УДК 531 . 38

О РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Е. К. Щетинина

Донецк. ун-т экономики и торговли
Украина, 83050, Донецк, ул. Щорса, 31

We study conditions for existence of regular processions in the motion of a gyrostat under the influence of potential and gyroscopic forces in the assumption that the procession axis does not coincide with the symmetry axis of the force field. We find a solution to the Kirchhoff equation such that it contains one arbitrary essential constant.

Досліджено умови існування регулярних прецесій гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у припущенні, що вісь прецесії не збігається з віссю симетрії силового поля. Отримано розв'язок рівняння Кірхгофа, що містить одну суттєву довільну сталу.

Введение. Прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой, свойством которых является постоянство угла между двумя осями, одна из которых неизменно связана с телом, а другая неподвижна в пространстве [1, 2], находят широкое применение в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел (см. [2]). Наиболее полно изучены прецессии гиростата в случае, когда ось прецессии совпадает с осью симметрии силового поля. Прецессии гиростата относительно наклонной оси исследованы только в предположении, что скорости прецессии и собственного вращения тела постоянны и равны между собой. Д. Гриоли [1] получил случай регулярной прецессии твердого тела в классической задаче о движении тела в поле силы тяжести. Г. В. Горр [3] изучил условия существования регулярных прецессий тяжелого гиростата. В. Н. Рубановский [4] и Н. В. Хлыстунова [5] рассмотрели прецессии типа Гриоли в задаче о движении твердого тела в жидкости. При этом в работе [5] исследован более общий случай, чем в работе [4], так как в ней предполагается, что ось, связанная с телом, и ось прецессии не ортогональны.

В данной работе в общем случае изучаются регулярные прецессии гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского, электрического и магнитного полей. В качестве математической модели приняты дифференциальные уравнения класса Г. Кирхгофа [6, 7], которые в силу гидродинамической аналогии [6, 8] невырожденным линейным преобразованием основных переменных могут быть преобразованы в уравнения движения тела в жидкости [6 – 9]. Доказано, что необходимым условием существования регулярных прецессий гиростата является условие равенства скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Рассмотрен случай, когда угол между осью гиростата и осью прецессии произволен, и получены все условия для параметров задачи, при выполнении которых дифференциальные уравнения Кирхгофа допускают новое частное решение, содержащее одну существенную произвольную постоянную.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемую дифференциальными уравнениями класса Г. Кирхгофа [6–9]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

которые допускают интегралы

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{2}$$

где E и k — произвольные постоянные. В уравнениях (1), (2) $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции, построенный в неподвижной точке O гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ — симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$ единичный вектор с началом в точке O и неизменный в пространстве. Для вектора $\boldsymbol{\gamma}$ имеем уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

Пусть $\varkappa_0$ — угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = c, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1. \tag{4}$$

Здесь $c = \cos \varkappa_0$. Движение гиростата называют [1, 2] прецессией относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$, если существует единичный вектор $\mathbf{a}$, неизменно связанный с гиростатом, который в течение всего времени движения образует постоянный угол θ_0 с вектором $\boldsymbol{\gamma}$. Свойство прецессии можно охарактеризовать инвариантным соотношением [2]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a_0, \tag{5}$$

где $a_0 = \cos \theta_0$, θ_0 — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Производная по времени от левой части (5) в силу уравнения (3) должна быть равна нулю, поэтому имеем равенство $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0$. Для случая регулярной прецессии из него вытекает следующее разложение для вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + m\boldsymbol{\gamma}. \tag{6}$$

Инвариантному соотношению (5) и геометрическому интегралу из (4) удовлетворим, связав подвижную систему координат с вектором $\mathbf{a}$ так, что $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, и положив

$$\gamma_1 = a_0' \sin \varphi, \quad \gamma_2 = a_0' \cos \varphi_1, \quad \gamma_3 = a_0. \tag{7}$$

Здесь $a_0' = \sin\theta_0$. Подставляя соотношения (6), (7) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения (3), получаем условие $\dot{\varphi} = n$, т. е. $\varphi = nt + \varphi_0$. Рассмотрим геометрический интеграл из (2) и первое инвариантное соотношение из (4). Следуя работе [2], указанным равенствам удовлетворяем, полагая

$$\boldsymbol{\nu} = (c + a_0 d' \sin\psi)\boldsymbol{\nu} - d'\mathbf{a}\sin\psi - d'(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})\cos\psi, \tag{8}$$

