УДК 517.9

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. С. Чуйко

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We find estimates for values of the small parameter such that the iteration procedure used to construct solutions of a Noetherian semi-nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations is convergent in both the critical and the noncritical cases.

Знайдено оцінки області значень малого параметра, для яких зберігається збіжність ітераційної процедури для побудови розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному та некритичному випадках.

1. Постановка задачи. Найдем оценку ε_* длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры $[1, 2]$ для построения решения $z(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\,(z_1(t, \varepsilon), \ldots, z_n(t, \varepsilon))$, $z_i(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $z_i(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \tag{3}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{4}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал вида $\ell z(\cdot) = \mathrm{col}\,(\ell_1 z(\cdot), \ldots, \ell_m z(\cdot))$, где $m \neq n$, $\ell_1 z(\cdot), \ldots$ $\ldots, \ell_m z(\cdot) \ : \ C[a, b] \ \to \ R^1$ — линейные ограниченные функционалы. Нелинейности $Z(z, t, \varepsilon)$ и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задачи (1), (2) непрерывно дифференцируемы по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и непрерывны по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z, t, \varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a, b]$.

Для определения величины ε_* ранее был использован метод мажорирующих уравнений Ляпунова [2–4], основной трудностью которого было нахождение этих уравнений. В данной статье предложены конструктивные формулы для вычисления величины ε_* как в критических, так и в некритических случаях.

2. Некритический случай. Предположим, что для порождающей задачи (3), (4) имеет место некритический случай $P_{Q^*} = 0$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, P_{Q^*} — $(m \times \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица $(X(a) = I_n)$ однородной части системы (3). При этом общее решение задачи (3), (4) $z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t)$ определяет обобщенный оператор Грина задачи (3), (4)

$$G[f; \alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t).$$

Здесь Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1].

В некритическом случае задача (1), (2) разрешима для любых нелинейностей дифференциальной системы $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ и краевого условия $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$. Искомое решение $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$ ищем в окрестности решения порождающей задачи. Для нахождения возмущения

$$x(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\,(x_1(t, \varepsilon), \ldots, x_n(t, \varepsilon)),$$

$$x_j(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x_j(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

порождающего решения $z_0(t, c_r)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6) представимо в виде

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \tag{7}$$

где $x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right](t)$. Произвольный вектор

$$c_r(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(c_r^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_r^{(r)}(\varepsilon)\right),$$

$$c_r^{(j)}(\cdot) \in C^1[0, \varepsilon_0], \quad c_r(0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Оператор Грина в равенстве (7) определяет непрерывный оператор

$$\Phi_0 x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + \varepsilon X(t)Q^+\{J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K[Z(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\} + \varepsilon K[Z(z_0(s, c_r) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t).$$

Система $x(t,\varepsilon) = \Phi_0 x(t,\varepsilon)$ в этом случае эквивалентна краевой задаче (1), (2) на множестве функций $x(t,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$, причем для построения решений этой операторной системы применим [1, 2] метод простых итераций. Таким образом, получаем итерационную процедуру

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \Phi_0\, x_k(t,\varepsilon), \quad x_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{8}$$

Пусть $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ — вектор-функции из малой окрестности нуля, причем

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(x_1(t,\varepsilon), \ldots, x_n(t,\varepsilon)), \quad y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(y_1(t,\varepsilon), \ldots, y_n(t,\varepsilon)),$$

$$x_i(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x_i(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad y_i(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Норму функции $\varphi(t) = \mathrm{col}\,(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $\varphi_i(\cdot) \in C[a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, полагаем равной [5, с. 385, 6, с. 123]

$$\|\varphi(t)\| = \max_{1 \le i \le n} \|\varphi_i(t)\|, \quad \|\varphi_i(t)\| = \max_{a \le t \le b} |\varphi_i(t)|\,.$$

Нормой $(m \times n)$-матрицы $A(t) = a_{ij}(t)$, $a_{ij}(\cdot) \in C[a,b]$, будем называть число

$$\|A(t)\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}(t)\|.$$

В силу теоремы Рисса векторный функционал $\ell x(\cdot) = \mathrm{col}\,(\ell_1 x(\cdot), \ldots, \ell_m x(\cdot))$, определенный на пространстве непрерывных вектор-функций, представим в виде интеграла Римана – Стильтьеса

$$\ell x(\cdot) = \int_a^b d\Omega(t)\, x(t),$$

где $\Omega(t)$ — $(m \times n)$-матрица, элементы которой — функции ограниченной на $[a,b]$ вариации; при этом $\|\ell x(\cdot)\| = \|\Omega(t)\|$.

