УДК 517.928

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Н. И. Шкиль

Нац. пед. ун-т
Украина, 01030, Киев, ул. Пирогова, 9

Г. В. Завизион

Кировоград. пед. ун-т
Украина, 25006, Кировоград, ул. Шевченко, 1
e-mail: ZavizionG@rambler.ru

М. В. Самойленко

Киев. акад. вод. трансп.
Украина, 04071, ул. Фрунзе, 9
e-mail: mariasam@i.com.ua

We obtain a condition for existence and uniqueness of a periodic solution of a system of nonlinear integro-differential equations with an impulsive effect. The solution is represented as a limit of periodic iterations. We give estimates for the convergence rate and the exact solution.

Одержано умову існування єдиного періодичного розв'язку системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Розв'язок подано у вигляді границі періодичних ітерацій. Наведено оцінки швидкості збіжності і точного розв'язку системи.

В работах [1, 2] изучается вопрос о существовании периодических и ограниченных решений системы интегро-дифференциальных уравнений в некритических случаях. Применению метода Бубнова – Галеркина к построению периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений посвящена работа [3]. Численно-аналитический метод исследования периодических решений [4] применяется к построению периодических решений системы интегро-дифференциальных уравнений в [5]. В работе [6] найдены периодические решения систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

В данной статье конструктивным способом [7] получены условия существования периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени в невырожденном и вырожденном случаях. Построены периодические решения слабонелинейных интегро-дифференциальных уравнений в невырожденном и в вырожденном случаях, при этом рассмотрены способы распределения импульсных условий. В каждом из случаев построены итерации, которые находятся из интегральных уравнений, и предложен алгоритм, который дает возможность находить приближения в явном виде.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f\left(t, x, \int\limits_0^{L(t)} \varphi(t, s, x(s))ds\right), \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_j} = D_j x(\tau_j - 0) + I_j\left(x(\tau_j - 0), \int\limits_0^{M_j} \psi_j(s, x(\tau_j - 0))ds\right), \tag{2}$$

где D_j — постоянные $(n \times n)$-матрицы, M_j, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ — действительные числа, $L(t)$ — скалярная функция и $A(t)$ — $n \times n$-матрица, которые непрерывные и ω-периодические по t, $f(t, x, y) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $I_j(x, y) = (I_{j1}, I_{j2}, \ldots, I_{jn})$, $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $\psi_j(t, x) = (\psi_{j1}, \psi_{j2}, \ldots, \psi_{jm})$ – ω-периодические по t, s, непрерывные при $t, s \in R$, $x \in R^n$, $y \in R^m$.

Предположим, что: 1) моменты импульсов раздельны, т. е. $\tau_{j+1} - \tau_j \geq c = \mathrm{const} > 0$, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$; 2) $I_{j+d}(x, y) = J_j, \tau_{j+d} = \tau_j + \omega$, где d — целое положительное число, равное количеству импульсных моментов в одном периоде; 3) функции $f(t, x, y)$, $I_j(x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, x)$ удовлетворяют условиям Липшица

$$\|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')\| \leq L_1\|x' - x''\| + L_2\|y' - y''\|, \ \|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')\| \leq L_3\|x' - x''\|,$$

$$\|I_i(x', y') - I_i(x'', y'')\| \leq L_4||x' - x''|| + L_5||y' - y''||, \ \|\psi_i(t, x') - \psi_i(t, x'')\| \leq L_6\|x' - x''\|.$$

1. Невырожденный случай. Пусть $\det B(\omega) \neq 0$, где $B(t) = \int\limits_0^t A(\tau)d\tau$. При $0 \leq t \leq \omega$ уравнение (1) с условием (2) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x)\, ds\right) d\tau +$$
$$+ \sum_{0<\tau_i<t}\left(D_i x(\tau_i - 0) + I_i\left(x(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x(\tau_i - 0))ds\right)\right). \tag{3}$$

Учитывая (3) и ω-периодичность $x(t)$, находим

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)x(\tau)d\tau + \int\limits_0^\omega f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x)\, ds\right) d\tau +$$
$$+ \sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x(\tau_i - 0) + I_i\left(x(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi(s, x(\tau_i - 0))\, ds\right)\right) = 0. \tag{4}$$

Используя (3), записываем $x(\tau)$ в виде

$$x(\tau) = x(t) + \int\limits_t^\tau A(s)x(s)ds + \int\limits_t^\tau f\left(\xi, x, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x)\, ds\right) d\xi +$$

$$+ \sum_{t<\tau_i<\tau} \left(D_i x(\tau_i - 0) + I_i\left(x(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x(\tau_i - 0))\, ds\right)\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (1) с условием (2):

$$x(t) = -B^{-1}(\omega)\left(\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau \int\limits_t^\tau A(s)x(s)ds + \int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau \int\limits_t^\tau f\left(\xi, x, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x)ds\right) d\xi + \right.$$

$$+ \int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau \sum_{t<\tau_i<\tau} \left(D_i x(\tau_i - 0) + I_i\left(x(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x(\tau_i - 0))ds\right)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^\omega f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x)\, ds\right) d\tau +$$

$$\left. + \sum_{0<\tau_i<\omega} \left(D_i x(\tau_i - 0) + I_i\left(x(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x(\tau_i - 0))\, ds\right)\right)\right). \tag{6}$$

