УДК 517 . 956

УСЕРЕДНЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗІ ЗМІНОЮ ТИПУ КРАЙОВИХ УМОВ У ГУСТОМУ ДВОРІВНЕВОМУ З'ЄДНАННІ

Т. А. Мельник, П. С. Ващук

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, Київ, 01033, вул. Володимирська, 64
e-mail: melnyk@imath.kiev.ua
pavlo sergiyovich@rambler.ru

We consider a mixed boundary-value problem for the Poisson equation in a plane two-level junction Ω_ε, which is the union of a domain Ω_0 and a large number $2N$ of thin rods with thickness of order $\varepsilon = \mathcal{O}(N^{-1})$. The thin rods are divided into two levels depending on their lengths. In addition, the thin rods from each level are ε-periodically alternated. The nonuniform Neumann conditions and the uniform Dirichlet conditions are given respectively on the vertical sides of the thin rods from the first level and the second level. We investigate the asymptotic behaviour of the solution as $\varepsilon \to 0$. The convergence theorem and the convergence of the energy integral are proved.

Розглядається мішана крайова задача для рівняння Пуассона у плоскому дворівневому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості $2N$ тонких стержнів із товщиною порядку $\varepsilon = \mathcal{O}(N^{-1})$. Тонкі стержні розділено на два рівні в залежності від їх довжини, і стержні з кожного рівня ε-періодично чергуються. На вертикальних сторонах тонких стержнів першого рівня задано неоднорідні крайові умови Неймана, а на вертикальних сторонах стержнів другого рівня — однорідні крайові умови Діріхле. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку такої задачі при $\varepsilon \to 0$, доведено теорему збіжності та збіжність інтеграла енергії.

1. Постановка задачі та формулювання основного результату. Асимптотичним методам дослідження крайових задач в областях, складним чином залежних від малого параметра (перфоровані області, частково перфоровані області, каркасні конструкції), присвячено багато монографій та статей (див., наприклад, [1 – 14] і наведену в них бібліографію).

Крайові задачі в густих з'єднаннях (кількість компонент таких з'єднань необмежено зростає, коли параметр збурення ε прямує до нуля) мають свої специфічні труднощі і заслуговують на особливу увагу. Як показано в роботі [15], крайові задачі в густих з'єднаннях втрачають коерцитивність при $\varepsilon \to 0$, що значною мірою ускладнює асимптотичні дослідження. Зауважимо, що першими роботами в цьому напрямку були роботи [16 – 18], в яких вивчено асимптотичну поведінку функції Гріна задачі Неймана для рівняння Гельмгольца в необмеженому густому з'єднанні. В роботах [19 – 30] дано класифікацію густих з'єднань, розроблено асимптотичні методи дослідження основних крайових задач математичної фізики в густих сингулярно вироджувальних з'єднаннях різних типів, побудовано перші члени асимптотики та доведено асимптотичні оцінки, вивчено вплив крайових умов, які задаються на межах густих з'єднань, та геометричної конфігурації густих з'єднань на асимптотичну поведінку розв'язків.

У даній статті розглядається новий тип густих з'єднань, а саме густі багаторівневі з'єднання. Густе багаторівневе з'єднання є об'єднанням деякої області Ω_0, яка називається тілом з'єднання, та великої кількості $N = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\delta})$ тонких областей із товщиною порядку $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Тонкі області розділено на скінченне число рівнів залежно від їх довжини. Крім того, тонкі області з кожного рівня ε-періодично чергуються вздовж деякої множини на межі тіла з'єднання. Ця множина називається зоною з'єднання. Як тіло з'єднання, так і зона з'єднання, також можуть залежати від малого параметра ε.

Уперше задачу в плоскому дворівневому з'єднанні було розглянуто в [31], де досліджено асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій спектральної задачі, коли число тонких приєднувальних стержнів із кожного рівня необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. В роботі [32], використовуючи спеціальні оператори продовження, доведено теорему збіжності для розв'язку рівняння Пуассона в плоскому дворівневому з'єднанні з однорідними крайовими умовами Робіна на межах тонких стержнів; у статті [33], використовуючи метод узгодження асимптотичних розвинень, побудовано перші члени асимптотики розв'язку з мінімальними умовами гладкості на праву частину та доведено асимптотичні оцінки в просторі Соболєва $H^1(\Omega_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

У даній роботі досліджується вплив крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку рівняння Пуассона в плоскому дворівневому з'єднанні. Зокрема, на вертикальних сторонах тонких стержнів першого рівня задано неоднорідні крайові умови Неймана, а на вертикальних сторонах стержнів другого рівня — однорідні крайові умови Діріхле. Таким чином, крім специфічного збурення області в даній задачі ε-періодичним чином змінюються крайові умови.

Асимптотичні дослідження крайових задач з ε-періодичною зміною крайових умов (Неймана на Діріхле) на межі гладкої незбуреної області було проведено в роботах [8, 9, 34–36]. У цих роботах показано, що, переважно, першим членом асимптотики при $\varepsilon \to 0$ є розв'язок відповідної крайової задачі з умовами Діріхле.

Якісно новий результат даної роботи полягає в тому, що першим членом асимптотики при $\varepsilon \to 0$ є вектор-функція, компоненти якої є розв'язками двох незалежних крайових задач (одна — в тілі з'єднання, інша — в області, яка заповнюється тонкими стержнями в граничному переході) з однорідними умовами Діріхле на межі з'єднання. Слід також відмітити, що друга задача — це задача для звичайного диференціального рівняння другого порядку з новою правою частиною, яка „запам'ятовує" неоднорідність з крайових умов Неймана початкової задачі.