Для некоторых точек $\xi(t,\varepsilon)$ и $\zeta(t,\varepsilon)$ отрезка, соединяющего точки $z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$ и $z_0(t,c_r) + y(t,\varepsilon)$, и достаточно малых норм векторов $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\|Z(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon), s, \varepsilon) - Z(z_0(t,c_r) + y(t,\varepsilon), s, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \left\| \left. \frac{\partial Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z} \right|_{z=\xi(t,\varepsilon)} \right\| \|x - y\| \le \theta_1 \|x - y\|, \tag{9}$$

$$J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J(z_0(\cdot,c_r) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \le \theta_2 \|x - y\|, \tag{10}$$

где

$$\theta_1 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho \\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0] \\ t\in[a,b]}} \left\| \frac{\partial Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\xi(t,\varepsilon)} \right\|,$$

$$\theta_2 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho \\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z=\zeta(\cdot,\varepsilon)} \right\|.$$

Существование и конечность констант θ_1, θ_2 гарантированы непрерывной дифференцируемостью нелинейной вектор-функции $Z(z,t,\varepsilon)$ по первому аргументу и непрерывной дифференцируемостью (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r)$ и точки $\varepsilon = 0$.

Пусть

$$q = \|X(t)Q^+\|, \quad \lambda = \|\ell K[*](\cdot)\|, \quad \mu = \|K[*](t)\|.$$

С учетом неравенств (9), (10) получаем оценку

$$\|\Phi_0\, x(t,\varepsilon) - \Phi_0\, y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon q\theta_1\|x-y\| + \varepsilon q\lambda\theta_2\|x-y\| + \varepsilon\mu\theta_2\|x-y\|.$$

При условии $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ оператор $\Phi_0\, x(t,\varepsilon)$ является сжимающим; здесь

$$\varepsilon_* = \frac{1}{q(\theta_1+\theta_2\lambda)+\mu} \le \varepsilon^*.$$

Таким образом, доказана следующая теорема [1, 2].

Теорема 1. *В некритическом случае ($P_{Q^*} = 0$) порождающая задача (3), (4) разрешима при любых неоднородностях дифференциальной системы (3) и краевого условия (4) и имеет r линейно независимых решений $z_0(t,c_r)$. Задача (1), (2) при этом разрешима для любых неоднородностей дифференциальной системы $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и краевого условия $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и имеет r-параметрическое решение $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$. Для нахождения возмущения $x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(x_1(t,\varepsilon),\ldots,x_n(t,\varepsilon))$, $x_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $x_j(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $x(t,0) \equiv 0$, $j = 1,2,\ldots,n$, порождающего решения $z_0(t,c_r)$ применима сходящаяся при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ итерационная процедура (8).*

Оценка величины ε_* в каждом конкретном случае может быть улучшена, например, оптимальным выбором норм вектор-функций и согласованных с ними норм матриц; кроме того, как показано в монографии [2], итерационная процедура вида (8) может сходиться к искомому решению, даже если оператор Φ_0 не является сжимающим.

Пример 1. Оценим значение величины ε^* в задаче о нахождении периодического решения $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T]$ скалярного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \arccos z. \tag{11}$$

Поскольку $X(t) = e^t$, $Q = \ell X(\cdot) = 1 - e^T \ne 0$, имеет место некритический случай. Таким образом, согласно теореме 1 уравнение (11) имеет единственное периодическое решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Легко показать, что итерационная процедура

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \arccos(z_k(t,\varepsilon)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

сходится к периодическому решению уравнения (11). Положив $T = 1$, оценим величину

$$\varepsilon^* \geq \varepsilon_* = \frac{e-1}{e(2e-1)\cdot 0,8578} \approx 0,1661.$$

При этом, как показывают численные эксперименты, значение $\varepsilon^* \approx 0,6033$.