Обозначим

$$\|B^{-1}(\omega)\| = j, \quad \max_t \|A(t)\| = \alpha,$$

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^d \|D_i\|, \quad L = \max_t L(t),$$

$$M = \max_i M_i, \quad \|x\| = \max_t \|x(t)\|,$$

$$q = \frac{1}{2}\alpha^2 j\omega^2 + \frac{1}{2}\alpha j\omega^2(L_1 + L_2 L L_3) + \alpha\omega(\overline{D} + (L_4 + L_5 M L_6)d) +$$

$$+ \omega j(L_1 + L_2 L L_3) + (\overline{D} + (L_4 + L_5 M L_6)d)j,$$

$$P = \max_t \left\| B^{-1}(\omega) \int\limits_0^{\omega} A(\tau) d\tau \int\limits_t^{\tau} f\left(\xi, 0, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, 0)\, ds\right) d\xi \right\| +$$

$$+ \max_t \left\| B^{-1}(\omega) \int\limits_0^{\omega} A(\tau) d\tau \sum_{t<\tau_i<\tau} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, 0) ds\right) \right\| +$$

$$+ \left\| B^{-1}(\omega) \int\limits_0^{\omega} f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, 0)\, ds\right) d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| B^{-1}(\omega) \sum_{0<\tau_i<\omega} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, 0) ds\right) \right\|,$$

$$h = \max_t \left\| f\left(t, 0, \int\limits_0^{L(t)} \varphi(t, s, 0) ds\right) \right\|, \quad h_1 = \left\| \sum_{0<\tau_i<\omega} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, 0) ds\right) \right\|.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполняется неравенство*

$$q < 1, \tag{7}$$

то система (1), (2) имеет единственное ω-периодическое решение.

Доказательство. Уравнение (6) получено из условия периодичности решения системы (1), (2). Поэтому, если уравнение (6) имеет единственное решение, это решение будет периодическим. Запишем (6) в виде $x = Rx$, где R — интегральный оператор в (6). Оценим норму

$$\left\| Rx^{(1)} - Rx^{(2)} \right\| \leq q \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\|. \tag{8}$$

Из неравенств (7), (8) и принципа сжимающих отображений следует существование единственного решения уравнения (6).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если выполняются неравенства (7) и*

$$q\rho + P \leq \rho, \tag{9}$$

то существует последовательность $\{x_k(t)\}_1^{\infty}$, сходящаяся к ω-периодическому решению системы (1), (2) и такая, что $||x_k|| \leq \rho$.

Доказательство. Приближение

$$x_0 = -B^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} f\left(\tau, x_0, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_0)\, ds\right) d\tau$$

находится из ω-периодичности $x_1(t)$, которая определяется по формуле

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t A(\tau) x_0 d\tau + \int_0^t f\left(\tau, x_0, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_0)\, ds\right) d\tau. \tag{10}$$

Функцию $x_{k+1}(t)$, $k \geq 1$, определяем из уравнений

$$x_{k+1}(t) = x_{k+1}(0) + \int_0^t A(\tau) x_k(\tau) d\tau + \int_0^t f\left(\tau, x_k, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_k(s))\, ds\right) d\tau \tag{11}$$

при $0 \leq t \leq \tau_1$,

$$\Delta x_{k+1}|_{t=\tau_i} = D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i))\, ds\right). \tag{12}$$

Тогда при $0 \leq t \leq \omega$ имеем

$$x_{k+1}(t) = x_{k+1}(0) + \int_0^t A(\tau) x_k(\tau) d\tau + \int_0^t f\left(\tau, x_k, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_k(s))\, ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{0<\tau_i<t} \left(D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i - 0)) ds\right)\right). \tag{13}$$

Из ω-периодичности $x_{k+1}(t)$, используя (5), (13), находим

$$x_k(t) = -B^{-1}(\omega)\Bigg(\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau \int_t^{\tau} A(s) x_{k-1}(s)\, ds +$$

$$+\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\int\limits_t^\tau f\left(\xi,x_{k-1},\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x_{k-1})\,ds\right)d\xi+\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_ix_{k-2}(\tau_i-0)+\right.$$

$$\left.+I_i\left(x_{k-2}(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_{k-2}(\tau_i-0))\,ds\right)\right)+\int\limits_0^\omega f\left(\tau,x_k,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x_k)\,ds\right)d\tau+$$

$$+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_ix_{k-1}(\tau_i-0)+I_i\left(x_{k-1}(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_{k-1}(\tau_i-0))ds\right)\right)\Bigg)\ \forall t\in[0;\omega]. \quad (14)$$

Согласно (14) оценим норму

$$\|x_{k+1}-x_k\|\le q_1\|x_k-x_{k-1}\|+q_2\|x_{k-1}-x_{k-2}\|, \quad (15)$$

где

$$q_1=\frac{1}{1-j\omega(L_1+L_2LL_3)}\left(\frac{1}{2}\alpha^2j\omega^2+\frac{1}{2}\alpha\omega^2j(L_1+L_2LL_3)+(\overline{D}+(L_4+L_5ML_6)d)j\right),$$

$$q_2=\frac{\alpha\omega(\overline{D}+(L_4+L_5ML_6)d)}{1-j\omega(L_1+L_2LL_3)}.$$