1.1. Постановка задачі. Розглянемо дворівневе з'єднання (див. рисунок). Воно складається з тіла

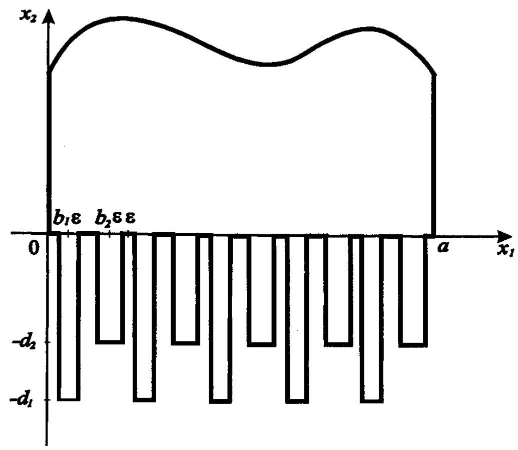
$$\Omega_0 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < \gamma(x_1)\right\},$$

де $\gamma \in C^1([0, a])$, та великої кількості тонких стержнів

$$G_j^{(1)}(\varepsilon) = \left\{x : |x_1 - \varepsilon(j + b_1)| < \frac{\varepsilon h_1}{2},\ x_2 \in (-d_1, 0]\right\},$$

$$G_j^{(2)}(\varepsilon) = \left\{x : |x_1 - \varepsilon(j + b_2)| < \frac{\varepsilon h_2}{2},\ x_2 \in (-d_2, 0]\right\}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

тобто $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}$, де $G_\varepsilon^{(1)} = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} G_j^{(1)}(\varepsilon)$, $G_\varepsilon^{(2)} = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} G_j^{(2)}(\varepsilon)$. Тут a, d_1, d_2, b_1, b_2 —



Дворівневе густе з'єднання Ω_ε.

додатні дійсні числа; $d_2 \le d_1$, $0 < b_1 < b_2 < 1$; h_1 та h_2 — фіксовані числа з інтервалу $(0,1)$; N — велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = \dfrac{a}{N}$ — малий дискретний параметр, який характеризує відстань між тонкими стержнями та їх товщину. Таким чином, число тонких стержнів дорівнює $2N$, вони розділені на два рівні $G_\varepsilon^{(1)}$ і $G_\varepsilon^{(2)}$ в залежності від їх довжини. Товщина стержнів першого рівня дорівнює εh_1, а стержнів другого рівня — εh_2. Вважаємо, що $b_1 + \dfrac{h_1}{2} < b_2 - \dfrac{h_2}{2}$.

Позначимо через $S_j^{(i,\pm)}(\varepsilon)$ вертикальні сторони тонких стержнів $G_j^{(i)}(\varepsilon)$, знак $+$ або $-$ позначає відповідно праву або ліву сторону стержнів,

$$S_\varepsilon^{(i,\pm)} = \bigcup_{j=0}^{N-1} S_j^{(i,\pm)}(\varepsilon), \quad S_\varepsilon^{(i)} = S_\varepsilon^{(i,+)} \cup S_\varepsilon^{(i,-)}, \quad i = 1,2.$$

В області Ω_ε розглядається задача

$$\begin{gathered} -\Delta u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) = \varepsilon g_\varepsilon(x), \quad x \in S_\varepsilon^{(1)}, \\ u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in S_\varepsilon^{(2)}, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon^{(1)} \cup S_\varepsilon^{(2)}), \end{gathered} \tag{1}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ — зовнішня нормальна похідна. Таким чином, на межах стержнів другого рівня задано умови Діріхле, а на межах стержнів першого рівня та на інших частинах межі багаторівневого з'єднання Ω_ε — умови Неймана.

Без втрати загальності можемо вважати, що $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_1)$, де $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}_1$, $D_1 = (0,a) \times (-d_1, 0)$. Так само визначаємо $D_2 = (0,a) \times (-d_2, 0)$ і $\overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}_2$. Припустимо, що

$$f_\varepsilon \longrightarrow f_0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega_1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

Відносно функції g_ε зробимо такі припущення:

1) функція $g_\varepsilon \in C(\overline{D}_1)$ і

$$g_\varepsilon \longrightarrow g_0 \quad \text{в} \quad L^2(D_1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

причому $g_0 \in C(\overline{D}_1)$, та існує така константа $C_0 > 0$, що

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in D_1 : \, |g_\varepsilon(x)| \le C_0; \tag{4}$$

або

2) $g_\varepsilon \in L^2(D_1)$, $\partial x_1 g_\varepsilon \in L^2(D_1)$, причому норма $\|\partial x_1 g_\varepsilon\|_{L^2(D_1)}$ рівномірно обмежена відносно ε, і має місце збіжність (3).

Функція $u_\varepsilon \in H_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u(x) = 0, x \in S_\varepsilon^{(2)}\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (1), якщо вона задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \varphi dx_2 \quad \forall \varphi \in H_\varepsilon. \tag{5}$$

З основних положень теорії крайових задач випливає, що для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1).

Метою цього дослідження є вивчення асимптотичної поведінки узагальненого розв'язку задачі (1) при $\varepsilon \to 0$, тобто коли число тонких стержнів нескінченно зростає, а їх товщина прямує до нуля.

1.2. Особливості дослідження та формулювання основного результату. Для крайових задач Неймана Є. Я. Хрусловим було введено поняття сильно зв'язних областей D_ϵ, залежних від малого параметра ϵ, під яким розуміється існування рівномірно обмеженого відносно ϵ оператора продовження з $H^1(D_\epsilon)$ в $H^1(\mathbb{R}^n)$. Пізніше в роботах D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin та О. А. Олійник, Г. А. Іосіф'яна, О. С. Шамаєва (див., наприклад, [4, 12]) було доведено існування таких операторів продовження та запропоновано схему їх побудови для перфорованих областей ε-періодичної структури. Рівномірно обмежені оператори продовження відіграють дуже важливу роль при дослідженні крайових задач в областях, складним чином залежних від малого параметра.

