УДК 519 . 21

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ СТРИБКАМИ

Г. Л. Кулініч, С. В. Кушніренко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: bksv@univ.kiev.ua

We introduce the notion of an invariant surface for nonhomogeneous stochastic differential equations with jumps. We obtain results that allow to determine invariant surfaces of such stochastic differential equations.

Для неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь із стрибками вводиться поняття інваріантних поверхонь. Отримані результати дають загальні можливості знаходження інваріантних поверхонь для вказаних стохастичних диференціальних рівнянь.

1. Вступ. Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь (СДР)

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n} b_k(t,\xi(t))\,dw_k(t) + \\ + \int_{\Theta_1} c(t,\xi(t-),\theta)\,\tilde{\nu}(dt,d\theta) + \int_{\Theta_2} c(t,\xi(t-),\theta)\,\nu(dt,d\theta), \tag{1}$$

$$\xi(t_0) = x_0(t_0 \geq 0,\ x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})),$$

де $a(t,x) = (a_i(t,x), i = \overline{1,n})$, $b_k(t,x) = (b_{ik}(t,x), i = \overline{1,n})$, $c(t,x,\theta) = (c_i(t,x,\theta), i = \overline{1,n})$ — дійсні невипадкові векторні функції, визначені при $t \geq t_0$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$, $\theta \in \Theta$, $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \varnothing$; $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ — вимірний простір; $w_k(t)$ — незалежні в сукупності одновимірні вінерівські процеси; $\nu([0,t],A)$ — пуассонівська міра, для якої $\mathrm{E}\nu([0,t],A) = t\Pi(A)$, $A \in \mathcal{B}_\Theta$, $\tilde{\nu}(dt,d\theta) = \nu(dt,d\theta) - \Pi(d\theta)dt$, $\Pi(\Theta_1) = \infty$, $\int_{\Theta_1} |\theta|^2 \Pi(d\theta) < \infty$, $\Pi(\Theta_2) < \infty$; процеси $w_k(t)$ і міра $\nu([0,t],A)$ задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$, $\Im_t$-вимірні при будь-якому $t \geq t_0$ і A, а також незалежні між собою, $\Im_t \subset \Im$ — неспадний потік σ-алгебр.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються наступні умови: $a(t,x)$, $b_k(t,x)$, $\int_{\Theta_1} c(t,x,\theta)\Pi(d\theta)$ неперервні по змінних (t,x), $c(t,x,\theta)$ неперервна по (t,x) за мірою $\Pi(d\theta)$ при $\theta \in \Theta_2$;

існує стала $C > 0$ така, що

$$|\,a(t,x)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\,b_k(t,x)|^2 + \int_{\Theta} |\,c(t,x,\theta)|^2 \Pi(d\theta) \leq C[1 + |x|^2],$$

для довільної сталої $N > 0$ існує стала C_N така, що

$$|a(t,x) - a(t,y)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k(t,x) - b_k(t,y)|^2 + \int\limits_{\Theta_1} |c(t,x,\theta) - c(t,y,\theta)|^2 \,\Pi(d\theta) \leq C_N |x-y|^2$$

при $t \leq N, |x| \leq N, |y| \leq N$.

Відомо (див. [1]), що вказані умови гарантують існування єдиного неперервного справа сильного розв'язку $\xi(t) = (\xi_i(t), i = \overline{1,n})$ рівняння (1).

Розглянемо область $Q = [0,\infty) \times D$, де D — певна відкрита область із R^n і така, що $\Pi\{\theta \in \Theta : (t, x + c(t,x,\theta)) \notin Q\} = 0$ для всіх $(t,x) \in Q$. Нехай $(t_0,x_0) \in Q$. Позначимо через $\tau_Q(t_0,x_0)$ момент першого виходу траєкторії розв'язку $\xi(t)$ із області Q, тобто $\tau_Q(t_0,x_0) = \inf\{t \geq t_0 : \xi(t) \notin Q\}$, якщо множина тих $t \geq t_0$, для яких $\xi(t) \notin Q$, не є порожньою, і $\tau_Q(t_0,x_0) = \infty$ — у протилежному випадку.