Воспользовавшись (14), функцию $x_k(t)$ запишем в виде

$$x_k(t)=-B^{-1}(\omega)\left(\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\int\limits_t^\tau A(s)x_{k-1}(s)ds+\right.$$

$$+\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\int\limits_t^\tau\left(f\left(\tau,x_{k-1},\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x_{k-1}(s))ds\right)-f\left(\tau,0,\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,0)\,ds\right)\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_ix_{k-2}(\tau_i-0)+I_i\left(x_{k-2}(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_{k-2}(\tau_i-0))\,ds\right)-\right.$$

$$\left.-I_i\left(0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,0)\,ds\right)\right)+$$

$$+\int\limits_0^\omega\left(f\left(\tau,x_{k-1},\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x_{k-1})\,ds\right)-f\left(\tau,0,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,0)ds\right)\right)d\tau+$$

$$+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_{k-1}(\tau_i-0)+I_i\left(x_{k-1}(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_{k-1}(\tau_i-0))\,ds\right)-\right.$$

$$\left.-\;I_i\left(0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,0)ds\right)\right)+\overline{S}(t)\Bigg), \tag{16}$$

где

$$\overline{S}(t)=\int\limits_0^{\omega}A(\tau)\,d\tau\int\limits_t^{\tau}f\left(\xi,0,\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,0)\,ds\right)d\xi+\int\limits_0^{\omega}A(\tau)\,d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}I_i\left(0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,0)\,ds\right)+$$

$$+\int\limits_0^{\omega}f\left(\tau,0,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,0)\,ds\right)d\tau+\sum_{0<\tau_i<\omega}I_i\left(0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,0)\,ds\right).$$

Предположим, что $||x_i||\le\rho$, $i=\overline{0,k-1}$. Используя (16) и учитывая неравенство (9), получаем $\|x_k\|\le\rho$. С помощью (15) можно доказать, что при выполнении неравенства (7) последовательность $\{x_k\}_1^{\infty}$, построенная по алгоритму (14), сходится равномерно относительно $t\in R$ к ω-периодическому решению системы (1), (2). При этом имеют место оценки скорости сходимости и точного решения:

$$\|x_k-x\|\le\frac{a_1\mu_1^k}{1-\mu_1}+\frac{a_2\mu_2^k}{1-\mu_2},\quad k=1,2,\ldots, \tag{17}$$

$$\|x\|\le\|x_0\|+\frac{a_1}{1-\mu_1}+\frac{a_2}{1-\mu_2},$$

где

$$\mu_{1,2}=\frac{q_1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q_1^2+4q_2},\ a_1=\frac{\delta_0\mu_2-\delta_1}{\mu_2-\mu_1},\ a_2=\frac{\delta_0\mu_1-\delta_1}{\mu_1-\mu_2},\ \delta_0=\|x_1-x_0\|,\ \delta_1=\|x_2-x_1\|.$$

Укажем другой способ распределения импульсных условий. Функцию $x_1(t)$ будем искать в виде (10) с импульсным условием $\Delta x_1|_{t=\tau_i}=D_ix_0+I_i\left(x_0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_0)ds\right)$. Тогда, записывая вид функции $x_1(t)$ на отрезке $[0;\omega]$ и учитывая ω-периодичность $x_1(t)$, имеем

$$x_0=-B^{-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega}f\left(\tau,x_0,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x_0)\,ds\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_ix_0+I_i\left(x_0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_0)\,ds\right)\right)\right). \tag{18}$$

Функцию $x_{k+1}(t)$ при $0 \le t \le \tau_1$, удовлетворяющую импульсному условию

$$\Delta x_{k+1}|_{t=\tau_i} = D_i x_k(\tau_i - 0) + I_i\left(x_k(\tau_i), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_k(\tau_i))\, ds\right),$$

определяем из (11). Тогда для любого $t \in [0;\omega]$

$$x_k(t) = -B^{-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega} A(\tau)d\tau \int\limits_t^{\tau} A(s)x_{k-1}(s)ds + \right.$$

$$+\int\limits_0^{\omega} A(\tau)d\tau \int\limits_t^{\tau} f\left(\xi, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-1})\, ds\right) d\xi +$$

$$+\int\limits_0^{\omega} A(\tau)d\tau \sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i - 0))\, ds\right)\right) +$$

$$+ f\left(\tau, x_k, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_k(s))\, ds\right) d\tau +$$

$$\left. + \sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_k(\tau_i - 0) + I_i\left(x_k(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_k(\tau_i - 0))ds\right)\right)\right). \tag{19}$$

Согласно (19) имеет место оценка

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le q_3\|x_k - x_{k-1}\|, \tag{20}$$