Однак, як було показано в роботах [19 – 29], густі з'єднання не попадають до класу сильно зв'язних (а також і слабко зв'язних) областей, тобто для таких областей не існує рівномірно обмежених відносно параметра ε операторів продовження у відповідних просторах Соболєва. Це є ще однією характерною особливістю крайових задач у густих з'єднаннях. У роботах [19 – 29] було розроблено схеми побудови спеціальних операторів продовження із збереженням класу простору для розв'язків крайових задач у густих з'єднаннях різних типів і з допомогою цих операторів вивчено асимптотичну поведінку розв'язків та доведено теореми збіжності.

Пізніше в роботі [37], де досліджувалась крайова однорідна задача Неймана, було показано, що якщо межі тонких стержнів є прямолінійними, то можна для доведення теорем збіжності продовжувати нулем розв'язок крайової задачі. Це обумовлено тим, що таке продовження внаслідок прямолінійності меж стержнів вздовж осі Ox_2 зберігає узагальнену похідну по x_2. Ми в даній статті скористаємося цим фактом. Однак для дворівневих густих з'єднань потрібно будувати два спеціальні оператори продовження нулем у різні області. У випадку, коли тонкі стержні дворівневого густого з'єднання мають змінну товщину, потрібно будувати спеціальні оператори продовження (див. [32]).

Крайові задачі в густих з'єднаннях з неоднорідними крайовими умовами Неймана, Фур'є або Стєклова на межах тонких приєднувальних областей мають свої специфічні труднощі. Для усереднення таких крайових задач у роботах [25–28, 38] запропоновано новий підхід із використанням відповідних інтегральних тотожностей. У даній роботі це буде тотожність (22).

Сформулюємо основний результат даної роботи. Для цього введемо такі операції продовження нулем для функцій із простору H_ε :

$$\widetilde{y_\varepsilon}^{(1)}(x) = \begin{cases} y_\varepsilon, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}, \\ 0, & x \in D_1 \setminus G_\varepsilon^{(1)}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\widetilde{y_\varepsilon}^{(2)}(x) = \begin{cases} y_\varepsilon, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ 0, & x \in D_2 \setminus G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \tag{7}$$

де $D_1 = (0,a) \times (-d_1, 0)$ і $D_2 = (0,a) \times (-d_2, 0)$ — прямокутники, які заповнюються тонкими стержнями відповідно з першого та другого рівнів у граничному переході при $\varepsilon \to 0$. Очевидно, що $\widetilde{y_\varepsilon}^{(2)} \in H^1(D_2)$, а внаслідок прямолінійності меж тонких стержнів $\widetilde{y_\varepsilon}^{(1)}$ належить анізотропному простору Соболєва

$$W^{0,1}(D_1) = \left\{ v \in L^2(D_1) : \quad \text{існує узагальнена похідна} \quad \partial_{x_2} v \in L^2(D_1) \right\}.$$

Теорема 1. *Для розв'язку u_ε задачі (1) мають місце такі співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{rcll} u_\varepsilon & \xrightarrow{w} & v_0^+ & \text{в} \quad H^1(\Omega_0), \\ \widetilde{u_\varepsilon}^{(1)} & \xrightarrow{w} & h_1 v_0^{(1,-)} & \text{в} \quad W^{0,1}(D_1), \\ \widetilde{u_\varepsilon}^{(2)} & \xrightarrow{w} & 0 & \text{в} \quad H^1(D_2) \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де v_0^+ — розв'язок задачі

$$\begin{aligned} -\Delta v_0^+(x) &= f_0(x), \quad x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_0^+(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega_0 \setminus [0,a], \\ v_0^+(x_1, 0) &= 0, \quad x_1 \in [0,a], \end{aligned} \tag{8}$$

а $v_0^{(1,-)}$ — розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} -h_1 \partial_{x_2}^2 v_0^{(1,-)}(x) &= h_1 f_0(x) + 2 g_0(x), \quad (x_1, x_2) \in D_1, \\ v_0^{(1,-)}(x_1, 0) &= 0, \quad x_1 \in [0,a], \\ \partial_{x_2} v_0^{(1,-)}(x_1, -d_1) &= 0, \quad x_1 \in [0,a]. \end{aligned} \tag{9}$$

2. Допоміжні асимптотичні оцінки. У просторі Соболєва H_ε поряд із нормою

$$\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

введемо нову норму $\|\cdot\|_\varepsilon$, яка породжується скалярним добутком

$$(u, v)_\varepsilon = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in H_\varepsilon.$$

Лема 1. *Норми $\|\cdot\|_\varepsilon$ та $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ є рівномірно еквівалентними, тобто існують константи $C_1 > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для всіх значень $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ та для довільних функцій $u \in H_\varepsilon$*

$$\|u\|_\varepsilon \le \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_1 \|u\|_\varepsilon. \tag{10}$$

Доведення. Ліва нерівність у (10) не викликає сумнівів. Праву нерівність доведемо від супротивного. Тоді існують послідовності $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\{v_{\varepsilon_n}\} \in H_{\varepsilon_n}$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$,

$$\|v_{\varepsilon_n}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} = 1, \tag{11}$$

$$\|v_{\varepsilon_n}\|^2_{\varepsilon_n} = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_n}} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 dx < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Оскільки $\{v_{\varepsilon_n}\}$ обмежена в $H^1(\Omega_0)$, то існує підпослідовність, яка буде фундаментальною в $L^2(\Omega_0)$; позначимо її знову через $\{v_{\varepsilon_n}\}$. Крім цього,

$$\|v_{\varepsilon_n} - v_{\varepsilon_m}\|^2_{H^1(\Omega_0)} \le \|v_{\varepsilon_n} - v_{\varepsilon_m}\|^2_{L^2(\Omega_0)} + 2\|\nabla v_{\varepsilon_m}\|^2_{L^2(\Omega_0)} + 2\|\nabla v_{\varepsilon_n}\|^2_{L^2(\Omega_0)} \le$$
$$\le \|v_{\varepsilon_n} - v_{\varepsilon_m}\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Отже, $\{v_{\varepsilon_n}\}$ є фундаментальною в $H^1(\Omega_0)$, а отже, збігається в цьому просторі до деякого елемента v_0. На підставі (12)

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla v_0|^2 dx = 0,$$

звідки випливає, що $v_0 = \text{const}$ в $H^1(\Omega_0)$.