где $d' = \dfrac{d}{a_0'}$, $d = \sin\varkappa_0$, а ψ — новая переменная, которая в силу уравнения Пуассона из системы (1) удовлетворяет условию $\dot{\psi} = m$, т. е. $\psi = mt + \psi_0$. Поскольку выбором подвижной и неподвижной систем координат можно добиться выполнения условий $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, из (6), (8) для случая регулярной прецессии имеем равенства

$$\omega_1 = a_0' m \sin nt, \quad \omega_2 = a_0' m \cos nt, \quad \omega_3 = n + a_o m; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \nu_1 = a_0' c \sin nt + d(a_0 \sin nt \sin mt - \cos nt \cos mt), \\ \nu_2 = a_0' c \cos nt + d(a_0 \cos nt \sin mt + \sin nt \cos mt), \\ \nu_3 = a_0 c - a_0' d \sin mt. \end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, основные переменные задачи (1) имеют вид (9), (10). При этом уравнение Пуассона и геометрический интеграл обращаются в тождества. Подставляя в динамическое уравнение из (1) и первые интегралы из (2) векторные выражения (6), (8) и учитывая, что $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = n(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{d'^2}{4}\Big[(1+a_0^2)(B\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - 4a_0(B\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + 2(B\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) - a_0'^2\,\mathrm{Sp}\,(B)\Big]\cos 2\psi + \\ &+ \frac{d'^2}{2}\left[a_0(B\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}) - (B\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})))\right]\sin 2\psi + d'[c(B\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})) - \\ &- \boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}) - m(A\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})) - n(A\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))]\cos\psi + d'[c(B\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - \\ &- a_0 c(B\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a}) + a_0 m_1(A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + (a_0 n - m)(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - \\ &- n(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})]\sin\psi + cm(A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + cn(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + c(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + \\ &+ \frac{1}{4}\left(d^2 - 2c^2\right)(B\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - \frac{d^2}{4}\,\mathrm{Sp}\,(B) - k = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{d'^2}{2}\left[a_0'^2\,\mathrm{Sp}\,(C)-(1+a_0^2)(C\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})+4a_0(C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-2(C\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\right]\cos 2\psi+$$
$$+\,d'^2\,[(C\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))-a_0(C\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))]\sin 2\psi+2d'[(\mathbf{s}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))-$$
$$-\,c(C\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))]\cos\psi+2d'[a_0c(C\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})-c(C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-a_0(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma})+$$
$$+\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})]\sin\psi+n^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+2nm(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})+m^2(A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})-$$
$$-\,2c(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma})-\frac{1}{2}\,(d^2-2c^2)(C\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})+\frac{1}{2}\,d^2\,\mathrm{Sp}\,(C)-2E\,=\,0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2}{2}\,[(C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-a_0(C\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})]\cos 2\psi-\frac{d^2}{2}\,[C\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})]\sin 2\psi+$$
$$+\,d'[(a_0m+n)\,(B\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))-(a_0n+m)(B\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))+a_0c(C\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))-$$
$$-\,c(C\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}))]\cos\psi+d'[(2a_0m+(1+a_0^2)n)(B\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-$$
$$-\,a_0(a_0m+n)(B\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})-(a_0n+m)(B\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-a_0'^2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma})+2a_0c(C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-$$
$$-\,c(C\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+c(a_0'^2-a_0^2)(C\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})]\sin\psi-a_0'^2nm\,\mathrm{Sp}\,(A)-a_0n^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+$$
$$+\,m(a_0m+2n)(A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})+(n^2-2a_0nm-m^2)(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})+(a_0m+n)(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma})-$$
$$-\,(a_0n+m)(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a})+c(a_0n+m)(B\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-c(a_0m+n)(B\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})+$$
$$+\,\frac{a_0}{2}(d^2-2c^2)(C\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})-\frac{1}{2}(d^2-2c^2)(C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})-c(\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})\,=\,0. \tag{13}$$

В этих уравнениях через $\mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Sp}(B)$, $\mathrm{Sp}(C)$ обозначены следы матриц A, B, C.