Далі будемо дотримуватись таких позначень: $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток,

$$\nabla_x \cdot = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1}, \frac{\partial \cdot}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} \right),$$

$$\big(\nabla_x \cdot, \, b_k(x)\big)^2 G(x) = \sum_{i=1}^{n} G''_{x_i^2}(x) \; b_{ki}^2(x) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} G''_{x_i x_j}(x) b_{ki}(x) b_{kj}(x),$$

$$LG(t,x) = G'_t(t,x) + \left(\nabla_x G(t,x), \, a(t,x) - \int\limits_{\Theta_1} c(t,x,\theta)\,\Pi(d\theta) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(\nabla_x \cdot, \, b_k(t,x)\big)^2 G(t,x),$$

$$\triangle_G(t,x,\theta) = G(t, x + c(t,x,\theta)) - G(t,x).$$

Позначимо через $\Gamma_Q(G)$ множину $\Gamma = \{(t,x) : G(t,x) = C\} \subset Q$, де функція $G(t,x)$ визначена в області Q, має неперервні похідні G'_t, G'_{x_i}, $G''_{x_i x_j}$ в Q, поверхня $G(t,x) = C$ є простою у розумінні Жордана і

$$\int\limits_{\Theta} [\triangle_G(t,x,\theta)]^{\,k} \; \Pi(d\theta), \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

неперервні по змінних (t,x).

Означення 1. *Множина $\Gamma_Q(G)$ називається інваріантною в області Q множиною рівняння (1), якщо для всіх $(t_0,x_0) \in \Gamma_Q(G)$ і всіх $t \geq t_0$:*

$$[G(t,\xi(t)) - C]\phi(t) = 0 \quad \textit{з імовірністю 1,}$$

де $C = G(t_0,x_0)$, $\phi(t) = 1$ при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0,x_0)$ і $\phi(t) = 0$ при $t \geq \tau_Q(t_0,x_0)$.

У даній роботі для інваріантності в області Q множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння (1) отримано необхідні умови (теорема 1), необхідні та достатні умови (теорема 2), достатні умови (теореми 3, 4). Для рівняння вигляду (1) при $c(t,x,\theta) \equiv 0, \ \theta \in \Theta_1$, аналогічні результати отримано в роботі [2].

2. Необхідні та достатні умови інваріантності.

Теорема 1. *Для інваріантності множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння (1) необхідно, щоб для всіх $(t,x) \in \Gamma_Q(G)$ мали місце рівності*

$$(\nabla_x G(t,x),\, b_k(t,x)) = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$LG(t,x) = 0, \tag{4}$$

$$\Pi\{\theta \in \Theta : \, \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0. \tag{5}$$

Доведення. Нехай множина $\Gamma_Q(G)$ інваріантна в області Q і $(t_0,x_0) \in \Gamma_Q(G)$. Оскільки похідні G'_t, G'_{x_i}, $G'_{x_i x_j}$ неперервні в області Q і в області Q виконуються умови (2), то при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0,x_0)$ має місце формула Іто (див. [1]), згідно з якою

$$G(t,\xi(t)) = G(t_0,x_0) + I_1(t) + I_2(t), \tag{6}$$

де

$$I_1(t) = \int\limits_0^t \left[LG(s,\xi(s)) + \int\limits_\Theta \triangle_G(s,\xi(s),\theta)\Pi(d\theta) \right] ds,$$

$$I_2(t) = \sum_{k=1}^n \int\limits_0^t \big(\nabla_x G(s,\xi(s)),\, b_k(s,\xi(s))\big)\, dw_k(s) + \int\limits_0^t \int\limits_\Theta \triangle_G(s,\xi(s),\theta)\tilde{\nu}(ds,d\theta).$$

Оскільки $(t_0,x_0) \in \Gamma_Q(G)$, то згідно з (6) при всіх $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0,x_0)$

$$-I_1(t) = I_2(t). \tag{7}$$

Процес $I_1(t)$ є абсолютно неперервним з імовірністю 1, тобто має похідну з імовірністю 1, а процес $I_2(t)$ — локальний мартингал, тобто не має похідної з імовірністю 1. Тому рівність (7) може мати місце лише у випадку, коли при всіх $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0,x_0)$

$$I_1(t) = 0, \quad I_2(t) = 0. \tag{8}$$

Далі доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 (див. [2]).