З урахуванням властивості оператора сліду

$$v_{\varepsilon_n}(\cdot, 0) \xrightarrow{s} v_0 \equiv \text{const} \quad \text{в} \quad L^2(0, a) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Нехай $Q^{(i)}_{\varepsilon_n} = G^{(i)}_{\varepsilon_n} \cap \{x_2 = 0\}$, $i = 1, 2$, — множини, по яких приєднуються до області Ω_0 стержні першого та другого рівнів відповідно.

Внаслідок умов Діріхле на бічних межах стержнів другого рівня маємо

$$\int\limits_{G^{(2)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n} dx \le \varepsilon^2_n h^2_2 \int\limits_{G^{(2)}_{\varepsilon_n}} (\partial_{x_1} v_{\varepsilon_n})^2 \, dx, \tag{14}$$

звідки, враховуючи (12), одержуємо

$$\int\limits_{Q^{(2)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1, 0) dx_1 \le c^2 \left(\int\limits_{G^{(2)}_{\varepsilon_n}} (\nabla v_{\varepsilon_n})^2 dx + \int\limits_{G^{(2)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n} dx \right) <$$

$$< c^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon^2_n h^2_2}{n} \right) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Розглянемо 1-періодичну функцію $\chi_{h_2}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, яка на відрізку $[0, 1]$ задається таким чином:

$$\chi_{h_2}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - b_2| \le \dfrac{h_2}{2}, \\ 0, & \dfrac{h_2}{2} < |\xi - b_2| \le 1. \end{cases}$$

Легко переконатися, що

$$\chi_{h_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{w} h_2 \quad \text{в} \quad L^2(0, 1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{16}$$

Використовуючи (13) та (16), маємо

$$\int\limits_{Q^{(2)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1, 0) \, dx_1 = \int\limits_0^a \chi_{h_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon_n}\right) v^2_{\varepsilon_n}(x_1, 0) \, dx_1 \longrightarrow \int\limits_0^a h_2 \, v^2_0 \, dx_1, \quad n \to \infty.$$

З іншого боку, у відповідності з (15)

$$\int\limits_0^a h_2 \, v^2_0 \, dx_1 = 0. \tag{17}$$

Оскільки $v_0 \equiv \text{const}$ в Ω_0, з (17) випливає, що $v_0 \equiv 0$ майже скрізь в Ω_0.

З'ясуємо, до чого прямує $\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1, x_2) \, dx$ при $n \to \infty$. У відповідності з (12)

$$\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon_n}} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \, dx \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{18}$$

На підставі (13) та (17)

$$\int\limits_{Q^{(1)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1,0)\,dx_1 \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{19}$$

З нерівності

$$\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1,x_2)\,dx \le 2d_1^2 \int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon_n}} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2\,dx + 2d_1 \int\limits_{Q^{(1)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1,0)\,dx_1 \tag{20}$$

та (18) і (19) одержуємо

$$\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon_n}} v^2_{\varepsilon_n}(x_1,x_2)\,dx_1 \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{21}$$

Враховуючи (12), (14) та (21), отримуємо

$$\|v_{\varepsilon_n}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

але це суперечить (11).

Лему доведено.

Зауваження. Тут і далі всі константи c_i, C_i, які входять до нерівностей, не залежать від ε.

Доведемо рівномірні оцінки для розв'язку задачі (1). Для цього будемо використовувати рівність

$$\frac{\varepsilon h_1}{2}\int\limits_{S^{(1)}_\varepsilon} v\,dx_2 = \int\limits_{G^{(1)}_\varepsilon} v\,dx - \varepsilon\int\limits_{G^{(1)}_\varepsilon} Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}v\,dx \quad \forall\, v\in H^1\left(G^{(1)}_\varepsilon\right), \tag{22}$$

яка доведена в [27]. Тут $Y(\xi) = -\xi + [\xi] + b_1$, $[\xi]$ — ціла частина ξ. Оскільки $\max_{\mathbb{R}}|Y| \le 1$, з (22) випливає

$$\|\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon\|_{L^2\left(S^{(1)}_\varepsilon\right)} \le C_2\|u_\varepsilon\|_{H^1\left(G^{(1)}_\varepsilon\right)}. \tag{23}$$

Покладаючи $\varphi = u_\varepsilon$ в інтегральній тотожності (5) та використовуючи (23), виводимо

$$\left|\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2 dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon\,dx + \varepsilon\int\limits_{S^{(1)}_\varepsilon} g_\varepsilon u_\varepsilon\,dx_2\right| \le$$

$$\le \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\sqrt{\varepsilon}g_\varepsilon\|_{L^2\left(S^{(1)}_\varepsilon\right)}\|\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon\|_{L^2\left(S^{(1)}_\varepsilon\right)} \le$$

$$\le C_2\left(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\sqrt{\varepsilon}g_\varepsilon\|_{L^2\left(S^{(1)}_\varepsilon\right)}\right)\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

або

$$\|u_\varepsilon\|_\varepsilon^2 \le C_2 \left(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\sqrt{\varepsilon} g_\varepsilon\|_{L^2\left(S_\varepsilon^{(1)}\right)} \right) \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Враховуючи лему 1, отримуємо

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_3 \left(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\sqrt{\varepsilon} g_\varepsilon\|_{L^2\left(S_\varepsilon^{(1)}\right)} \right).$$

При виконанні припущення (4) безпосередньо перевіряємо, що $\|\sqrt{\varepsilon} g_\varepsilon\|_{L^2\left(S^{(1)}\right)} \le C_4$; якщо ж виконується припущення 2, то попередню нерівність виводимо з допомогою інтегральної тотожності (22). Таким чином, беручи до уваги цю нерівність та (2), робимо висновок, що існують такі константи $C_5 > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх значень $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_5. \tag{24}$$

3. Доведення теореми збіжності. ***1.*** Розглянемо такі функції:

$$f_\varepsilon^{(1)}(x) = \begin{cases} f_\varepsilon(x), & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}, \\ 0, & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases}$$

$$f_\varepsilon^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}, \\ f_\varepsilon(x), & x \in G_\varepsilon^{(2)}. \end{cases}$$

Тоді розв'язок u_ε задачі (1) можна подати у вигляді

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon, \tag{25}$$

де v_ε — узагальнений розв'язок задачі (1) із правою частиною $f_\varepsilon^{(1)}$, а w_ε — узагальнений розв'язок задачі (1) із правою частиною $f_\varepsilon^{(2)}$ та однорідними умовами Неймана на $S_\varepsilon^{(1)}$, тобто $\partial_\nu w_\varepsilon = 0$ на $S_\varepsilon^{(1)}$.