3. Критический случай. Предположим далее, что имеет место критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\Big\} = 0. \tag{12}$$

При этом порождающая задача (3), (4) имеет r-параметрическое семейство решений $z_0(t, c_r)$. Потребуем от нелинейностей задачи (1), (2) $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ непрерывной дифференцируемости по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_r)$ и непрерывной дифференцируемости по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, как и в некритическом случае, считаем нелинейную вектор-функцию $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a, b]$.

Необходимое условие существования решения задачи (1), (2) в критическом случае определяет следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие (12) разрешимости порождающей задачи (3), (4). Предположим также, что задача (1), (2) имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) = z_0(t, c_r^*)$. Тогда вектор $c_r^* \in R^r$ удовлетворяет уравнению*

$$P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), s, 0)](\cdot)\Big\} = 0. \tag{13}$$

Предположим далее необходимое условие разрешимости задачи (1), (2) выполненным. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in R^r$ уравнения (13), ищем решение задачи (1), (2) $z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + {}+G[f;\alpha](t)$. Таким образом, приходим к задаче

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{14}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{15}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) +$$

$$+ A_1(t)x(t, \varepsilon) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{16}$$

где $A_1(t) = Z'_z(z_0(t, c_r^*), t, 0)$. Остаток $R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ при условии $Z'_\varepsilon(z_0(t, c_r^*), t, 0) \equiv 0$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первых два члена разложения, поэтому

$$R_1(z, t, \varepsilon)\Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z, t, \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ и по второму аргументу, выделяем линейную $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ часть этого функционала

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{17}$$

Остаток $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ при условии $J'_\varepsilon(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = 0$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первых два члена разложения, поэтому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}} = 0.$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ решение краевой задачи (14), (15) определяет операторная система

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$B_0 c_r = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K\Big[A_1(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}, \tag{18}$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big](t),$$

эквивалентная задаче о построении решения системы уравнений (14), удовлетворяющих краевому условию (15); здесь $B_0 = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\Big\}$ — $(d \times r)$-матрица. Операторная система (18) эквивалентна задаче о построении решения уравнения

$x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon)$ на множестве функций $x(t,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$, где

$$\Phi x(t,\varepsilon) = -X_r(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon\ell_1 G\left[Z(z_0+x,s,\varepsilon);\ J(z_0+x,\varepsilon)\right](\cdot) + J_1(z_0+x,\varepsilon) -$$

$$-\ \ell K\left[\varepsilon A_1(s)G\left[Z(z_0+x,\tau,\varepsilon);\ J(z_0+x,\varepsilon)\right](s) + R_1(z_0+x,s,\varepsilon)\right](\cdot)\Big\} +$$

$$+\ \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon,\varepsilon))\Big](t) + X_r(t)P_\rho c_\rho.$$

Оператор $\Phi\Big(Z(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),s,\varepsilon)\ J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big)$ представляет собой суперпозицию билинейного по $Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, действующего на непрерывно дифференцируемую по x функцию $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Билинейность по $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ означает, что для любых действительных чисел λ_1, λ_2 и любых функций $Z_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, $Z_2(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционалов $J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ имеет место равенство

$$\Phi\Big(\lambda_1 Z_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + \lambda_2 Z_2(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon);\ \lambda_1 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \lambda_2 J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big) =$$

$$= \lambda_1\Phi\Big(Z_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon);\ J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big) + \lambda_2\Phi\Big(Z_2(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon);\ J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big).$$

Таким образом, $\Phi x(t,\varepsilon)$ — непрерывный ограниченный оператор, действующий из пространства непрерывных на отрезках $[a,b]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций $x(t,\varepsilon)$ в себя. Оценим длину промежутка, на котором оператор $\Phi x(t,\varepsilon)$ является сжимающим. Пусть $x(t,\varepsilon)$ и $y(t,\varepsilon)$ — вектор-функции из малой окрестности нуля. Учитывая билинейность оператора $\Phi x(t,\varepsilon)$, представим его в виде

$$\Phi x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{5}\Phi_i x(t,\varepsilon) + X_r(t)P_\rho c_\rho, \quad c_\rho \in R^\rho,$$