Итак, условия существования регулярных прецессий гиростата относительно наклонной оси сведены к исследованию условий разрешимости алгебраических уравнений (11) – (13), которые в силу соотношений (7) являются уравнениями двух переменных φ и ψ следующего вида:

$$(M_2^{(i)}\cos 2\varphi+N_2^{(i)}\sin 2\varphi+M_1^{(i)}\cos\varphi+N_1^{(i)}\sin\varphi+N_0^{(i)})\cos 2\psi+$$
$$+\,(P_2^{(i)}\cos 2\varphi+Q_2^{(i)}\sin 2\varphi+P_1^{(i)}\cos\varphi+Q_1^{(i)}\sin\varphi+Q_0^{(i)})\sin 2\psi+$$
$$+\,(m_2^{(i)}\cos 2\varphi+n_2^{(i)}\sin 2\varphi+m_1^{(i)}\cos\varphi+n_1^{(i)}\sin\varphi+n_0^{(i)})\cos\psi+$$
$$+\,(p_2^{(i)}\cos 2\varphi+q_2^{(i)}\sin 2\varphi+p_1^{(i)}\cos\varphi+q_1^{(i)}\sin\varphi+q_0^{(i)})\sin\psi+$$
$$+\,e_2^{(i)}\cos 2\varphi+f_2^{(i)}\sin 2\varphi+e_1^{(i)}\cos\varphi+f_1^{(i)}\sin\varphi+f_0^{(i)}\,=\,0,\quad i\,=\,\overline{1,3}. \tag{14}$$

Здесь коэффициенты при тригонометрических функциях являются функциями параметров задачи (1) и параметров a_0, n, m.

Отметим, что уравнения (11) – (13) зависимы и не могут рассматриваться вместо динамических уравнений из (1) при выполнении условий $c = 0$, $a_0 n + m = 0$. В этом случае нужно рассматривать систему (1).

2. Исследование условий (14). Предположим, что отношение $\dfrac{n}{m}$ иррационально. В уравнениях (14) положим $t = \dfrac{\pi}{m}k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $t = \dfrac{\pi}{2m} + \dfrac{\pi l}{m}$, $l = 0, 1, \ldots$. Тогда получим бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned}\Big(M_2^{(i)} &+ (-1)^k m_2^{(i)} + e_2^{(i)}\Big)\cos\frac{2n\pi k}{m} + \Big(N_2^{(i)} + (-1)^k n_2^{(i)} + f_2^{(i)}\Big)\sin\frac{2n\pi k}{m} + \\ &+ \Big(M_1^{(i)} + (-1)^k m_1^{(i)} + e_1^{(i)}\Big)\cos\frac{n\pi k}{m} + \Big(N_1^{(i)} + (-1)^k n_1^{(i)} + f_1^{(i)}\Big)\sin\frac{n\pi k}{m} + \\ &+ \Big(N_0^{(i)} + (-1)^k n_0^{(i)} + f_0^{(i)}\Big) = 0,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Big(-M_2^{(i)} &+ (-1)^l p_2^{(i)} + e_2^{(i)}\Big)\cos\frac{2n\pi(1+2l)}{m} + \Big(-N_2^{(i)} + (-1)^l q_2^{(i)} + \\ &+ f_2^{(i)}\Big)\sin\frac{2n\pi(1+2l)}{m} + \Big(-M_1^{(i)} + (-1)^l p_1^{(i)} + e_1^{(i)}\Big)\cos\frac{n\pi(1+2l)}{m} + \\ &+ \Big(-N_1^{(i)} + (-1)^l q_1^{(i)} + f_1^{(i)}\Big)\sin\frac{n\pi(1+2l)}{m} + \Big(-N_0^{(i)} + (-1)^l q_0^{(i)} + f_0^{(i)}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Рассматривая первые десять уравнений системы (15) и первые десять уравнений системы (16), как наиболее простые по виду, и используя предположение, что отношение $\dfrac{n}{m}$ иррационально, а также соотношение

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} \cos 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 1 \\ \cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 1 \\ \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 1 \\ \cos 2\varphi_4 & \sin 2\varphi_4 & \cos\varphi_4 & \sin\varphi_4 & 1 \\ \cos 2\varphi_5 & \sin 2\varphi_5 & \cos\varphi_5 & \sin\varphi_5 & 1 \end{vmatrix} = c_* \sin\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_1)\times \\ &\times \sin\frac{1}{2}(\varphi_4 - \varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi_5 - \varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_2)\sin\frac{1}{2}(\varphi_4 - \varphi_2)\sin\frac{1}{2}(\varphi_5 - \varphi_2)\times \\ &\times \sin\frac{1}{2}(\varphi_4 - \varphi_3)\sin\frac{1}{2}(\varphi_5 - \varphi_3)\sin\frac{1}{2}(\varphi_5 - \varphi_4),\end{aligned}$$