Інтегральна тотожність (5) для w_ε має вигляд

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx = \int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon^{(2)} \psi dx \quad \forall \psi \in H_\varepsilon.$$

Покладемо в даній інтегральній тотожності $\psi = w_\varepsilon$. Тоді на підставі (14) будемо мати

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 \, dx \le \|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(2)}\right)} \|w_\varepsilon\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(2)}\right)} \le \varepsilon h_2 \|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(2)}\right)} \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(2)}\right)},$$

звідки $\|w_\varepsilon\|_\varepsilon \le \varepsilon\, C_5$, а згідно з лемою 1

$$\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le \varepsilon C_6. \tag{26}$$

Застосуємо операції продовження нулем для розв'язків v_ε та w_ε (див. (6) та (7)). Очевидно, що $\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} \in H^1(D_2)$ і $\widetilde{w_\varepsilon}^{(2)} \in H^1(D_2)$, а внаслідок прямолінійності меж тонких стержнів $\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \in W^{0,1}(D_1)$ і $\widetilde{w_\varepsilon}^{(1)} \in W^{0,1}(D_1)$. Крім цього,

$$\partial_{x_2}\big(\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\big) = \widetilde{\partial_{x_2} v_\varepsilon}^{(1)}, \quad \partial_{x_2}\big(\widetilde{w_\varepsilon}^{(1)}\big) = \widetilde{\partial_{x_2} w_\varepsilon}^{(1)}. \tag{27}$$

З (26) випливає, що

$$\left.\begin{array}{rcll} w_\varepsilon & \xrightarrow{s} & 0 \ \text{в} & H^1(\Omega_0), \\ \widetilde{w_\varepsilon}^{(2)} & \xrightarrow{s} & 0 \ \text{в} & H^1(D_2), \\ \widetilde{w_\varepsilon}^{(1)} & \xrightarrow{s} & 0 \ \text{в} & L^2(D_1), \\ \widetilde{\partial_{x_i} w_\varepsilon}^{(1)} & \xrightarrow{s} & 0 \ \text{в} & L^2(D_1) \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{28}$$

2. Тепер знайдемо границі продовжень для узагальненого розв'язку v_ε. На підставі (24) та (25), а також введених позначень маємо, що величини $\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}$, $\|\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)}\|_{H^1(D_2)}$, $\|\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\|_{W^{0,1}(D_1)}$ є рівномірно обмеженими щодо ε. Тому існує така підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \subset \{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо через ε), що

$$\left.\begin{array}{rcll} v_\varepsilon & \xrightarrow{w} & v_0^+ & \text{в} \ \ H^1(\Omega_0), \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} & \xrightarrow{w} & v_0^{(2,-)} & \text{в} \ \ H^1(D_2), \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} & \xrightarrow{w} & v_0^- =: h_1 v_0^{(1,-)} & \text{в} \ \ L^2(D_1), \\ \widetilde{\partial_{x_i} v_\varepsilon}^{(1)} & \xrightarrow{w} & \gamma_i & \text{в} \ \ L^2(D_1), \ i = 1, 2, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{29}$$

де v_0^+, $v_0^{(2,-)}$, $v_0^{(1,-)}$, γ_1, γ_2 — деякі функції з відповідних просторів, які будуть визначені далі.

Згідно з (14)

$$\|\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)}\|^2_{L^2(D_2)} \le \varepsilon^2 h_2^2 \int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} (\partial_{x_1} v_\varepsilon)^2 \, dx \le c\,\varepsilon^2,$$

тому $v_0^{(2,-)} = 0$ майже скрізь в D_2.

Знайдемо γ_2. Розглянемо довільну функцію $\psi \in C_0^\infty(D_1)$. На підставі (27)

$$\int\limits_{D_1} \widetilde{\partial_{x_2} v_\varepsilon}^{(1)} \psi \, dx = \int\limits_{D_1} \partial_{x_2} \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \psi \, dx = -\int\limits_{D_1} \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \partial_{x_2} \psi \, dx.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо

$$\int\limits_{D_1} \gamma_2 \, \psi \, dx = -h_1 \int\limits_{D_1} v_0^{(1,-)} \partial_{x_2} \psi \, dx \quad \forall \ \psi \in C_0^\infty(D_1), \tag{30}$$

звідки $\gamma_2 = h_1 \partial_{x_2} v_0^{(1,-)}$ майже скрізь в D_1.