Теорема 2. *Для того щоб множина $\Gamma_Q(G)$ була інваріантною в області Q множиною рівняння (1) при $C = G(t_0,x_0)$ для $(t_0,x_0) \in Q$, необхідно і досить, щоб рівності (3), (4) мали місце при всіх $(t,x) \in Q$,*

$$\Pi\{\theta \in \Theta_1 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0 \quad \textit{для всіх} \quad (t,x) \in Q,$$

$$\Pi\{\theta \in \Theta_2 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0 \quad \textit{для всіх} \quad (t,x) \in \Gamma_Q(G).$$

Доведення. *Необхідність* умов теореми випливає із теореми 1. При доведенні *достатності* скористаємось умовою $\Pi(\Theta_2) < \infty$, з якої випливає, що процес $\nu([0,t],\Theta_2)$ на кожному скінченному проміжку часу має лише скінченне число стрибків (див. [1, с. 232]), тобто існують $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ та $\theta_k \in \Theta_2$ такі, що пари $\{\tau_k, \theta_k\}$ є незалежними, $\nu(\{\tau_k\},\{\theta_k\}) = 1,\ k = 1,2,\ldots$. Тоді $\xi(t)$ при $t_0 \leq t < \tau_1$ є розв'язком рівняння

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(s,\xi(s))\,ds + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} b_k(s,\xi(s))\,dw_k(s) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta_1} c(s,\xi(s-),\theta)\,\tilde{\nu}(ds,d\theta). \quad (9)$$

Нехай $(t_0,x_0) \in Q$ і $\tau_1 < \tau_Q(t_0,x_0)$. Розглянемо криву $\Gamma_Q(G) = \{(t,x) \in Q : G(t,x) = G(t_0,x_0)\}$. При $t_0 \leq t < \tau_1$ використаємо формулу Іто

$$G(t,\xi(t)) = G(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left\{ L(s,\xi(s)) + \int\limits_{\Theta_1} \triangle_G(s,\xi(s),\theta)\Pi(d\theta) \right\} ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} \left(\nabla G(s,\xi(s)), b_k(s,\xi(s))\right)\,dw_k(s) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta_1} [\triangle_G(s,\xi(s-),\theta)]\,\tilde{\nu}(ds,d\theta). \quad (10)$$

Враховуючи умови теореми, отримуємо $G(t,\xi(t)) = G(t_0,x_0)$ при $t_0 \leq t < \tau_1$, тобто $(t,\xi(t)) \in \Gamma_Q(G)$ з імовірністю одиниця. Далі, $\xi(t) \to \xi(\tau_1 - 0)$ при $t \to \tau_1$, тобто $G(t,\xi(t)) \to G(\tau_1,\xi(\tau_1 - 0))$ при $t \to \tau_1$. Отже, $G(\tau_1,\xi(\tau_1 - 0)) = G(t_0,x_0)$, звідки $(\tau_1,\xi(\tau_1 - 0)) \in \Gamma_Q(G)$.

Згідно з ідеєю побудови розв'язку рівняння (1)

$$\xi(\tau_1) = \xi(\tau_1 - 0) + c(\tau_1,\xi(\tau_1 - 0),\theta_1),$$

а використовуючи умови теореми, переконуємося, що $(\tau_1,\xi(\tau_1)) \in \Gamma_Q(G)$.