где c_* — постоянная величина, приходим к выводу, что все коэффициенты при тригонометрических функциях в (14) равны нулю. Рассматривая систему (11) – (13) и используя принятые обозначения, получаем следующие условия для параметров:

$$\begin{gathered} C_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad C_{33} = C_{22} = C_{11}, \quad B_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad B_{33} = B_{22} = B_{11}, \\ A_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad A_{22} = A_{11}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 = 0, \quad s_3 = s_2 = s_1 = 0, \\ \lambda_3 = a_0 m(A_{11} - A_{33}) - nA_{33}, \quad (a_0 n + m)B_{11} = 0, \quad cB_{11} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Если в (17) положить $B_{11} = 0$, то уравнения (1) вырождаются в уравнения движения симметричного гиростата по инерции. Поскольку момент количества движения гиростата $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} = mA_{11}\boldsymbol{\gamma}$, приходим к известной регулярной прецессии относительно момента количества движения.

Пусть в последних двух равенствах системы (17) $B_{11} = 0$. Тогда из них следует $c = 0$, $a_0 n + m = 0$, т. е. уравнения (11)–(13) зависимы, и поэтому необходимо рассматривать динамическое уравнение из (1). Запишем с учетом (17) скалярное уравнение для ω_3 : $A_3\dot{\omega}_3 = B_{11}(\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1)$. Далее, так как ω_3 постоянно, а при $c = 0$ $\omega_1 = a_0' m\cos\varphi$, $\omega_2 = a_0' m\sin\varphi$, $\nu_1 = a_0\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi$, $\nu_2 = a_0\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$, указанное уравнение не может выполняться. Поэтому случай $B_{11} \neq 0$ невозможен.

Перейдем к рассмотрению случая, когда в уравнениях (14) отношение $\dfrac{n}{m}$ — рациональное число. Положим $n = \dfrac{k}{q}$, $m = \dfrac{l}{p}$, где l, p, k, q — целые числа. Введем переменную $u = \dfrac{t}{pq}$. Тогда $\varphi = Nu$, $\psi = Mu$, где $N = kp$, $M = lq$. В силу принятых обозначений представим уравнения (11), (12) в виде

$$d^2\left[\frac{1}{2}(a_0+1)^2(B_{22}-B_{11})\cos 2(M+N)u + (a_0+1)^2 B_{12}\sin 2(M+N)u + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(a_0-1)^2(B_{11}-B_{22})\cos 2(M-N)u - (a_0-1)^2 B_{12}\sin 2(M-N)u + \ldots\right] + \ldots, \tag{18}$$

$$d^2\left[\frac{1}{2}(a_0+1)^2(C_{11}-C_{22})\cos 2(M+N)u - (a_0+1)^2 C_{12}\sin 2(M+N)u + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(a_0-1)^2(C_{11}-C_{22})\cos 2(M-N)u + (a_0-1)^2 C_{12}\sin 2(M-N)u + \ldots\right] + \ldots. \tag{19}$$

Без ограничения общности считаем $N > 0$. Многоточием обозначены члены, которые содержат тригонометрические функции аргументов, имеющих множителями величины $2M - N$, $2M + N$, $2M$, $M + 2N$, $M - 2N$, $M + N$, $M - N$, N, $2N$. Если $M > 0$, то максимальный аргумент тригонометрических функций будет равен значению $2(M + N)$. Поэтому равенства (18), (19) будут тождествами по u при выполнении условий

$$B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}. \tag{20}$$

Аналогичные условия получим и в случае $M < 0$.

При условиях (20) уравнения (11) – (13) примут вид

$$\frac{a_0'd^2}{4}[-(a_0+1)B_{23}\cos(2M+N)u-(a_0+1)B_{13}\sin(2M+N)u+$$
$$+(1-a_0)B_{23}\cos(2M-N)u+(a_0-1)B_{13}\sin(2M-N)u+$$
$$+a_0'(B_{33}-B_{11})\cos 2Mu]+\frac{d}{2}\Big[\frac{a_0'm}{2}(a_0-1)(A_{22}-A_{11})\sin(M-2N)u+$$
$$+\frac{a_0'm}{2}(a_0+1)(A_{22}-A_{11})\sin(M+2N)u+P_1\sin(M-N)u+$$
$$+Q_1\sin(M+N)u+P_2\cos(M-N)u-Q_2\sin(M+N)u+2P_0\sin\,Mu\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\,a_0'^2m(A_{22}-A_{11})\cos\,2Nu+G_1\cos\,Nu+G_1'\sin\,Nu+G_0\,=\,0, \tag{21}$$