где

$$q_3 = \frac{1}{1 - \omega j(L_1 + L_2LL_3) - j(\overline{D} + (L_4 + L_5ML_4)d)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}j\alpha^2\omega^2 + \frac{1}{2}j\alpha\omega^2 + \alpha\omega(\overline{D} + (L_4 + L_5ML_6)d)\right).$$

Неравенство (7) обеспечивает условие существования единственного решения интегральных уравнений (18), (19), а также равномерной сходимости последовательности $x_k(t)$ к точному решению системы (1), (2). Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|x_{k+1} - x\| \le \frac{q_3^k}{1 - q_3}\|x_1 - x_0\|.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются неравенства (7) и*

$$q\rho + j\left(\frac{1}{2}\alpha\omega^2 h + \alpha\omega h_1 + \omega h + h_1\right) \le \rho. \tag{21}$$

Тогда существует сходящаяся последовательность $\{x_k(t)\}_1^\infty$, *которая находится в явном виде и удовлетворяет неравенству*

$$\|x_k\| \le \rho. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $x_0 = 0,\ x_1 = x_1(0) + \int\limits_0^t f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, 0)ds\right) d\tau\ \forall t \in R,$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x_1 d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, 0)ds\right) d\tau$$

при $0 \le t \le \tau_1$,

$$\Delta x_2|_{t=\tau_i} = I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, 0)\, ds\right),$$

$$x_{k+1}(t) = x_{k+1}(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x_k(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_{k-1}(s))\, ds\right) d\tau,$$

$$\Delta x_{k+1}|_{t=\tau_i} = D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i - 0))\, ds\right).$$

Тогда, используя выражение для $x_{k+1}(\tau)$, аналогичное (5), и ω-периодичность $x_{k+1}(t)$, находим

$$x_1 = -B^{-1}(\omega)\left(\int\limits_0^\omega f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, 0)ds\right) d\tau + \sum_{0<\tau_i<\omega} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi(s, 0)ds\right)\right),$$

$$x_k(t) = -B^{-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega} A(\tau)d\tau\int\limits_t^{\tau} A(s)x_{k-1}(s)ds + \right.$$

$$+\int\limits_0^{\omega} A(\tau)d\tau\int\limits_t^{\tau} f\left(\xi, x_{k-2}, \int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi, s, x_{k-2})ds\right)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^{\omega} A(\tau)d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_i x_{k-2}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-2}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i}\psi_i(s, x_{k-2}(\tau_i - 0))ds\right)\right) +$$

$$+\int\limits_0^{\omega} f\left(\tau, x_{k-1}(\tau), \int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau, s, x_{k-1}(s))ds\right)d\tau +$$

$$\left. + \sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_{k-1}(\tau_i) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i), \int\limits_0^{M_i}\psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i))ds\right)\right)\right). \tag{23}$$

Согласно (23) имеем оценку нормы

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le q_4\|x_k - x_{k-1}\| + q_5\|x_{k-1} - x_{k-2}\|, \tag{24}$$

где

$$q_4 = j\left(\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 + \left(\overline{D} + (L_4 + L_5 M L_6)d\right)\right),$$

$$q_5 = \frac{1}{2}\alpha\omega^2 j(L_1 + L_2 L L_3) + \alpha\omega(\overline{D} + (L_4 + L_5 M L_6)d) + \omega(L_1 + L_2 L L_3).$$

Можно показать, что условие (7) и неравенство (24) обеспечивают равномерную по $t \in R$ сходимость последовательности $\{x_k(t)\}_1^{\infty}$, определяемую по формуле (23), а при выполнении неравенства (21) следует неравенство (22).

Теорема доказана.

2. Вырожденный случай. Пусть

$$B(\omega) = 0, \quad \det\overline{P}(\omega) \ne 0, \tag{25}$$

где

$$P(t) = B(t)A(t), \quad \overline{P}(\omega) = \int\limits_0^{\omega} P(\tau)d\tau.$$

При $0 \le t \le \tau_1$ уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau + \int\limits_0^{t} f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau, s, x(s))\,ds\right)d\tau. \tag{26}$$

Интегрируя второе слагаемое в (26) по частям и используя (1), получаем

$$\int\limits_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau = B(t)x(t) - B(0)x(0) - \int\limits_0^t P(\tau)x(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t B(\tau) f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x(s))ds\right) d\tau. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), при $0 \leq t \leq \tau_1$ имеем

$$x(t) = x_0 + B(t)x(t) - B(0)x(0) - \int\limits_0^t P(\tau)x(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t B(\tau) f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x(s))ds\right) d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x(s))ds\right) d\tau. \tag{28}$$

Используя (28) и импульсные условия (2), для любого $t \in [0;\omega]$ записываем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (1) с условием (2):

$$x(t) = x(0) + B(t)x(t) - B(0)x(0) - \int\limits_0^t P(\tau)x(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t B(\tau) f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x(s))ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{0<\tau_i<t} \left(D_i x(\tau_i - 0) + I_i \left(x(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x(\tau_i - 0))ds \right) \right) +$$

$$+ \int\limits_0^t f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x)ds\right) d\tau. \tag{29}$$

