич

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
e-mail: krenevich@univ.kiev.ua

We study conditions for asymptotic equivalence in mean square and with probability one of nonlinear ordinary and stochastic Ito systems.

Досліджується питання асимптотичної еквівалентності систем нелінійних звичайних і стохастичних рівнянь у сенсі середнього квадратичного та з імовірністю одиниця.

1. Вступ. Якісна теорія систем стохастичних диференціальних рівнянь займає значне місце у загальних питаннях дослідження стохастичних рівнянь. Одним із найбільш важливих розділів даної теорії є вивчення стійкості розв'язків стохастичних систем у різних імовірнісних сенсах, наприклад стійкості в середньому квадратичному, з імовірністю одиниця, за ймовірністю. Даним питанням присвячено низку робіт (див., наприклад, [1–3]). Досить широко дані питання висвітлено в монографіях [4–6].

У даній роботі використано інший підхід до вивчення асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних стохастичних систем, а саме, відшукання систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків яких є подібною до поведінки розв'язків стохастичної системи. Таким чином, питання стійкості стохастичної системи зводиться до питання стійкості системи звичайних диференціальних рівнянь, що значно спрощує дослідження вихідної системи. Стохастичні системи, асимптотична поведінка розв'язків яких є подібною, як і у випадку звичайних диференціальних рівнянь, будемо називати асимптотично еквівалентними. Природно, що при дослідженні стохастичних систем виникають поняття асимптотичної еквівалентності в різних імовірнісних сенсах. Автору відомі деякі результати досліджень у даному напрямку (див., наприклад, [7–8]). Але в зазначених працях вивчається питання асимптотичної поведінки в дещо іншому сенсі для автономних нелінійних стохастичних рівнянь.

У даній роботі отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності систем нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто та систем звичайних диференціальних рівнянь у сенсі середнього квадратичного та з імовірністю 1.

2. Постановка задачі. Будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = f(t,x)dt \tag{1}$$

з початковою умовою $x(0) = x_0, t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n$.

Поряд із системою (2) на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq$

$\geq 0\} \subset \mathbf{F}$ розглядатимемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy = f(t,y)dt + \sigma(t,y)dW_t \tag{2}$$

з початковою умовою $y(0) = y_0$ ($y_0 = y_0(\omega)$) такою, що $\mathrm{E}|y_0|^2 < \infty$, $t \geq 0$, $y \in \mathbf{R}^n$. Тут $f(t,x), \sigma(t,y) \in C(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n)$ — n-вимірні функції, такі, що виконуються умови:

а) існує додатна стала L така, що для довільних x, $y \in \mathbf{R}^n$ і $t \in [0,\infty)$ виконується оцінка

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|; \tag{3}$$

б) існує додатна стала A така, що для довільних $x \in \mathbf{R}^n$ і $t \in [0,\infty)$ виконується оцінка

$$|f(t,x)| \leq A(1+|x|); \tag{4}$$

в) існує функція $\alpha(t)$, обмежена на $t \in [0,\infty)$, така, що для довільних $x \in \mathbf{R}^n$ і $t \in$ $\in [0,\infty)$ виконується оцінка

$$|\sigma(t,x)| \leq \alpha(t)(1+|x|). \tag{5}$$

W_t — стандартний скалярний вінерів процес, визначений для $t \geq 0$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$; $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — потік σ-алгебр, відносно якого процес W_t є узгодженим.

Сформульованих умов досить для існування сильного розв'язку задачі Коші для системи стохастичних диференціальних рівнянь (2) [9].

Означення 1. *Якщо кожному сильному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\,|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

то система (2) називається асимптотично еквівалентною системі (1) у середньому квадратичному.

Означення 2. *Якщо кожному сильному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що*

$$\mathrm{P}\,\{\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0\} = 1,$$

то система (2) називається асимптотично еквівалентною системі (1) з імовірністю 1.