Знайдемо γ_1. Розглянемо тестову функцію

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ \varepsilon Y\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi, & x \in G_\varepsilon^{(1)}, \end{cases} \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(D_1),$$

де функція $Y(\xi)$ була визначена в (22). Легко бачити, що $\Phi \in H_\varepsilon$ і

$$\nabla\Phi = \left(-\psi + \varepsilon Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi,\ \varepsilon Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi\right), \quad x \in G_\varepsilon^{(1)}.$$

Інтегральна тотожність для розв'язку v_ε має вигляд

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon^{(1)}\varphi\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon^{(1)}\varphi\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\, \varphi\, dx_2 \quad \forall\varphi \in H_\varepsilon. \tag{31}$$

Підставляючи функцію Φ в інтегральну тотожність (31), одержуємо

$$\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \left(-\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}\psi + \varepsilon Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \varepsilon\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \varepsilon f_\varepsilon^{(1)} Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi\, dx + \frac{\varepsilon^2 h_1}{2}\left(\int\limits_{S_\varepsilon^{(1,-)}} g_\varepsilon\psi\, dx_2 - \int\limits_{S_\varepsilon^{(1,+)}} g_\varepsilon\psi\, dx_2\right).$$

Тоді

$$\left|\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}\psi\, dx\right| \le \varepsilon\left(\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \left|Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\left(\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla\psi - f_\varepsilon^{(1)}\psi\right)\right| dx + \frac{\varepsilon h_1}{2}\int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} |g_\varepsilon\psi| dx_2\right) \le$$

$$\le \varepsilon c_1 \Big(\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(1)}\right)}\|\nabla\psi\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(1)}\right)} + \|f_\varepsilon^{(1)}\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(1)}\right)}\|\psi\|_{L^2\left(G_\varepsilon^{(1)}\right)} +$$

$$+ \|\sqrt{\varepsilon}g_\varepsilon\|_{L^2\left(S_\varepsilon^{(1)}\right)}\|\sqrt{\varepsilon}\psi\|_{L^2\left(S_\varepsilon^{(1)}\right)}\Big) \le \varepsilon c_1\Big(\|f_\varepsilon^{(1)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|\psi\|_{H^1\left((G_\varepsilon^{(1)}\right)} +$$

$$+ c_2\|\psi\|_{H^1\left(G_\varepsilon^{(1)}\right)}\Big) \le \varepsilon c_3\|\psi\|_{H^1(D_1)},$$

звідки в граничному переході при $\varepsilon \to 0$ отримуємо тотожність

$$\int\limits_{D_1} \gamma_1\,\psi\, dx = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(D_1), \tag{32}$$

тобто $\gamma_1 = 0$ майже скрізь в D_1.

3. Тепер залишилося визначити функції v_0^+ та $v_0^{(1,-)}$. Спочатку знайдемо сліди цих функцій на інтервалі $\{(x_1, 0) : 0 < x_1 < a\}$. Внаслідок компактності оператора сліду і перших двох співвідношень в (29) маємо

$$\begin{array}{lclll} v_\varepsilon(x_1,0) & \xrightarrow{s} & v_0^+(x_1,0) & \text{в} \quad L^2(0,a) & \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(2)}(x_1,0) & \xrightarrow{s} & 0 & \text{в} \quad L^2(0,a) & \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \end{array} \tag{33}$$

З рівності $\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)}(x_1,0) = \chi_{h_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon(x_1,0)$, $x_1 \in (0,a)$, та (16) випливає, що $v_0^+(x_1,0) = 0$ для майже всіх $x_1 \in (0,a)$.

Розглянемо рівність

$$\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}(x_1,0) = \chi_{h_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon(x_1,0) \quad \text{для м. в.} \quad x_1 \in (0,a), \tag{34}$$

де $\chi_{h_1}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, — 1-періодична функція, яка на відрізку $[0,1]$ задається таким чином:

$$\chi_{h_1}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - b_1| \le \dfrac{h_1}{2}, \\ 0, & \dfrac{h_1}{2} < |\xi - b_1| \le 1. \end{cases}$$

Легко перевірити, що права частина рівності (34) на підставі (33) та того факту, що $v_0^+(\cdot,0) = 0$, прямує до нуля слабко в $L^2(0,a)$ при $\varepsilon \to 0$. Отже, $\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}(\cdot,0) \xrightarrow{w} 0$ в $L^2(0,a)$ при $\varepsilon \to 0$. З іншого боку,

$$\int\limits_0^a \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}(x_1,0)\psi(x_1)dx_1 = \frac{1}{d_1}\int\limits_{D_1} \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\psi(x_1)\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+\frac{1}{d_1}\int\limits_{D_1}(x_2+d_1)\partial_{x_2}\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\cdot\psi(x_1)\,dx_1\,dx_2 \quad \forall\, \psi \in C_0^\infty(0,a). \tag{35}$$

Переходячи до границі в (35) при $\varepsilon \to 0$, одержуємо

$$0 = h_1 \int\limits_0^a v_0^{(1,-)}(x_1,0)\psi(x_1)dx_1 \quad \forall\, \psi \in C_0^\infty(0,a),$$

звідки випливає, що $v_0^{(1,-)}(\cdot,0) = 0$ майже скрізь на $(0,a)$.

Таким чином,

$$v_0^+(x_1,0) = v_0^{(1,-)}(x_1,0) = 0 \quad \text{для м. в.} \quad x_1 \in (0,a). \tag{36}$$

4. Виберемо довільну функцію $\varphi \in H^1(\Omega_1)$, слід якої на $\{(x_1,0) : 0 < x_1 < a\}$ дорівнює нулю. З допомогою функції φ визначимо функцію

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}, \\ 0, & x \in G_\varepsilon^{(2)}. \end{cases}$$

Очевидно, що $\widehat{\varphi} \in H_\varepsilon$. Інтегральна тотожність (31) з пробною функцією $\widehat{\varphi}$ матиме вигляд

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \widehat{\varphi}\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \widehat{\varphi}\, dx = \int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon^{(1)} \widehat{\varphi}\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon^{(1)} \widehat{\varphi}\, dx +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \widehat{\varphi} dx_2 \quad \forall\, \widehat{\varphi} \in H^1(\Omega_1), \quad \widehat{\varphi}\big|_{[0,a]} = 0,$$

або

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\, v_\varepsilon \cdot \nabla\, \varphi\, dx + \int\limits_{D_1} \left(\widetilde{\partial_{x_1} v_\varepsilon}^{(1)} \partial_{x_1} \varphi + \widetilde{\partial_{x_2} v_\varepsilon}^{(1)} \partial_{x_2} \varphi\, dx \right) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon^{(1)} \varphi dx + \int\limits_{D_1} \chi_{h_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) f_\varepsilon^{(1)} \varphi\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\, \varphi\, dx_2 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_1), \quad \varphi\big|_{[0,a]} = 0. \tag{37}$$