Аналогічно на кожному з проміжків $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, де $k = 1,2,\ldots$, а $t < \tau_Q(t_0,x_0)$, маємо рівняння

$$\xi(t) = \xi(\tau_k) + \int\limits_{\tau_k}^{t} a(s,\xi(s))\,ds + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\tau_k}^{t} b_i(s,\xi(s))\,dw_i(s) + \int\limits_{\tau_k}^{t}\int\limits_{\Theta_1} c(s,\xi(s-),\theta)\tilde{\nu}(ds,d\theta),$$

де $(\tau_k,\xi(\tau_k)) \in \Gamma_Q(G)$. Використовуючи при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ формулу Іто та умови теореми, отримуємо $G(t,\xi(t)) = G(\tau_k,\xi(\tau_k))$ при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, тобто $(t,\xi(t)) \in \Gamma_Q(G)$ з імовірністю 1 на розглядуваному проміжку.

Аналогічно $\xi(\tau_{k+1} - 0) + c(\tau_{k+1},\xi(\tau_{k+1} - 0),\theta_{k+1}) = \xi(\tau_{k+1})$, а використовуючи умови теореми, переконуємося, що $(\tau_{k+1},\xi(\tau_{k+1})) \in \Gamma_Q(G)$.

Нехай $\tau^* = \max\limits_k\{\tau_k < \tau_Q(t_0,x_0)\}$. Справедливість рівності $G(t,\xi(t)) = G(t_0,x_0)$ при $\tau^* \leq t < \tau_Q(t_0,x_0)$ встановлюється тими ж міркуваннями, що і при $t_0 \leq t < \tau_1$.

Отже, з імовірністю 1 має місце рівність $G(t,\xi(t)) = G(t_0,x_0)$ при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0,x_0)$. За означенням 1 множина $\Gamma_Q(G)$ буде інваріантною множиною рівняння (1) в області Q.

Наслідок 1. *Для інваріантності множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння (1) при $C = G(t_0,x_0)$ для $(t_0,x_0) \in Q$ у випадку $b_k(t,x) = 0$, $k = \overline{1,n}$, необхідно і досить, щоб для всіх $(t,x) \in Q$ виконувались умови*

$$G_t'(t,x) + \left(\nabla_x G(t,x),\, a(t,x) - \int\limits_{\Theta_1} c(t,x,\theta)\,\Pi(d\theta)\right) = 0,$$

$$\Pi\{\theta \in \Theta_1 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0,$$

$$\Pi\{\theta \in \Theta_2 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0 \quad \textit{для всіх} \quad (t,x) \in \Gamma_Q(G).$$

Наслідок 2. *Якщо в рівнянні (1) $a(t,x) = 0$, $b_k(t,x) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $c(t,x,\theta) = 0$ при $\theta \in \Theta_1$, $(t,x) \in Q$ і $G(t,x) = G(x)$ для всіх $(t,x) \in Q$ в множині $\Gamma_Q(G)$, то умова*

$$\Pi\{\theta \in \Theta_2 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0 \quad \textit{при всіх} \quad (t,x) \in \Gamma_Q(G)$$

є необхідною і достатньою умовою інваріантності в області Q множини $\Gamma_Q(G)$ для такого рівняння.

Зауваження 1. В умовах наслідків 1, 2 для функції $G(t,x)$ не потрібно вимагати неперервності других похідних, а досить вимагати неперервної диференційовності функції $G(t,x)$ в області Q. Це випливає з умов, які накладаються на функцію $G(t,x)$, для справедливості формули Іто (див. [1]).

Теорема 3. *Для того щоб множина $\Gamma_Q(G)$ була інваріантною в області Q множиною рівняння (1) для $C = C_0$, досить, щоб існували функції $F_i(t,x,y)$, $i = \overline{1,2}$, визначені в області $(t,x,y) \in Q \times I$, де $I = \{G(t,x) : (t,x) \in Q\}$, такі, що при всіх $(t,x) \in Q$ справджуються рівності*

$$LG(t,x) = F_1(t,x,G(t,x)),$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(t,x),\, b_k(t,x))^2 = F_2^2(t,x,G(t,x)),$$

$$\Pi\{\theta \in \Theta_1 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0$$