$$\frac{a_0'd^2}{2}[(a_0+1)C_{23}\cos(2M+N)u+(a_0+1)C_{13}\sin(2M+N)u+$$
$$+(a_0-1)C_{23}\cos(2M-N)u-(a_0-1)C_{13}\sin(2M-N)u+a_0'(C_{11}-$$
$$-C_{33})\cos 2Mu]+d[(a_0+1)(s_1-(2a_0-1)cC_{13})\cos(M+N)u+$$
$$+(a_0+1)(s_2-(2a_0-1)cC_{23})\sin(M+N)u-(a_0-1)(s_1-(2a_0+$$
$$+1)cC_{13})\cos(M-N)u-(a_0-1)(s_2-(2a_0+1)cC_{23})\sin(M-N)u+$$
$$+2a_0'(a_0c(C_{11}-C_{33})+s_3)\sin Mu]+\frac{a_0'^2m^2}{2}(A_{22}-A_{11})\cos\,2Nu+$$
$$+H_1\cos\,Nu+H_1'\sin\,Nu+H_0\,=\,0, \tag{22}$$

$$\frac{a_0'd^2}{4}[(a_0+1)(1-2a_0)C_{23}\cos(2M+N)u+(a_0+1)(1-2a_0)C_{13}\sin(2M+$$
$$+N)u-(a_0-1)(2a_0+1)C_{23}\cos(2M-N)u+2a_0a_0'(C_{33}-C_{11})\cos\,2Mu]+$$
$$+\frac{d}{2}[-S_1\cos(M+N)u+R_1\sin(M+N)u+S_2\cos(M-N)u+$$
$$+R_2\sin(M-N)u+2S_0\sin Mu]+\frac{a'^2}{2}\,m(a_0m+2n)(A_{22}-A_{11})\cos\,2Nu+$$
$$+L_1\cos\,Nu+L_1'\sin Nu+L_0\,=\,0, \tag{23}$$

где

$$P_1\,=\,(a_0-1)[((2a_0+1)m+n)A_{23}-(2a_0+1)cB_{23}+\lambda_2],$$

$$Q_1 = (a_0+1)[((2a_0-1)m+n)A_{23} - (2a_0-1)cB_{23} + \lambda_2],$$

$$P_2 = (a_0-1)[((2a_0+1)m+n)A_{13} - (2a_0+1)cB_{13} + \lambda_1],$$

$$Q_2 = (a_0+1)[((2a_0-1)m+n)A_{13} - (2a_0-1)cB_{13} + \lambda_1],$$

$$P_0 = a_0'\left[\frac{a_0 m}{2}(A_{11}+A_{22}-2A_{33}) + a_0 c(B_{33}-B_{11}) - nA_{33} - \lambda_3\right],$$

$$G_1 = a_0'\left[\frac{a_0}{2}(d^2-2c^2)B_{23} + c(2a_0 m+n)A_{23} + c\lambda_2\right],$$

$$G_1' = a_0'\left[\frac{a_0}{2}(d^2-2c^2)B_{13} + c(2a_0 m+n)A_{13} + c\lambda_1\right],$$

$$G_0 = \frac{cm}{2}\left[2a_0^2 A_{33} + a_0'^2(A_{11}+A_{22})\right] + a_0 cnA_{33} + a_0 c\lambda_3 +$$

$$+\frac{d^2-2c^2}{4}(a_0^2 B_{33} + a_0'^2 B_{11}) - \frac{d^2}{4}(2B_{11}+B_{33}) - k,$$

$$H_1 = 2a_0'\left[\frac{a_0}{2}\left(2c^2-d^2\right)C_{23} + m(a_0 m+n)A_{23} - cs_2\right],$$

$$H_1' = 2a_0'\left[\frac{a_0}{2}\left(2c^2-d^2\right)C_{13} + m(a_0 m+n)A_{13} - cs_1\right], \qquad (24)$$

$$H_0 = \frac{d^2}{2}\,(2C_{11}+C_{33}) + \frac{2c^2-d^2}{2}\,\left(a_0^2 C_{33} + a_0'^2 C_{11}\right) + 2a_0 mnA_{33} +$$