Применяя к (29) условие периодичности $x(t)$, имеем

$$\int\limits_0^\omega P(\tau)x(\tau)d\tau = - \int\limits_0^\omega B(\tau) f\left(\tau, x, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x(s))ds\right) +$$

$$+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x(\tau_i-0)+I_i\left(x(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x(\tau_i-0))ds\right)\right)+$$

$$+\int\limits_0^{\omega} f\left(\tau,x,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x)ds\right)d\tau. \qquad (30)$$

Подставляя (5) в (30), находим

$$x(t)=\overline{P}^{\,-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega}P(\tau)d\tau\int\limits_t^{\tau}A(s)x(s)ds+\int\limits_0^{\omega}P(\tau)d\tau\int\limits_t^{\tau}f\left(\xi,x,\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x)ds\right)d\xi+\right.$$

$$+\int\limits_0^{\omega}P(\tau)d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_i x(\tau_i-0)+I_i\left(x(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x(\tau_i-0))ds\right)\right)-$$

$$-\int\limits_0^{\omega}B(\tau)f\left(\tau,x(\tau),\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x)ds\right)d\tau+$$

$$+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x(\tau_i-0)+I_i\left(x(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x(\tau_i-0))ds\right)\right)+$$

$$\left.+\int\limits_0^{\omega}f\left(\tau,x(\tau),\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x)ds\right)d\tau\right). \qquad (31)$$

Введем обозначения:

$$j=\|\overline{P}^{\,-1}\|,\quad \overline{q}=j\left(\frac{\alpha^3\omega^3}{3}+\frac{\alpha^2\omega^3}{3}(L_1+L_2LL_3)+\frac{\alpha\omega^2}{2}(L_1+L_2LL_3)+\right.$$

$$\left.+(\overline{D}+(L_4+L_5ML_6)d)++(L_1+L_2LL_3)\right)+\frac{\alpha^2\omega^2}{2}\left(\overline{D}+(L_4+L_5ML_6)d\right).$$

Применяя к (31) принцип сжимающих отображений, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если выполняются соотношение (25) и неравенство*

$$\overline{q}<1, \qquad (32)$$

то система (1), (2) имеет единственное ω-периодическое решение.

Имеет место следующая теорема о построении периодического решения системы (1), (2).

Теорема 5. *Пусть выполняются (25), (32) и неравенство*

$$j\Bigg(\frac{\alpha^3\omega^3}{3}\rho+\frac{\alpha^2\omega^3}{3}\rho(L_1+L_2LL_3)+\frac{\alpha\omega^2}{2}(L_1+L_2LL_3)\rho+\frac{\alpha^2\omega^3}{3}h+\frac{\alpha^2\omega^2}{2}h_1+\frac{\alpha\omega^2}{2}h+\omega h+$$
$$+h_1d+\omega\rho(L_1+L_2LL_3)+\rho(\overline{D}+(L_4+L_5ML_6)d)\Bigg)+\frac{\alpha^2\omega^2}{2}(\overline{D}+(L_4+L_5ML_6)d)\le\rho. \tag{33}$$

Тогда существует последовательность $\{x_k(t)\}_1^\infty$, сходящаяся к ω-периодическому решению системы (1), (2) и удовлетворяющая неравенству (22).

Доказательство. Решение системы (1), (2) будем искать в виде

$$x_0=\mathrm{const},\quad x_1=x_1(0)+B(t)x_0\quad\forall t\in[0;\omega], \tag{34}$$

$$x_2(t)=x_2(0)+\int\limits_0^t A(\tau)x_1(\tau)d\tau+\int\limits_0^t f\left(\tau,x_0,\int\limits_0^\tau\varphi(\tau,s,x_0)ds\right)d\tau \tag{35}$$

при $t\in[0;\tau_1]$,

$$\Delta x_2|_{t=\tau_i}=D_ix_0+I_i\left(x_0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_0)ds\right). \tag{36}$$

Из (35), (36) следует

$$x_2(t)=x_2(0)+B(t)x_1(t)-B(0)x_1(0)-\int\limits_0^t P(\tau)x_0d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t f\left(\tau,x_0,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x_0)ds\right)d\tau+$$
$$+\sum_{0<\tau_i<t}\left(D_ix_0+I_i\left(x_0,\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_0)ds\right)\right)\quad\forall t\in[0;\omega]. \tag{37}$$

Применяя к (37) ω-периодичность $x_2(t)$, имеем

$$x_0 = \overline{P}^{\,-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega} f\left(\tau, x_0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau,s,x_0)ds\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_0 + I_i\left(x_0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s,x_0)ds\right)\right)\right). \tag{38}$$

Функция $x_3(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$x_3(t) = x_3(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, x_1, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau,s,x_1)ds\right) d\tau, \tag{39}$$

$$\Delta x_3|_{t=\tau_i} = D_i x_1(\tau_i - 0) + I_i\left(x_1(\tau_i-0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_1(\tau_i-0))ds\right). \tag{40}$$