где

$$\Phi_1 x(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$\Phi_2 x(t,\varepsilon) = -\varepsilon X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\ell_1 G\Big[Z(z_0+x,s,\varepsilon);\ J(z_0+x,\varepsilon)\Big](\cdot),$$

$$\Phi_3 x(t,\varepsilon) = -X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}J_1(z_0+x,\varepsilon),$$

$$\Phi_4 x(t,\varepsilon) = \varepsilon X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Big\{A_1(s)G\Big[Z(z_0+x,\tau,\varepsilon);\ J(z_0+x,\varepsilon)\Big](s)\Big\}(\cdot),$$

$$\Phi_5 x(t,\varepsilon) = X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Big\{R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}(\cdot),$$

и оценим норму разности $\|\Phi x(t,\varepsilon) - \Phi y(t,\varepsilon)\|$. Очевидно,

$$\|\Phi x(t,\varepsilon) - \Phi y(t,\varepsilon)\| \le \sum_{i=1}^{5}\left\|\Phi_i x(t,\varepsilon) - \Phi_i y(t,\varepsilon)\right\|.$$

Пусть $\xi_1(t,\varepsilon)$, $\zeta_1(t,\varepsilon)$ — некоторые точки отрезка, соединяющего точки $z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon)$ и $z_0(t,c_r)+y(t,\varepsilon)$. Обозначим

$$\sigma_1 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho \\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0] \\ t\in[a,b]}} \left\| \frac{\partial Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{z=\xi_1(t,\varepsilon)} \right\|,$$

$$\sigma_2 = \max_{\substack{\|x\|,\|y\|\le\rho \\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta_1(\cdot,\varepsilon)} \right\|.$$

Как и в некритическом случае, получаем оценку нормы разности

$$\|\Phi_1 x(t,\varepsilon)-\Phi_1 y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon\Big[q(\sigma_1+\sigma_2\lambda)+\mu\Big]\|x-y\|.$$

Аналогично составляется неравенство

$$\|\Phi_2 x(t,\varepsilon)-\Phi_2 y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1\Big(\lambda_1\sigma_2+\lambda\lambda_1\sigma_1+\lambda_2\sigma_1\Big)\|x-y\|,$$

где

$$q_1 = \|X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\|,\quad \lambda_1 = \|\ell_1 X(\cdot)Q^+\|,$$

$$\lambda_2 = \|\ell_1 K[*](\cdot)\|,\quad \lambda_3 = \|\ell_1 K[A_1(s)*](\cdot)\|.$$

Согласно теореме о среднем в некоторой точке $\zeta_2(t,\varepsilon)$ отрезка, соединяющего точки $z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)$ и $z_0(t,c_r^*)+y(t,\varepsilon)$, и в некоторой точке ε_1 отрезка $[0,\varepsilon_0]$ при условии $\|x\|$, $\|y\|\le\rho$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$

$$\|J_1(z_0+x,\varepsilon)-J_1(z_0+y,\varepsilon)\| = \left\|\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta_2(t,\varepsilon)}\cdot(x-y)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{\partial^2 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\partial\varepsilon}\bigg|_{\substack{z=\zeta_2(t,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_1}}\cdot\varepsilon(x-y)\right\|.$$

Таким образом, $\|J_1(z_0+x,\varepsilon)-J_1(z_0+y,\varepsilon)\|\le\sigma_3\varepsilon\|x-y\|$, где

$$\sigma_3 = \max_{\substack{\|x\|,\,\|y\|\le\rho \\ \varepsilon_1\in[0,\varepsilon_0]}} \left\|\frac{\partial^2 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\partial\varepsilon}\bigg|_{\substack{z=\zeta_2(t,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_1}}\right\|,$$

следовательно,

$$\|\Phi_3 x(t,\varepsilon)-\Phi_3 y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1\sigma_3\|x-y\|.$$

Оценим норму разности

$$\|\Phi_4 x(t,\varepsilon)-\Phi_4 y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1 q\lambda_3\sigma_2\|x-y\|+\varepsilon q_1 q\lambda_3\lambda\sigma_1\|x-y\|+\varepsilon q_1\lambda_3\mu\sigma_1\|x-y\|.$$