Невідомою залишається границя останнього доданка у правій частині тотожності (37). Якщо для функції g_ε має місце припущення 2, то з допомогою (22) одержуємо

$$\varepsilon \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\, \varphi dx_2 = 2 \int\limits_{D_1} g_0\, \varphi\, dx.$$

Якщо має місце перше припущення, тобто виконуються співвідношення (3), (4), то даний інтеграл подамо у вигляді суми

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} (g_\varepsilon - g_0) \varphi\, dx_2 + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_0 \varphi\, dx_2.$$

На підставі умов (3), (4) та теореми Лебега про граничний перехід перший доданок у цій сумі прямує до нуля. Другий доданок можна розглядати як дві інтегральні суми

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_0 \varphi\, dx_2 = \int\limits_{-d_1}^{0} \sum_{j=0}^{N-1} (g_0 \varphi)\big|_{x_1 = \varepsilon(j + b_1 \pm h_1/2)} \big(\varepsilon(j+1) - \varepsilon j\big)\, dx_2 \tag{38}$$

для функції $g_0\, \varphi$. Згідно з теоремою Лебега та теоремою Фубіні така границя дорівнює $2 \int\limits_{D_1} g_0\, \varphi dx$.

Переходячи в (37) до границі, коли $\varepsilon \to 0$, і враховуючи (2), (16), (29), (30) та (32), маємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla v_0^+ \cdot \nabla\varphi\, dx + h_1 \int\limits_{D_1} \frac{\partial v_0}{\partial x_2}^{(1,-)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = \int\limits_{\Omega_0} f_0\, \varphi\, dx +$$

$$+h_1 \int\limits_{D_1} f_0\, \varphi\, dx + 2\int\limits_{D_1} g_0\, \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_1),\ \varphi\big|_{[0,a]} = 0\,. \tag{39}$$

На підставі рівності (36) інтегральна тотожність (31) еквівалентна таким двом інтегральним тотожностям:

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla v_0^+ \cdot \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega_0} f_0\, \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega_0), \quad \varphi|_{[0,a]} = 0, \tag{40}$$

та

$$h_1 \int\limits_{D_1} \frac{\partial v_0}{\partial x_2}^{(1,-)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = h_1 \int\limits_{D_1} f_0\, \varphi\, dx + 2\int\limits_{D_1} g_0\, \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_1), \quad \varphi|_{[0,a]} = 0. \tag{41}$$

З (40) та (36) випливає, що v_0^+ — єдиний узагальнений розв'язок задачі (8), а з (41) та (36) — що $v_0^{(1,-)}$ — розв'язок крайової задачі (9) для звичайного диференціального оператора другого порядку. В задачі (9) змінна x_1 відіграє роль параметра. Легко переконатися, що

$$v_0^{(1,-)}(x_1,x_2) = -x_2 \int\limits_{-d_1}^{x_2} \big(f_0(x_1,t) + 2h_1^{-1} g_0(x_1,t)\big)\, dt - \int\limits_{x_2}^{0} t\big(f_0(x_1,t) + 2h_1^{-1} g_0(x_1,t)\big)\, dt. \tag{42}$$

Таким чином, теорему 1 доведено.

Слабка збіжність у просторах H^1 продовжень розв'язків крайових задач у перфорованих областях дає можливість довести збіжність інтегралів енергій (див., наприклад, [5, 12]). Таку саму можливість дає теорема 1. Введемо такі позначення:

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) := \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\; dx, \quad E_0^+(v_0^+) := \int\limits_{\Omega_0} \left|\nabla v_0^+\right|^2\; dx, \quad E_0^-(v_0^{(1,-)}) := h_1 \int\limits_{D} \left|\partial_{x_2} v_0^{(1,-)}\right|^2\; dx.$$

Величини $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$, $E_0^+(v_0^+)$ і $E_0^-(v_0^{(1,-)})$ задають енергію систем, які моделюються задачами (1), (8) та (9) відповідно.

Використовуючи зображення (25) та інтегральну тотожність (31), маємо

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_\varepsilon(v_\varepsilon) + E_\varepsilon(w_\varepsilon) + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon^{(1)} v_\varepsilon\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon^{(1)} v_\varepsilon\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\, v_\varepsilon\, dx_2 + E_\varepsilon(w_\varepsilon) + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon\, dx.$$

Переходячи до границі в цій рівності при $\varepsilon \to 0$ і враховуючи (2), (3), (26) та (29), як в теоремі 1, отримуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = h_1 \int\limits_{D_1} f_0\, v_0^+\, dx + 2\int\limits_{D_1} g_0\, v_0^{(1,-)}\, dx.$$

З інтегральних тотожностей (40) та (41) випливає такий наслідок.

Наслідок. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_0^+(v_0^+) + E_0^-(v_0^{(1,-)})$.

Висновки. В роботі вивчено вплив крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку задачі (1). Показано, що однорідні крайові умови Діріхле на вертикальних сторонах стержнів другого рівня приводять до того, що гранична задача розпадається на дві незалежні задачі. Неоднорідність у крайових умовах Неймана на вертикальних сторонах стержнів першого рівня приводить до появи нового члена в правій частині однієї з граничних задач. Такий ефект було помічено в роботі [38] при усередненні еліптичних рівнянь, які описують процеси в сильно неоднорідних тонких перфорованих областях з швидко змінною товщиною. Якщо умови Діріхле замінити на умови Неймана або умови Фур'є, то, як показано в роботі [32], гранична задача не розпадається і являє собою три крайові задачі, які через певні умови спряження в зоні з'єднання зв'язуються в одну задачу.