3. Основні результати. Наступна теорема наводить достатні умови асимптотичної еквівалентності в середньому квадратичному та з імовірністю 1 системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто системі звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 1. *Нехай розв'язки $x(t)$ системи (1) задовольняють умову: існує стала $K_1 \geq$ ≥ 0 така, що для довільних $t \geq s \geq 0$*

$$|x(t)| \leq K_1|x(s)|, \tag{6}$$

і, крім цього, виконуються умови (3) – (5), причому для $t \geq 0$

$$\alpha(t) \leq K_2 e^{-\gamma t},$$

де K_2, γ *— деякі додатні сталі, не залежні від* t, *причому* $\gamma > L$.

Тоді:

а) система (2) асимптотично еквівалентна системі (1) у середньому квадратичному;

б) система (2) асимптотично еквівалентна системі (1) з імовірністю 1.

Доведення. Згідно з умовами теореми, розв'язок $y(t)$ системи (2) існує і єдиний.

1. Встановимо допоміжну оцінку для розв'язків системи (1).

Нехай $x_1(t)$ та $x_2(t)$ — довільні розв'язки системи (1), такі, що $x_1(0) = x_1^0$ і $x_2(0) = x_2^0$. Тоді з леми Гронуолла – Беллмана отримаємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| e^{L|t-s|}. \tag{7}$$

2. Розглянемо довільний фіксований розв'язок $y(t)$ системи (2).

Нехай $\{x_n(t) \,|\, n \geq 0\}$ — послідовність розв'язків системи (1) таких, що

$$x_n(n) = y(n).$$

Для $t \in [n, n+1]$ оцінимо різницю

$$\mathrm{E}\,|x_n(t) - y(t)|^2 \leq 3\mathrm{E}\left|\int_n^t \{f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\} d\tau\right|^2 +$$

$$+ 3\mathrm{E}\left|\int_n^t \{\sigma(\tau, x_n(\tau)) - \sigma(\tau, y(\tau))\} dW_\tau\right|^2 + 3\mathrm{E}\left|\int_n^t \sigma(\tau, x_n(\tau)) dW_\tau\right|^2 \leq$$

$$\leq 6L^2 \int_n^{n+1} \mathrm{E}\,|x_n(\tau) - y(\tau)|^2 d\tau + 3 \int_n^{n+1} \alpha^2(\tau)(2 + 2\mathrm{E}\,|x_n(\tau)|^2) d\tau \leq$$

$$\leq 6L^2 \int_n^{n+1} \mathrm{E}\,|x_n(\tau) - y(\tau)|^2 d\tau + 6K_2^2 \int_n^{n+1} e^{-2\gamma\tau}(1 + K_1^2 \mathrm{E}\,|x_n(0)|^2) d\tau.$$

Звідси, використовуючи лему Гронуолла – Беллмана, отримуємо

$$\mathrm{E}\,|x_n(t) - y(t)|^2 \leq 6K_2^2 e^{6L^2} \int_n^{n+1} e^{-2\gamma\tau}(1 + K_1^2 \mathrm{E}\,|x_n(0)|^2) d\tau \leq$$

$$\leq 6K_2^2 e^{6L^2}(1 + K_1^2 \mathrm{E}\,|x_n(0)|^2) e^{-2\gamma n}. \tag{8}$$

Підставляючи в останню нерівність $t = n+1$, знаходимо

$$\mathrm{E}\,|x_n(n+1) - y(n+1)|^2 = \mathrm{E}\,|x_n(n+1) - x_{n+1}(n+1)|^2 \le$$
$$\le 6K_2^2 e^{6L^2}(1 + K_1^2 \mathrm{E}\,|x_n(0)|^2)e^{-2\gamma n}.$$

З урахуванням нерівності (7) отримуємо оцінку

$$\mathrm{E}\,|x_n(0) - x_{n+1}(0)|^2 \le e^{2L(n+1)}\mathrm{E}\,|x_n(n+1) - x_{n+1}(n+1)|^2 \le$$
$$\le C_1^2(1 + K_1^2 \mathrm{E}\,|x_n(0)|^2)e^{-2(\gamma - L)n}, \tag{9}$$

де $C_1^2 := 6K_2^2 e^{6L^2+2L}$.