$$+n^2 A_{33} + \frac{m^2}{2}\,(a_0^2 A_{33} + a_0'^2(A_{11}-A_{22})) - 2a_0 cs_3 - 2E,$$

$$R_1 = a_0'^3[((2a_0+1)m+n)B_{23} + (4a_0+1)cC_{23} - s_2],$$

$$S_1 = -a_0'^3[((2a_0+1)m+n)B_{13} + (4a_0+1)cC_{13} - s_1],$$

$$R_2 = a_0'^3[((2a_0-1)m+n)B_{23} + (4a_0-1)cC_{23} - s_2],$$

$$S_2 = a_0'^3[((2a_0-1)m+n)B_{13} + (4a_0-1)cC_{13} - s_1],$$

$$S_0 = a_0'^2\left[\left(a_0^2 - a_0'^2\right)c(C_{11}-C_{33}) - a_0 nB_{11} - m\left(a_0^2 B_{11} + a_0'^2 B_{33}\right) - a_0 s_3\right],$$

$$L_1 = a_0'\Big\{\left[2a_0 mn + \left(a_0^2 - a_0'^2\right)m^2 + n^2\right]A_{23} + c\left[(a_0'^2 - a_0^2)m - a_0 n\right]B_{23} +$$

$$+(a_0 m+n)\lambda_2 + \frac{a_0^2 - a_0'^2}{2}\,(d^2-2c^2)C_{23} + a_0 cs_2\Big\},$$

$$L_1' = a_0'\Big\{\left[2a_0 mn + \left(a_0^2 - a_0'^2\right)m^2 + n^2\right]A_{13} + c\left[\left(a_0'^2 - a_0^2\right)m - a_0 n\right]B_{13} +$$

$$+(a_0m+n)\lambda_1+\frac{a_0^2-a_0'^2}{2}(d^2-2c^2)C_{13}+a_0cs_1\Big\},$$

$$L_0=a_0'^2\Big[\frac{a_0}{2}\,m^2(A_{11}+A_{22})-(a_0m+n)nA_{33}-a_0cm(B_{11}-B_{33})-$$

$$-cnB_{11}-m\lambda_3-cs_3+\frac{a_0}{2}\,(d^2-2c^2)(C_{11}-C_{33})\Big].$$

Подвижная система координат выбрана так, чтобы выполнялось равенство $A_{12}=0$.

Покажем, что уравнения (21) – (23) могут быть тождествами по переменной u только при условиях $C_{23}=0$, $C_{13}=0$. Пусть $N>0$ и $C_{13}^2+C_{23}^2\neq 0$. Тогда из уравнения (22) следует, что $N=2M$, $C_{13}=0$ и

$$(a_0+1)\,d^2C_{23}+a_0'm^2(A_{22}-A_{11})=0. \tag{25}$$

Максимальный аргумент тригонометрических функций, входящих в уравнение (21), равен $5Mu$. Это означает, что уравнение (21) может быть тождеством по u только при условии $A_{22}=A_{11}$. Но тогда из (25) следует, что $C_{23}=0$. К аналогичному выводу приходим и в случае $N<0$, так как величины $2M+N$, $2M-N$ и $M-2N$, $M+2N$ в уравнениях (21), (22) содержатся симметричным образом. Следовательно, в дальнейшем полагаем, что $C_{23}=C_{13}=0$.

Покажем, что уравнения (21) – (23) могут быть тождествами по переменной u только при условиях $N=M$ и $N=-M$. Доказательство будем проводить от противного, т. е. считаем, что ни один из этих вариантов не выполняется. Пусть $A_{22}\neq A_{11}$, тогда уравнение (22) может быть тождеством лишь при выполнении условий $M=\pm 2N$ либо $M=\pm 3N$. В первом случае из уравнения (22) получаем равенство $A_{22}=A_{11}$. Во втором случае приходим к такому же выводу, рассматривая уравнение (21). Итак, положим $A_{22}=A_{11}$. Из уравнения (22) следует, что параметры C_{33} и C_{11} не равны между собой только при выполнении условий $N=\pm 2M$, $N=\pm 3M$. Тогда требование того, чтобы равенства (21) – (23) были тождествами по u, приводит к условиям $s_2=s_1=0$ и $C_{33}=C_{11}$. Поэтому необходимо считать, что $C_{33}=C_{11}$. Дальнейшее рассмотрение уравнений (21) – (23) дает условия (17). Таким образом, уравнения (21) – (23) могут обращаться в тождества по u в нетривиальном случае только при выполнении условия $N=M$ (случай $N=-M$ — симметричный).