В [5] зазначено, що для функціоналів, які задані на рефлексивних просторах і ростуть швидше за норму, фактично, має місце тільки одне природне означення усереднення таких функціоналів — це означення через збіжність енергій. Тому наслідок 1 є дуже важливим результатом, який дає можливість досліджувати варіаційні задачі в густих багаторівневих з'єднаннях.

Питання про побудову асимптотичних наближень для розв'язку задачі (1) залишається відкритим.

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
2. *Bensoussan A., Lions J., and Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structure. — Amsterdam: North Holland, 1978.
3. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures. — Paris: Masson, 1990.
4. *Cioranescu D., Saint Jean Paulin J.* Homogenization of reticulated structures // Appl. Math. Sci. — 1999. — **136**. — 343 p.
5. *Jikov V. V., Kozlov S. M., and Oleinik O. A.* Homogenization of differential operators and integral functionals. — Berlin; Heidelberg: Springer, 1994.
6. *Ковалевский А. А.* Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях с накопителями // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 2. — С. 194 – 212.
7. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., and Movchan A. B.* Asymptotic representation of an elastic field in a multi-structure // Asymptot. Anal. — 1995. — **11**. — P. 343 – 415.
8. *Lobo M., Perez E.* Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions // Math. Models and Methods in Appl. Sci. — 1988. — **22**, № 4. — P. 609 – 624.
9. *Lobo M., Perez E.* Asymptotic behaviour of the solutions of a body having many concentrated masses near the boundary // C. r. Acad. sci. Ser II. — 1992. — **314**. – P. 13 – 18.
10. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. — Киев: Наук. думка, 1974. — 279 с.

11. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Том 1. Понижение размерности и интегральные оценки. — Новосибирск: Науч. книга, 2002. — 406 с.

12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 310 с.

13. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. — Berlin; Heidelberg: Springer, 1989.

14. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990. — 448 с.

15. *Fleury F., Sanchez-Palencia E.* Asymptotic and spectral properties of the acoustic vibrations of body perforated by narrow channels // Bull. Sci. Math. — 1986. — **2**, № 110. — P. 149 – 176.

16. *Котляров В. П., Хруслов Е. Я.* О предельном граничном условии одной задачи Неймана // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1970. — № 10. — С. 83 – 96.

17. *Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я.* О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое // Там же. — 1976. — № 5. — С. 35 – 49.

18. *Хруслов Е. Я.* О резонансных явлениях в одной задаче дифракции // Там же. — 1968. — № 10. — С. 113 – 120.

19. *Mel'nyk T. A., Nazarov S. A.* Asymptotic structure of the spectrum of the Neumann problem in a thin comb-like domain // C. r. Acad. sci. Ser. I — 1994. — **319**. — P. 1343 – 1348.

20. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика собственных значений задачи Неймана в области типа „густого гребешка" // Докл. РАН. — 1995. — **342**, № 1. — С. 23 – 25.

21. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа „густого гребешка" // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — **19**. — С. 138 – 174 (Engl. transl.: J. Math. Sci. — 1997. – **85**, № 6. — P. 2326 – 2346).

22. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Z. Analysis und ihre Anwendungen. — 1999. — **18**, № 4. — P. 953 – 975.

23. *Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1 // Math. Methods in Appl. Sci. — 2000. — **23**, № 4. — P. 321 – 346.

24. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. — 2000. — **12**, № 2. — С. 188 – 238 (Engl. transl.: St.Petersburg Math. J. — 2001. — **12**, № 2. – P. 317 – 351).

25. *Мельник Т. А.* Усереднення сингулярно збуреної параболічної задачі в густому періодичному з'єднанні типу 3:2:1 // Укр. мат. журн. — 2000. – **52**, № 11. — С. 1524 – 1534 (Engl. transl.: Ukr. Math. J. — 2000. — **52**, № 11. — P. 1737 – 1749).

26. *Mel'nyk T. A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 1. — P. 91 – 105.

27. *Мельник Т. А.* Асимптотика спектра задачі Фур'є в густому з'єднанні типу 2:1:1 // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз-мат. науки. — 2001. — **1**. – С. 143 – 153.

28. *Мельник Т. А.* Асимптотична поведінка власних значень та власних функцій задачі Фур'є в густому з'єднанні типу 3:2:1 // Групові та аналітичні методи в математичній фізиці: Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 187 – 196.

29. *Mel'nyk T. A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses // Math. Models and Methods in Appl. Sci. — 2001. — **11**, № 6. — P. 1001 – 1029.

30. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1995. — **18**. — С. 1 – 78 (Ч. I); 2000. — **20**. – С. 155 – 196 (Ч. II).

31. *Mel'nyk T. A.* Eigenmodes and pseudo-eigenmodes of thick multi-level junctions // Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction 2004". — 2004. — P. 51 – 52.

32. *De Maio U., Mel'nyk T. A., and Perugia C.* Homogenization of the Robin problem in a thick multi-level junction // Нелінійні коливання. — 2004. – **7**, № 3. — С. 336 – 356.

33. *De Maio U., Durante T., and Mel'nyk T. A.* Asymptotic approximation for the solution to the Robin problem in a thick multi-level junction // Math. Models and Methods in Appl. Sci. — 2005 (to appear).

34. *Damlamian A., Li Ta-Tsien.* Boundaty homogenization for elliptic problems // J. Math. Pures et Appl. — 1987. — **66**. — P. 351 – 361.

35. *Чечкин Г. А.* Усреднение краевых задач с сингулярными возмущениями граничных условий // Мат. сб. — 1993. — **184**, № 6. — С. 99 – 105.

36. *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — **19**. — С. 323 – 338.

37. *Brizzi R., Chalot J. P.* Boundary homogenization and Neumann boundary value problem // Ric. mat. — 1997. — **46**. — P. 341 – 387.

38. *Мельник Т. А.* Усереднення еліптичних рівнянь, які описують процеси в сильно неоднорідних тонких перфорованих областях з швидко змінною товщиною // Допов. НАН України. — 1991. — № 10. — С. 15 – 19.

Одержано 28.03.2005