3. Покажемо, що послідовність $\mathrm{E}\,|x_n(0)|^2$ є обмеженою. Для цього вводимо норму $\|\cdot\| := \sqrt{\mathrm{E}\,|\cdot|^2}$. Тоді з оцінки (9) маємо

$$\|x_n(0) - x_{n+1}(0)\| \le C_1(1 + K_1\|x_n(0)\|)e^{-(\gamma - L)n}. \tag{10}$$

Враховуючи нерівність (10), оцінюємо вираз

$$1 + K_1\|x_n(0)\| = 1 + K_1\|x_n(0) - x_{n-1}(0) + x_{n-1}(0)\| \le$$
$$\le 1 + K_1\|x_{n-1}(0)\| + K_1\|x_n(0) - x_{n-1}(0)\| \le$$
$$\le 1 + K_1\|x_{n-1}(0)\| + C_1K_1(1 + K_1\|x_{n-1}(0)\|)e^{-(\gamma - L)(n-1)} =$$
$$= (1 + K_1\|x_{n-1}(0)\|)(1 + C_1K_1 e^{-(\gamma - L)(n-1)}) \le \ldots$$
$$\ldots \le (1 + K_1\|x_0(0)\|)\prod_{k=1}^{n}(1 + C_1K_1 e^{-(\gamma - L)(n-k)}).$$

Але

$$\ln \prod_{k=1}^{n}\left(1 + C_1K_1 e^{-(\gamma - L)(n-k)}\right) \le \frac{C_1K_1 e^{\gamma - L}}{e^{\gamma - L} - 1}\left(1 - e^{-n(\gamma - L)}\right).$$

Таким чином,

$$1 + K_1\|x_n(0)\| \le C_2(1 + K_1\|x_0(0)\|), \tag{11}$$

де

$$C_2 = \exp\frac{C_1K_1 e^{\gamma - L}}{e^{\gamma - L} - 1}.$$

Отже, для $t \in [n, n+1]$ з урахуванням оцінок (8), (11) маємо

$$\|x_n(t) - y(t)\| \le C_3(1 + K_1\|x_0(0)\|)e^{-\gamma n}, \tag{12}$$

де $C_3 := C_1C_2e^{-L}$.

4. Доведемо виконання п. а) теореми. З нерівності (10) отримуємо оцінку

$$\|x_n(0) - x_{n+1}(0)\| \leq C_1C_2(1 + K_1\|x_0(0)\|)e^{-(\gamma-L)n}.$$

Остання нерівність означає, що існує $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(0)$ в сенсі середнього квадратичного.

Визначимо розв'язок $x_\infty(t)$ з початкової умови $x_\infty(0) = x_\infty$.

Виберемо довільне $t \geq 0$. Знайдемо таке n, що $n \leq t \leq n+1$. Тоді

$$\mathrm{E}\,|y(t) - x_\infty(t)|^2 \leq 2\mathrm{E}\,|y(t) - x_n(t)|^2 + 2\mathrm{E}\,|x_n(t) - x_\infty(t)|^2.$$

З нерівності (12) випливає, що вираз $\mathrm{E}\,|y(t) - x_n(t)|^2$ прямує до нуля, як тільки $n \to \infty$.

Зауважимо, що оскільки $n \leq t \leq n+1$, то t прямує до нескінченності одночасно з n.

Для оцінки другого доданка доведемо, що для довільного $T \geq 0$

$$x_n(t) \to x_\infty(t), \quad n \to \infty, \tag{13}$$

рівномірно на відрізку $[0,T]$ в середньому квадратичному.