Интегрируя первый интеграл в (39) по частям с учетом (40), получаем, что для любого $t \in [0;\omega]$ функция $x_3(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x_3(t) = x_3(0) + B(t)x_2(t) - B(0)x_2(0) - \int\limits_0^t P(\tau)x_1(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t B(\tau) f\left(\tau, x_0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau,s,x_0)ds\right) d\tau + \sum_{0<\tau_i<t}\left(D_i x_1 + I_i\left(x_1, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s,x_1)ds\right)\right). \tag{41}$$

Запишем $x_1(\tau)$ в виде

$$x_1(\tau) = x_1(t) + (B_1(\tau) - B(t))x_0. \tag{42}$$

Подставляя (42) в (41), с учетом ω-периодичности $x_3(t)$ находим

$$x_1(t) = \overline{P}^{\,-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega} P(\tau)(B(\tau)-B(t))x_0 d\tau - \int\limits_0^{w} B(\tau) f\left(\tau, x_0, \int\limits_0^{\tau} \varphi(\tau,s,x_0)ds\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_1 + I_i\left(x_1, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s,x_1)ds\right)\right)\right).$$

Функция $x_{k+2}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x_{k+2}(t) = x_{k+2}(0) + \int_0^t A(\tau)x_{k+1}(\tau)d\tau + \int_0^t f\left(\tau, x_k, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_k)ds\right) d\tau \ \forall t \in [0; \tau_1], \quad (43)$$

$$\Delta x_{k+2}|_{t=\tau_i} = D_i x_k(\tau_i - 0) + I_i\left(x_k(\tau_i - 0), \int_0^{M_i} \psi_i(s, x_k(\tau_i - 0))ds\right). \quad (44)$$

Запишем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (43). Затем проинтегрируем его по частям и с учетом (44) получим, что для любого $t \in [0; \omega]$ функция $x_{k+2}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$x_{k+2}(t) = x_{k+2}(0) + B(t)x_{k+1}(t) - B(0)x_{k+1}(0) - \int_0^t P(\tau)x_k(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^t B(\tau)d\tau \int_0^\tau f\left(\xi, x_{k-1}, \int_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-1})ds\right) d\xi + \int_0^t f\left(\tau, x_k, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_k)ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{0<\tau_i<t}\left(D_i x_k(\tau_i - 0) + I_i\left(x_k(\tau_i - 0), \int_0^{M_i} \psi(s, x_k(\tau_i - 0))ds\right)\right). \quad (45)$$

Применяя к (45) условие ω-периодичности функции $x_{k+2}(t)$, имеем

$$\int_0^w P(\tau)x_k(\tau)d\tau = - \int_0^w B(\tau)d\tau \int_0^\tau f\left(\xi, x_{k-1}, \int_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-1})ds\right) d\xi +$$

$$+ \int_0^\omega f\left(\tau, x_k, \int_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_k)ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_k(\tau_i - 0) + I_i\left(x_k(\tau_i - 0), \int_0^{M_i} \psi_i(s, x_k(\tau_i - 0))ds\right)\right). \quad (46)$$

Для любого $\tau \in [0; \omega]$ записываем

$$x_k(\tau) = x_k(t) + \int_t^\tau A(s)x_{k-1}(s)ds + \int_t^\tau f\left(\xi, x_{k-2}, \int_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-2}(s))ds\right) d\tau +$$

$$+\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_i x_{k-2}(\tau_i-0)+I_i\left(x_{k-2}(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_{k-2}(\tau_i-0))ds\right)\right). \tag{47}$$

Подставляя (47) в левую часть (46), находим

$$x_k(t)=\overline{P}^{\,-1}(\omega)\left(-\int\limits_0^{\omega}P(\tau)d\tau\int\limits_t^{\tau}A(s)x_{k-1}(s)ds-\right.$$

$$-\int\limits_0^{\omega}P(\tau)d\tau\int\limits_t^{\tau}f\left(\xi,x_{k-2},\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x_{k-2}(s))ds\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^{\omega}P(\tau)d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_i x_{k-2}(\tau_i-0)+I_i\left(x_{k-2}(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_{k-2}(\tau_i-0))ds\right)\right)-$$

$$-\int\limits_0^{\omega}B(\tau)d\tau\int\limits_0^{\tau}f\left(\xi,x_{k-1},\int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x_{k-1}(s))ds\right)d\xi+\int\limits_0^{\omega}f\left(\tau,x_k,\int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x_k)ds\right)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_k(\tau_i-0)+I_i\left(x_k(\tau_i-0),\int\limits_0^{M_i}\psi_i(s,x_k(\tau_i-0))ds\right)\right)\right). \tag{48}$$

Используя (48), оцениваем норму

$$\|x_{k+1}-x_k\|\le\overline{q}_1\|x_k-x_{k-1}\|+\overline{q}_2\|x_{k-1}-x_{k-2}\|, \tag{49}$$

где

$$\overline{q}_1=\frac{j}{1-j\omega(L_1+L_2LL_3)-j(\overline{D}+(L_4+L_5LM_6)d)}\left(\frac{\alpha\omega^2}{2}(L_1+L_2LL_3)+\frac{\alpha^3\omega^3}{3}\right),$$

$$\overline{q}_2=\frac{1}{1-j\omega(L_1+L_2LL_3)-j(\overline{D}+(L_4+L_5LM_6)d)}\left(\frac{\alpha^2\omega^3}{3}(L_1+L_2LL_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2\omega^2}{2}(\overline{D}+(L_4+L_5LM_6)d)\right).$$