Согласно теореме о среднем при условии $\|x\|, \|y\| \le \rho$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ в некоторой точке $\xi_2(t,\varepsilon)$ отрезка, соединяющего точки $z_0(t, c_r) + x(t,\varepsilon)$ и $z_0(t, c_r) + y(t,\varepsilon)$, и в некоторой точке ε_2 отрезка $[0, \varepsilon_0]$

$$\|R_1(z_0 + x, s, \varepsilon) - R_1(z_0 + y, s, \varepsilon)\| = \left\| \frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{z=\xi_2(t,\varepsilon)} \cdot (x-y) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial^2 R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=\xi_2(t,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_2}} \cdot \varepsilon(x-y) \right\|.$$

Таким образом,

$$\|\Phi_5 x(t,\varepsilon) - \Phi_5 y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon q_1 \lambda \sigma_4 \|x-y\|,$$

где

$$\sigma_4 = \max_{\substack{\|x\|, \|y\| \le \rho \\ t\in[a,b] \\ \varepsilon_2 \in [0,\varepsilon_0]}} \left\| \frac{\partial^2 R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=\zeta_2(t,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_2}} \right\|.$$

Используя неравенства для разностей $\|\Phi_i x(t,\varepsilon) - \Phi_i y(t,\varepsilon)\|$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, получаем оценку

$$\|\Phi x(t,\varepsilon) - \Phi y(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon\Big[q(\sigma_1 + \sigma_2\lambda) + \mu\Big]\|x-y\| +$$

$$+ \varepsilon q_1\Big(\lambda_1\sigma_2 + \lambda\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_1\Big)\|x-y\| +$$

$$+ \varepsilon q_1 q \lambda_3 \lambda \sigma_1 \|x-y\| + \varepsilon q_1 \lambda_3 \mu \sigma_1 \|x-y\| + \varepsilon q_1 \sigma_3 \|x-y\| +$$

$$+ \varepsilon q_1 \lambda \sigma_4 \|x-y\| + \varepsilon q_1 q \lambda_3 \sigma_2 \|x-y\|.$$

Итак,

$$\varepsilon_*^{-1} = q(\sigma_1 + \sigma_2\lambda) + \mu +$$

$$+ q_1\Big\{\lambda_1(\lambda\sigma_1 + \sigma_2) + \lambda_2\sigma_1 + \sigma_3 + \lambda\sigma_4 + \lambda_3\Big[q\sigma_2 + (\lambda+\mu)\sigma_1\Big]\Big\},$$

при этом искомое значение $\varepsilon_* \le \varepsilon^*$.

Теорема 3. *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический случай $P_{Q^*} \ne 0$ и выполнено условие (12) разрешимости порождающей задачи (3), (4). Тогда для каждого корня $c_r^* \in R^r$ уравнения (13) для порождающих амплитуд при условии $P_{B_0^*} = 0$ задача (5), (6) имеет ρ-параметрическое решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в нулевое $x(t,0) \equiv 0$ (здесь $\operatorname{rank} P_{B_0} = \rho$, $P_{B_0} : R^r \to N(B_0)$ — $(r \times r)$-матрица-ортопроектор). Это решение можно определить с помощью сходящегося при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ итерационного процесса вида [2–4]. При этом задача (1), (2) имеет ρ-параметрическое решение, при*

$\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) \equiv z_0(t,c_r^*)$, *которое может быть найдено по формуле* $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)$.

Пример 2. Условиям теоремы 3 удовлетворяет краевая задача

$$\frac{dz}{dt} = (2t-1)z + \varepsilon z \ln z,$$
$$\ell z(\cdot) = z(0) - z(1) = 0. \tag{19}$$

Поскольку $X(t) = e^{t^2-t}$, $Q = \ell X(\cdot) = X(0) - X(1) = 0$, имеет место критический случай; при этом $r = d = 1$, $P_{Q^*} = P_{Q_d^*} = P_Q = P_{Q_r} = 1$. Порождающее решение имеет вид $z_0(t,c) = ce^{t^2-t}$. Единственное нетривиальное решение $c_1^* = e^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}18136$ уравнения (13) $F(c) = c\ln c - \dfrac{c}{6} = 0$ задачи (19) определяет константу $B_0 = 1$.