та умова

$$\Pi\{\theta \in \Theta_2 : \triangle_G(t,x,\theta) \neq 0\} = 0 \quad \textit{для всіх} \quad (t,x) \in \Gamma_Q(G),$$

$$F_i(t,x,C_0) = 0 \quad \textit{для всіх} \quad (t,x) \in Q,\; i = \overline{1,2},$$

крім того, стохастичне рівняння

$$d\eta(t) = F_1(t,\xi(t),\eta(t))\,dt + F_2(t,\xi(t),\eta(t))\,dw(t) \tag{11}$$

з випадковими коефіцієнтами $F_i(t,\xi(t),y)$, $i=\overline{1,2}$, *при* $t_0 \le t < \tau_Q(t_0,x_0)$ *мало єдиний сильний розв'язок* $\eta(t)$ *такий, що* $\eta(t_0)=C_0$.

Доведення. Нехай $(t_0,x_0) \in \Gamma_Q(G)$ і $G(t_0,x_0)=C_0$. У рівності (10) скористаємося при $t_0 \le t < \tau_1 < \tau_Q(t_0,x_0)$ зображенням (див. [3, с. 106])

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^t (\nabla_x G(s,\xi(s)),\, b_k(s,\xi(s)))\, dw_k(s) = \int_0^t F_2(s,\xi(s),G(s,\xi(s)))\, dw(s),$$

де $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес, незалежний від міри $\nu([0,t],A)$.

Отже, для процесу $\eta(t)=G(t,\xi(t))$ отримаємо рівняння (11) або

$$\eta(t) = G(t_0,x_0) + \int_{t_0}^t F_1(s,\xi(s),\eta(s))\, ds + \int_{t_0}^t F_2(s,\xi(s),\eta(s))\, dw(s).$$

З умов теореми випливає, що $\eta(t)=C_0$ — стаціонарний розв'язок цього рівняння. Із сильної єдиності розв'язку $\eta(t)$ маємо $\eta(t)=G(t_0,x_0)=C_0$ при $t_0 \le t < \tau_1$. Враховуючи неперервність функції $G(t,x)$ і процесу $\eta(t)$ при $t<\tau_1$, маємо $G(\tau_1,\xi(\tau_1-0))=C_0$.

Із побудови розв'язку рівняння (1) випливає, що $\xi(\tau_1)=\xi(\tau_1-0)+c(\tau_1,\xi(\tau_1-0),\theta_1)$, а використовуючи умови теореми, одержуємо

$$G(\tau_1,\xi(\tau_1)) = G(\tau_1,\xi(\tau_1-0)+c(\tau_1,\xi(\tau_1-0),\theta_1)) = G(\tau_1,\xi(\tau_1-0)) = C_0.$$

Отже, $G(t,\xi(t))=G(t_0,x_0)=C_0$ з імовірністю 1 при $t_0 \le t \le \tau_1$.

Аналогічні міркування можна повторити при $\tau_1 \le t < \tau_2$ і при всіх $t < \tau_Q(t_0,x_0)$ отримати, що множина $\Gamma_Q(G)$ при $C=C_0$ є інваріантною множиною рівняння (1) в області Q.

Теорема 4. *Для того щоб множина* $\Gamma_Q(G)$ *при* $C=C_0$ *була інваріантною в області* Q *множиною рівняння (1), досить, щоб при всіх* $(t,x)\in Q$ *виконувались умови:*

1) $G(t,x) \ge C_0 \quad \Big(G(t,x)=C_0 \quad$ *при всіх* $\quad (t,x)\in\Gamma_Q(G)\Big)$;

2) $LG(t,x) + \int_{\Theta_1} \triangle_G(t,x,\theta)\,\Pi(d\theta) \le 0$;

3) $\sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(t,x),\, b_k(t,x))^2 + \int_{\Theta_1} [\triangle_G(t,x,\theta)]^2\,\Pi(d\theta) \le l_0 \left[1+|x|^2\right]$;

4) $\Pi\{\theta\in\Theta_2 : G(t,x+c(t,x,\theta)) - G(t,x) \ne 0\} = 0 \quad$ *при всіх* $\quad (t,x)\in\Gamma_Q(G)$.