Пусть в уравнениях (21) – (23) $N=M$. На основании обозначений (24) и равенства $m=n$ из условия, что (21) – (23) должны быть тождествами по u, получаем

$$A_{12}=0,\quad A_{23}=0,\quad B_{23}=0,\quad C_{ij}=0,\quad i\neq j,\quad \lambda_2=0,\quad s_2=s_1=0, \tag{26}$$

$$B_{13}^2=(A_{22}-A_{11})(C_{33}-C_{11}),\quad dB_{13}=n(A_{22}-A_{11}), \tag{27}$$

$$d(1-a_0)(B_{33}-B_{11})+2a_0cB_{13}-2(2a_0nA_{13}+\lambda_1)=0, \tag{28}$$

$$(a_0+1)n^2A_{13}+d[a_0c(C_{11}-C_{33})+s_3]=0, \tag{29}$$

$$cd(a_0+1)(B_{33}-B_{11})+a_0d^2B_{13}-2d\lambda_3+2cnA_{13}+$$
$$+dn[a_0(A_{11}+A_{22})-2(a_0+1)A_{33}]=0, \tag{30}$$

$$2cd(1-a_0)(C_{11}-C_{33})-dn[(a_0+1)B_{11}+(1-a_0)B_{33}]+$$
$$+2cn(1-a_0)B_{13}+2a_0n^2A_{13}=0. \tag{31}$$

Следовательно, условиями существования регулярных прецессий гиростата являются равенства (20), (26) – (31). Отметим, что в силу (26) вектор $\boldsymbol{a}$ сонаправлен вектору обобщенного центра масс гиростата и вместе с вектором $\boldsymbol{\lambda}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки O. Первое равенство из системы (27) является ограничением на компоненты матриц A, B, C, второе служит для определения скорости собственного вращения гиростата. Из уравнения (28) вытекает условие, связывающее параметры $\varkappa_0$ и θ_0, а из уравнений (29) – (31) можно найти условия на параметры λ_1, λ_3, s_3.

3. Случай произвольного $\boldsymbol{\theta_0}$. Особый интерес представляет случай, когда уравнения (28) – (31) выполняются для любого значения a_0. Тогда из (27) – (31) вытекают условия

$$A_{13}^2=(A_{22}-A_{11})(A_{22}-A_{33}), \tag{32}$$

$$B_{33}=-B_{11}, \quad A_{13}B_{13}-(A_{22}-A_{11})B_{11}=0, \quad B_{13}^2=(A_{22}-A_{11})(C_{33}-C_{11}), \tag{33}$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_0=\frac{A_{22}-A_{11}}{A_{13}}, \quad \lambda_1=-B_{11}\sin\varkappa_0, \quad \lambda_3=-\frac{A_{33}B_{13}\sin\varkappa_0}{A_{22}-A_{11}}, \tag{34}$$

$$s_3=-\frac{A_{13}B_{13}^2\sin\varkappa_0}{(A_{22}-A_{11})^2}, \quad m=n=\frac{B_{13}\sin\varkappa_0}{A_{22}-A_{11}}. \tag{35}$$

Таким образом, если параметры задачи (1) и параметры регулярной прецессии (5), (6) удовлетворяют равенствам (32) – (35), то дифференциальные уравнения (1) допускают решение (9), (10), в котором θ_0 — произвольная постоянная, а $m=n$ и имеют значение из (35).

Изучим условие (32). Как было отмечено, вторая ось подвижной системы координат является главной. Обозначим через A, B, C моменты инерции относительно главных осей эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке. Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, в которой получены условия (32) – (35), а $Ox'y'z'$ — главная система координат. Тогда

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{13}xz=Ax^{'2}+By^{'2}+Cz^{'2}. \tag{36}$$

Запишем формулы преобразования главной системы координат к системе $Oxyz$:

$$x'=x\cos\alpha+z\cos\alpha, \quad y'=y, \quad z'=-x\sin\alpha+z\cos\alpha. \tag{37}$$

Тогда из (36), (37) вытекает

$$
\begin{gathered}
A_{11} = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha, \quad A_{22} = B, \\
A_{33} = \frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha, \quad A_{13} = \frac{A-C}{2} \sin 2\alpha.
\end{gathered} \tag{38}
$$

Подставив выражения (38) в равенство (32), получим $(A-B)(B-C) = 0$. Таким образом, эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. В отличие от прецессии Д. Гриоли [1] вектор обобщенного центра масс не лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции.