Поскольку $B_0 \neq 0$, условие $P_{B_0^*} = 0$ выполнено, следовательно, согласно теореме 3 задача (19) имеет единственное $(\operatorname{rank} P_{B_0} = \rho = 0)$ решение, при этом первое приближение к отклонению от порождающего решения

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon e^{t^2-t} \int\limits_0^t e^{s-s^2}\, e^{\frac{1}{6}}\, e^{s^2-s} \ln e^{\frac{1}{6}}\, e^{s^2-s}\, ds = \varepsilon e^{\frac{1}{6}}\, e^{t^2-t} \left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right).$$

Оценим длину отрезка $[0,\varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры для построения решения задачи (19). Прежде всего заметим, что для линейного функционала $\ell z(\cdot,\varepsilon) = z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) \equiv 0$, определяющего краевое условие задачи (19), имеют место тождества $\ell_1 z(\cdot,\varepsilon) \equiv J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$, в свою очередь определяющие константы $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Поскольку $Q = 0$, то $Q^+ = 0$, следовательно, $q = \|X(t)Q^+\| = 0$. Функция e^{t-t^2} достигает своего максимума на отрезке $[0;1]$ в точке $t = \dfrac{1}{2}$, в которой своего максимума достигает показатель $t - t^2$. Следовательно, $\|e^{t-t^2}\| = e^{\frac{1}{4}}$. Таким образом, $\lambda \leq e^{\frac{1}{4}}$. Функция e^{t^2-t} достигает своего максимума на отрезке $[0;1]$ в точках $t = 0$ и $t = 1$, следовательно, $\|e^{t^2-t}\| = 1$. Таким образом, $\mu \leq e^{\frac{1}{4}}$. Для константы q_1 имеет место равенство $q_1 = \|X_r(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\| = \|X_r(t)\| = 1$. Поскольку $Q^+ = 0$, то $\lambda_1 = \|\ell_1 X(\cdot)Q^+\| = 0$. В силу тождества $\ell_1 z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0$ имеем $\lambda_2 = \|\ell_1 K[*](\cdot)\| = 0$. Функция $A_1(t) = 1 + \ln z_0(t,c_1^*) = t^2 - t + \dfrac{7}{6}$ достигает максимума на отрезке $[0;1]$ на его концах, поэтому $\|A_1(t)\| = A_1(0) = A_1(1) = \dfrac{7}{6}$. Таким образом, справедлива оценка

$$\lambda_3 = \|\ell K[A_1(s)*](\cdot)\| = \left\| \int\limits_0^1 e^{s-s^2} \left(s^2 - s + \frac{7}{6}\right) * (s)ds \right\| \leq e^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{7}{6}.$$

Производная $Z_z'(z,t,\varepsilon) = 1 + \ln z(t,\varepsilon)$ определена в малой окрестности порождающего решения; положим, для определенности, $\rho = 0{,}01$, при этом

$$1 + \ln\left(e^{t^2-t+\frac{1}{6}} - \rho\right) \leq \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z} \leq 1 + \ln\left(e^{t^2-t+\frac{1}{6}} + \rho\right).$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \max_{\substack{\|x\|,\,\|y\|\le 0{,}01 \\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0] \\ t\in[a,b]}} \left\| \left. \frac{\partial Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z} \right|_{z=\xi_1(t,\varepsilon)} \right\| = 1+\ln(e^{\frac{1}{6}}+0,1).$$

Тождество $Z'_{\varepsilon}(z,t,\varepsilon) \equiv Z''_{z\,\varepsilon}(z,t,\varepsilon) \equiv 0$ определяет константу $\sigma_4 = 0$. Итак,

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\mu + q_1\lambda_3\sigma_1(\lambda+\mu)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{4}} + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}\left[1+\ln\left(e^{\frac{1}{6}}+0,01\right)\right]} \approx 0,518181.$$

Предложенная в статье методика оценки величины ε^* дает возможность получать соответствующие оценки для автономных краевых задач вида (1), (2) краевых задач с запаздывающим аргументом и различным импульсным воздействием, в том числе и в более сложных критических случаях, например в критическом случае второго порядка [4].

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
4. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62 – 69.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

Получено 15.02.2005