Прибавим и вычтем из (48) следующее выражение:

$$\overline{P}^{\,-1}\left(\int\limits_0^{\omega} P(\tau)d\tau \int\limits_t^{\tau} f\left(\xi, 0, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi,s,0)ds\right) d\tau + \int\limits_0^{\omega} P(\tau)d\tau \sum_{0<\tau_i<\tau} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s,0)ds\right) + \right.$$

$$+ \int\limits_0^{\omega} B(\tau)d\tau \int\limits_0^{\tau} f\left(\xi, 0, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi,s,0)ds\right) d\xi +$$

$$\left. + \int\limits_0^{\omega} f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau,s,0)ds\right) d\tau + \sum_{0<\tau_i<\omega} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s,0)ds\right)\right).$$

Упрощая полученное выражение и предполагая, что $\|x_l\| \le \rho$, $l = \overline{0, k-1}$, оцениваем норму

$$\|x_k\| \le \frac{1}{1 - j\omega(L_1 + L_2LL_3) - j(\overline{D} + (L_4 + L_5LM_6)d)} \left(\frac{j\alpha^3\omega^3\rho}{3} + \frac{j\alpha^2\omega^3}{3}(L_1 + L_2LL_3)\rho + \right.$$

$$+ \frac{\alpha^2\omega^2\rho}{2}(\overline{D} + (L_4 + L_5LM_6)d) + \frac{\alpha\omega^2}{2} j\rho(L_1 + L_2LL_3) +$$

$$\left. + \frac{\alpha^2\omega^3 hj}{3} + \frac{j\alpha^2\omega^2 h_1}{2} + \frac{\alpha\omega^2 hj}{2} + \omega hj + h_1 dj\right). \tag{50}$$

Условия (32) и (49) обеспечивают сходимость последовательности $\{x_k(t)\}_1^{\infty}$, а из неравенств (33), (50) следует (22).

Укажем другой способ нахождения итераций, где приближения находятся в явном виде. Пусть

$$x_{-1} = 0, \quad x_0 = \mathrm{const}, \quad x_1(t) = x_1(0) + B(t)x_0 \quad \forall t \in [0; \omega],$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau,s,0)ds\right) d\tau, \tag{51}$$

$$\Delta x_2|_{t=\tau_i} = I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s,0)ds\right). \tag{52}$$

Использовав (51), (52), функцию $x_2(t)$ на отрезке $[0;\omega]$ запишем в виде

$$x_2(t) = x_2(0) + B(t)x_1(t) - B(0)x_1(0) - \int\limits_0^t P(\tau)x_0 d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, 0)ds\right) d\tau + \sum_{0<\tau_i<t} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi(s,0)ds\right).$$

Из ω-периодичности $x_2(t)$ следует

$$x_0 = \overline{P}^{\,-1}(\omega)\left(\int\limits_0^{\omega} f\left(\tau, 0, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, 0)ds\right) d\tau + \sum_{0<\tau_i<\omega} I_i\left(0, \int\limits_0^{M_i} \psi(s,0)ds\right)\right).$$

Функцию $x_{k+2}(t)$ будем искать в виде

$$x_{k+2}(t) = x_{k+2}(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x_{k+1}(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f\left(\tau, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_{k-1})ds\right) d\tau \tag{53}$$

при $0 \le t \le \tau_1$,

$$\Delta x_{k+2}|_{t=\tau_i} = D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i - 0))ds\right). \tag{54}$$

Интегрируя первый интеграл в (53) по частям, имеем

$$x_{k+2}(t) = x_{k+2}(0) + B(t)x_{k+1}(t) - B(0)x_{k+1}(0) - \int\limits_0^t B(\tau)\dot{x}_{k+1}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t f\left(\tau, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_{k-1}(s))ds\right) d\tau \tag{55}$$

при $0 \le t \le \tau_1$. Но

$$\dot{x}_{k+1}(\tau) = A(\tau)x_k(\tau) + \int\limits_0^{\tau} f\left(\xi, x_{k-2}, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-2}(s))ds\right) d\xi \tag{56}$$

при $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Подставляя (56) в (55) и учитывая (54), для любого $t \in [0;\omega]$ имеем

$$x_{k+2}(t) = x_{k+2}(0) + B(t)x_{k+1}(t) - B(0)x_{k+1}(0) - \int\limits_0^t P(\tau)x_k(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t B(\tau)d\tau \int\limits_0^\tau f\left(\xi, x_{k-2}, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, x_{k-2}(s))ds\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t f\left(\tau, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_{k-1}(s))ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{0<\tau_i<t} \left(D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i - 0))ds\right)\right). \qquad (57)$$

Применяя к (57) условие ω-периодичности $x_{k+2}(t)$, получаем

$$\int\limits_0^\omega P(\tau)x_k(\tau)d\tau = - \int\limits_0^\omega B(\tau)d\tau \int\limits_0^\tau f\left(\xi, x_{k-2}, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-2}(s))ds\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^\omega f\left(\tau, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\tau)} \varphi(\tau, s, x_{k-1}(s))ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{0<\tau_i<\omega} \left(D_i x_{k-1}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi(s, x_{k-1}(\tau_i - 0))ds\right)\right). \qquad (58)$$