Принципиальным свойством решения (9), (10) является то, что оно содержит одну произвольную постоянную. Условие существования этого решения показывает, что оно не может быть частным случаем решения П. В. Харламова – Г. Кирхгофа [8], так как для него, например, центр масс лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции.

Запишем условие существования аналога решения (9), (10) в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости [5]. Следуя [5], введем кинетическую энергию системы „тело + жидкость"

$$
T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(a_{ij} P_i P_j + b_{ij} R_i R_j + 2c_{ij} P_i R_j \right), \tag{39}
$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, P_i — компоненты кинетического момента импульсивной пары, R_i — компоненты импульсивной силы. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — проекции гиростатического момента, а e_1, e_2, e_3 — постоянные, пропорциональные проекциям на подвижные оси радиуса-вектора, проведенного из центра тяжести объема, ограниченного внешней поверхностью тела, в центр масс гиростата. Введем матрицы

$$
A = (A_{ij}) = a^{-1}, \quad B^* = (B^*_{ij}) = b - c^T a^{-1} c, \quad C^* = (C^*_{ij}) = a^{-1} c.
$$

В силу аналогии [6] сохраним обозначения A_{ij} и λ_i. Угловую скорость обозначим через $\boldsymbol{\Omega}$, а по вектору $\boldsymbol{R}$ направим единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$ единичный вектор, для которого $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \cos \varkappa_0$. В работе [5] поставлена и решена задача об исследовании прецессий тела типа Гриоли, т. е. полагается, что имеют место соотношения (5) – (10), в которых угловая скорость заменена на $\boldsymbol{\Omega}$ и $m = n$. Потребуем, чтобы условия существования (указанные в [5] под номером (13)) выполнялись для любых значений $a_0 = \cos \theta_0$.

Тогда получим следующие условия существования:

$$
\begin{gathered}
A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(A_{22} - A_{33}), \quad B_{ij}^* = 0, \quad i \neq j, \\
B_{22}^* = B_{11}^*, \quad C_{22}^* = C_{11}^* = 0, \quad C_{21}^* = -C_{12}^*, \quad C_{32}^* = -C_{23}^*, \\
A_{13}(C_{13}^* + C_{31}^*) + (A_{22} - A_{11})C_{33}^* = 0, \\
(A_{22} - A_{11})(B_{33}^* - B_{11}^*) - (C_{13}^* + C_{31}^*)^2 = 0, \\
\operatorname{tg} \varkappa_0 = \frac{A_{22} - A_{11}}{A_{13}}, \quad n = -\frac{\lambda_1}{A_{13}}, \quad \lambda_1 = -\frac{e_3 A_{13}}{C_{33}^*}, \quad \lambda_3 = -\frac{e_3 A_{33}}{C_{33}^*}, \\
e_1 = e_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0.
\end{gathered} \tag{40}
$$

При выполнении условий (40) уравнения Кирхгофа задачи о движении тяжелого твердого тела в жидкости допускают решение, содержащее одну существенную произвольную постоянную.

1. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4. — 1947. — **26**. — Fasc. 3-4. — P. 271–281.
2. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. — 2003. — **67**, вып. 4. — С. 573–587.
3. *Горр Г. В.* Одно свойство прецессии относительно наклонной оси в задаче о движении тяжелого гиростата // Механика твердого тела. — 1977. — Вып. 13. — С. 35–41.
4. *Рубановский В. Н.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Прикл. математика и механика. — 1985. — **49**, вып. 2. — С. 212–219.
5. *Хлыстунова Н. В.* О прецессии типа Гриоли тяжелого твердого тела в жидкости // Там же. — 2000. — **64**, вып. 4. — С. 551–554.
6. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equation of motion and their transformations // J. Theor. Mech. and Appl. — 1986. — **5**, № 5. — P. 747–754.
7. *Харламов П. В., Мозалевская Г. В., Лесина М. Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. — 2001. — Вып. 31. — С. 3–17.
8. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1963. — № 4. — С. 17–29.
9. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Собр. соч. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — Т. 1. — С. 136–193.

Получено 23.06.2005,
после доработки — 09.11.2005