Доведення. Нехай $(t_0,x_0)\in\Gamma_Q(G)$, $G(t_0,x_0)=C_0$. При $t_0 \le t < \tau_1 < \tau_Q(t_0,x_0)$ (див. доведення теореми 2) скористаємося рівністю (10). Використовуючи умову 2 теореми, маємо, що при $t_0 \le t < \tau_1$ виконується нерівність

$$G(t,\xi(t)) - C_0 \le I(t), \tag{12}$$

де

$$I(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left(\nabla_x G(s,\xi(s)),\, b_k(s,\xi(s))\right)\, dw_k(s) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int_{\Theta_1} \left[G\left(s,\xi(s-)+c(s,\xi(s-),\theta)\right) - G\left(s,\xi(s-)\right)\right] \tilde{\nu}(ds,d\theta).$$

Позначимо $\tilde{\tau}_1(t) = \min(t,\tau_1)$. Оскільки τ_1 — марковський момент, то і $\tilde{\tau}_1(t)$ теж буде марковським моментом. Використовуючи умову 3 теореми, переконуємося, що випадкова величина $< I(\tilde{\tau}_1(t)) >$, де $< I(t) >$ — характеристика мартингала $I(t)$, має скінченне математичне сподівання, тому $\mathrm{E}I(\tilde{\tau}_1(t)) = 0$. Отже, враховуючи нерівність (12), маємо

$$\mathrm{E}[G(\tilde{\tau}_1(t),\xi(\tilde{\tau}_1(t))) - C_0] \leq 0.$$

З отриманої нерівності та умови 1 теореми випливає справедливість рівності

$$G(\tilde{\tau}_1(t),\xi(\tilde{\tau}_1(t))) - C_0 = 0 \quad \text{з імовірністю 1.}$$

Оскільки при зростанні t $\tilde{\tau}_1(t) \to \tau_1$, а $G(t,x)$ — неперервна функція, то $G(\tilde{\tau}_1(t),\xi(\tilde{\tau}_1(t))) \to$ $\to G(\tau_1,\xi(\tau_1-0))$ при $t \to \tau_1$, отже, $G(\tau_1,\xi(\tau_1-0)) = C_0$.

Згідно з ідеєю побудови розв'язку $\xi(t)$ рівняння (1)

$$\xi(\tau_1) = \xi(\tau_1-0) + c(\tau_1,\xi(\tau_1-0),\theta_1),$$

а використовуючи умову 4 теореми отримуємо, що $G(\tau_1,\xi(\tau_1)) \in \Gamma_Q(G)$.

Аналогічно на кожному з проміжків $\tau_k \leq t < \tau_{k+1} < \tau_Q(t_0,x_0)$ отримаємо з імовірністю 1 рівність $G(t,\xi(t)) = C_0$. Справедливість рівності $G(t,\xi(t)) = G(t_0,x_0)$ при $\tau^* \leq t < \tau_Q(t_0,x_0)$, де $\tau^* = \max\limits_k\{\tau_k < \tau_Q(t_0,x_0)\}$, встановлюється тими ж міркуваннями, що і при $t_0 \leq t < \tau_1$.

Отже,

$$[G(t,\xi(t)) - C_0]\mathbf{1}_{\{t<\tau_Q(t_0,x_0)\}} = 0 \quad \text{з імовірністю 1,}$$

тобто множина $\Gamma_Q(G)$ є інваріантною в області Q множиною рівняння (1).

3. Висновок. Отримані в роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування при побудові математичних моделей та дослідженні поведінки динамічних систем при випадкових збуреннях процесами типу „білого" і „дробового" шумів.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 611 с.
2. *Кулініч Г. Л., Кушніренко С. В.* Інваріантні множини систем стохастичних диференціальних рівнянь без післядії // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2000. — Вип. 63. — С. 112–118.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. — М.: Наука, 1975. — Т. 3. — 496 с.

Одержано 31.03.2005