Для цього доведемо збіжність ряду

$$S_\infty(t) := x_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1}(t) - x_k(t)).$$

Тоді, очевидно, що частинна сума

$$S_n(t) := x_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}(t) - x_k(t))$$

дорівнює $x_n(t)$. Отже, для довільного фіксованого $T > 0$, враховуючи оцінки (7) та (12), маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\|S_n(t) - S_\infty(t)\| = \sup_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}(x_{k+1}(t) - x_k(t))\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=n}^{\infty}\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq C_3(1 + K_1\|x_0(0)\|)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\gamma k}e^{L(k-n)} =$$

$$= C_3(1 + K_1\|x_0(0)\|)e^{-\gamma n}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\gamma-L)k}.$$

З останньої нерівності можемо зробити висновок, що $S_n(t) \to S_\infty(t)$, $n \to \infty$, рівномірно на $t \in [0,T]$. Тоді оскільки $S_\infty(0) = x_\infty(0)$, то $S_\infty(t) = x_\infty(t)$, що й доводить співвідношення (13).

Отже, $\|x_n(t) - x_\infty(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином,

$$\mathrm{E}|y(t) - x_\infty(t)|^2 \to 0, \quad t \to \infty.$$

5. Доведемо виконання п. б) теореми. Для введеної вище послідовності $\{x_n(t) | n \geq 0\}$, $t \in [n, n+1]$, і деякої додатної послідовності дійсних чисел $\{\varepsilon_n | n \geq 0\}$ оцінимо вираз

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]} |x_n(t) - y(t)| \geq \varepsilon_n\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]} \left|\int_n^t f(\tau, x_n(\tau))d\tau - \int_n^t f(\tau, y(\tau))d\tau - \int_n^t \sigma(\tau, y(\tau))dW_\tau\right| \geq \varepsilon_n\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]} \left|\int_n^t (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))d\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_n}{3}\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]} \left|\int_n^t (\sigma(\tau, x_n(\tau)) - \sigma(\tau, y(\tau)))dW_\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_n}{3}\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]} \left|\int_n^t \sigma(\tau, x_n(\tau))dW_\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_n}{3}\right\}.$$

Оцінимо окремо кожен з доданків у правій частині останньої нерівності. Використовуючи нерівність Чебишова для додатної випадкової величини й оцінки (7), (12), отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]} \left|\int_n^t (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))d\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_n}{3}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{3}{\varepsilon_n} \mathrm{E} \sup_{t\in[n,n+1]} \left|\int_n^t (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{3L}{\varepsilon_n} \int_n^{n+1} \mathrm{E}|x_n(\tau) - y(\tau)|d\tau \leq \frac{3L}{\varepsilon_n} C_3(1 + K_1\|x_0(0)\|)e^{-\gamma n}.$$

Використовуючи властивості стохастичного інтеграла Вінера – Іто [9, с. 20] і оцінки

(7), (12), оцінюємо другий доданок:

$$
\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]}\left|\int_n^t (\sigma(\tau,x_n(\tau))-\sigma(\tau,y(\tau)))dW_\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_n}{3}\right\} \leq
$$

$$
\leq \frac{9}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n+1} \mathrm{E}|\sigma(\tau,x_n(\tau))-\sigma(\tau,y(\tau))|^2 d\tau \leq \frac{9L^2}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n+1} \mathrm{E}|x_n(\tau)-y(\tau)|^2 d\tau \leq
$$

$$
\leq \frac{9L^2}{\varepsilon_n^2}\, C_3^2(1+K_1\|x_0(0)\|)^2 e^{-2\gamma n}.
$$