Но

$$x_k(\tau) = x_k(t) + \int\limits_t^\tau A(s)x_{k-1}ds + \int\limits_t^\tau f\left(\xi, x_{k-3}, \int\limits_0^{L(\xi)} \varphi(\xi, s, x_{k-3}(s))ds\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{t<\tau_i<\tau} \left(D_i x_{k-3}(\tau_i - 0) + I_i\left(x_{k-3}(\tau_i - 0), \int\limits_0^{M_i} \psi_i(s, x_{k-3}(\tau_i - 0))ds\right)\right). \qquad (59)$$

Подставляя (59) в левую часть (58), находим

$$x_k(t) = \overline{P}^{\,-1}(\omega)\left(-\int\limits_0^\omega P(\tau)d\tau\int\limits_t^\tau A(s)x_{k-1}(s)ds - \right.$$

$$-\int\limits_0^\omega P(\tau)d\tau\int\limits_t^\tau f\left(\xi, x_{k-3}, \int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x_{k-3}(s))ds\right)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^\omega P(\tau)d\tau\sum_{t<\tau_i<\tau}\left(D_i x_{k-3}(\tau_i-0) + I_i\left(x_{k-3}(\tau_i-0), \int\limits_0^{M_i}\psi_i(s, x_{k-3}(\tau_i-0))ds\right)\right) -$$

$$-\int\limits_0^\omega B(\tau)d\tau\int\limits_0^\tau f\left(\xi, x_{k-2}, \int\limits_0^{L(\xi)}\varphi(\xi,s,x_{k-2}(s))ds\right)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^\omega f\left(\tau, x_{k-1}, \int\limits_0^{L(\tau)}\varphi(\tau,s,x_{k-1}(s))ds\right)d\tau +$$

$$\left.+\sum_{0<\tau_i<\omega}\left(D_i x_{k-1}(\tau_i-0) + I_i\left(x_{k-1}(\tau_i-0), \int\limits_0^{M_i}\psi_i(s, x_{k-1}(\tau_i-0))ds\right)\right)\right). \qquad (60)$$

Используя (60), получаем оценку

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le \overline{q}_3\|x_k - x_{k-1}\| + \overline{q}_4\|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \overline{q}_5\|x_{k-2} - x_{k-3}\|, \qquad (61)$$

где

$$\overline{q}_3 = j\left(\frac{\alpha^3\omega^3}{3} + \omega(L_1 + L_2LL_3) + \overline{D} + (L_4 + L_5ML_6)d\right),$$

$$\overline{q}_4 = j\frac{\alpha\omega^2}{2}(L_1 + L_2LL_3),$$

$$\overline{q}_5 = \frac{\alpha^2\omega^3 j}{3}(L_1 + L_2LL_3) + \frac{\alpha^2\omega^2}{2}(\overline{D} + (L_4 + L_5ML_6)d).$$

На основании (61) можно доказать, что при выполнении (25) последовательность $\{x_k(t)\}_1^\infty$, определяемая по формуле (60), сходится к ω-периодическому решению системы (1), (2). При этом справедливы оценки

$$\|x - x_k\| \le \frac{1}{1-\overline{q}}(\overline{q}_3\delta_{k-1} + \overline{q}_4(\delta_{k-2} + \delta_{k-1}) + \overline{q}_5(\delta_{k-3} + \delta_{k-2} + \delta_{k-1})), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$$\|x - x_i\| \le \frac{1}{1-\overline{q}}(\delta_2 + (1-\overline{q}_3)\delta_1 + \delta_0), \quad i = \overline{1, 2},$$

$$\|x\| \le \|x_0\| + \frac{1}{1-\overline{q}}\left((1-\overline{q}_3-\overline{q}_4)\delta_0 + (1-\overline{q}_3)\delta_1 + \delta_2\right),$$

где $\delta_l = ||x_{l+1} - x_l||, l = 0, 1, \ldots$.

Теорема доказана.

Таким образом, в настоящей статье предложен конструктивный метод исследования периодических решений слабонелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в невырожденном и вырожденном случаях. Перспективным является изучение структурных свойств нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

1. *Быков Я. В., Рузикулов М. Щ.* О периодических и ограниченных решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. — 1962. — С. 3–20.
2. *Быков Я. В.* Периодические решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их асимптотики. — Фрунзе: Илим, 1986. — 279 с.
3. *Самойленко А. М., Нуржанов О. Д.* Метод Бубнова–Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Дифференц. уравнения. — 1979. — **15**, № 7. — С. 1503–1517.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Выща шк., 1976. — 280 с.
5. *Вахабов Г. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1969. — **17**, № 5. — С. 675–683.
6. *Перестюк Н. А., Сарафова М. Н., Хекимов М. А.* Периодические решения слабонелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика, механика. — 1980. — № 22. — С. 96–101.
7. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н., Кенжебаев К. К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. — 226 с.

Получено 13.09.2005