Враховуючи нерівність (11), оцінюємо третій доданок:

$$
\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]}\left|\int_n^t \sigma(\tau,x_n(\tau))dW_\tau\right| \geq \frac{\varepsilon_n}{3}\right\} \leq \frac{9}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n+1} \mathrm{E}|\sigma(\tau,x_n(\tau))|^2 d\tau \leq
$$

$$
\leq \frac{2\cdot 9}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n+1} \alpha^2(\tau)(1+\mathrm{E}|x_n(\tau)|^2)d\tau \leq \frac{18K_2^2}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n+1} e^{-2\gamma\tau}(1+K_1^2\mathrm{E}|x_n(0)|^2)d\tau \leq
$$

$$
\leq \frac{2\cdot 18K_2^2}{\varepsilon_n^2}\, C_2^2(1+K_1^2\,\mathrm{E}|x_0(0)|^2)e^{-2\gamma n}.
$$

Виберемо послідовність $\varepsilon_n := e^{-\frac{\gamma+L}{2}n}$. Тоді легко бачити, що

$$
\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[n,n+1]}|x_n(t)-y(t)| \geq \varepsilon_n\right\} \leq Ae^{-\frac{\gamma-L}{2}n} + Be^{-(\gamma-L)n},
$$

де A, B — деякі додатні, не залежні від n сталі.

Очевидно, що ряд, який складається з $Ae^{-\frac{\gamma-L}{2}n} + Be^{-(\gamma-L)n}$, є збіжним, а тому з леми Бореллі – Кантеллі отримуємо, що існує додатна ціла випадкова величина $N = N(\omega)$ така, що для довільного $n \geq N(\omega)$ виконується

$$
\sup_{t\in[n,n+1]}|x_n(t)-y(t)| \leq e^{-\frac{\gamma+L}{2}n}
$$

для майже всіх $\omega \in \Omega$. Тоді для $t = n+1$ отримуємо

$$
|x_n(n+1)-x_{n+1}(n+1)| \leq e^{-\frac{\gamma+L}{2}n}
$$

з імовірністю 1. З попередньої нерівності та нерівності (7) маємо

$$
|x_n(0)-x_{n+1}(0)| \leq e^{L}e^{-\frac{\gamma-L}{2}n},
$$

звідки отримуємо, що існує $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(0)$ з імовірністю 1. Розв'язок $x_\infty(t)$ знайдемо з початкової умови $x_\infty(0) = x_\infty$.

Подальші оцінки проводимо аналогічно до п. 4 доведення теореми, замінюючи середньоквадратичну збіжність збіжністю з імовірністю 1.

Таким чином,

$$\mathrm{P}\{\lim_{t\to\infty} |x_\infty(t) - y(t)| = 0\} = 1.$$

Теорему доведено.

1. *Arnold L.* Anticipative problems in the theory of random dynamical system in stochastic analysis // Proc. Symp. Pure Math. — Providence, RI.: Amer. Math. Soc., 1995. — **57**. — P. 529 – 541.

2. *Arnold L., Oeljeklaus O., and Pardoux E.* Almost sure and moments stability for linear Ito equations Lyapunov exponents // Lect. Notes Math. / Eds L. Arnold, V. Wihstuts. — Berlin: Springer, 1986. — **1186**. — P. 129 – 159.

3. *Ясинський В. К., Ясинський Є. В.* Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — Київ: ТВіМС, 2005. — 578 с.

4. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.

5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

6. *Ясинский В. К.* Стохастические дифференциально-функциональные уравнения со всей предысторией. — Киев: ТВіМС, 2003. — 254 с.

7. *Кулініч Г.Л.* Асимптотичний аналіз нестійких розв'язків одновимірних стохастичних рівнянь: Навч. пос. — Київ: Київ. ун-т, 2003. — 55 с.

8. *Buldygin V. V., Klesov O. L., and Steinebach J. G.* PRV property and the asymptotic behavior of solution of stochastic differential equations // Int. Conf. Modern Problems and New Trends in Probab. Theory (Chernivtsi, Ukraine, June 19 – 26, 2005). — Kiev: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2005. — P. 38 – 39.

9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.

Одержано 27.12.2005,
після доопрацювання — 12.05.2006