УДК 517.9

ТЕОРЕМА ПРО ЗБУРЕННЯ КОІЗОТРОПНИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЛОКАЛЬНО ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Ю. В. Ловейкін, І. О. Парасюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, Київ, вул. Володимирська 64
e-mail: yuriyl@ua.fm
pio@univ.kiev.ua

We study the perturbation problem for quasiperiodic motions on invariant tori in a class of locally Hamiltonian systems. We prove a general KAM-theorem on perturbation of coisotropic invariant tori for locally Hamiltonian systems. As applications of the obtained theorem, we consider the motion of an electron on a two-dimensional torus under the influence of an electromagnetic field, extend results about bifurcation of a Cantor set of coisotropic invariant tori to the case of locally Hamiltonian systems.

Вивчається проблема збурень квазіперіодичних рухів на коізотропних інваріантних торах у класі локально гамільтонових систем. Доведено загальну КАМ-теорему про збурення коізотропних інваріантних торів локально гамільтонових систем, а також проілюстровано деякі застосування цієї теореми: рух електрона на двовимірному торі під впливом електромагнітного поля, розповсюдження результатів про біфуркацію канторової множини коізотропних інваріантних торів на випадок локально гамільтонових систем.

1. Вступ. У даній роботі в класі локально гамільтонових систем вивчається проблема збурень квазіперіодичних рухів на коізотропних інваріантних торах.

Ідея А. М. Колмогорова поєднання асимптотичних методів з послідовними замінами змінних ньютонівського типу відкрила широкі перспективи для одержання строгих результатів про збереження квазіперіодичних рухів та інваріантних торів інтегровних гамільтонових систем при малих збуреннях функцій Гамільтона. Цю ідею було покладено в основу напрямку досліджень, який дістав назву КАМ-теорії [1–4]. Важливим результатом неформальної теорії збурень став метод штучних параметрів у поєднанні з методом прискореної збіжності, розроблений незалежно М. М. Боголюбовим [5] та Ю. Мозером [6] і розвинутий Ю. О. Митропольським та А. М. Самойленком [7]. У подальшому велику кількість робіт було присвячено вдосконаленню техніки, яка застосовується при доведенні КАМ-теорем, розвитку нових напрямків і підходів, серед яких відзначимо результати Ю. Пошеля про вкладення ізотропних інваріантних торів у гладку в сенсі Вітні сім'ю [8], модифікований метод штучних параметрів Севрюка – Ермана [9], встановлення нових умов невиродженості гамільтонових систем Г. Рюссманом [10]. Досить повне уявлення про сучасний стан КАМ-теорії можна дістати, ознайомившись з оглядами [11–13].

Вивчення некласичного випадку, коли фазовий простір незбуреної гамільтонової системи розшаровується коізотропними інваріантними торами, розпочато в роботах [14–16]. І хоча в цьому напрямку досягнуто досить суттєвих успіхів [17–24], все ж у теорії коізотропних інваріантних торів і сьогодні є прогалини.

Метою даної роботи є доведення загальної КАМ-теореми про збурення коізотропних інваріантних торів локально гамільтонових систем із застосуванням модифікованого методу штучних параметрів Севрюка – Ермана [9], а також ілюстрація деяких застосувань цієї теореми.

Основний результат п. 2, сформульований у пп. 2.1, узагальнює результати роботи [16] і водночас охоплює як невироджений, так і вироджений випадки КАМ-теорії локально гамільтонових систем. У пп. 2.3 наведено доведення основної теореми, яке спирається на індуктивну лему з пп. 2.2.

О. І. Богоявленський у роботі [25] зауважив, що локально гамільтонова система, яка описує рух електрона на двовимірному торі $\mathbb{T}^2$ під впливом електромагнітного поля, у границі, коли відношення малого радіуса r до великого радіуса R тороїдальної камери прямує до нуля, є інтегровною в узагальненому сенсі (B-інтегровною) з квазіперіодичною динамікою на тривимірних коізотропних інваріантних торах чотиривимірного фазового простору. В пп. 2.4 показано, як до цієї системи можна застосувати теорему з пп. 2.1 при досить малих значеннях r/R.

Нарешті, п. 3 присвячено розповсюдженню результатів робіт [20, 24] про біфуркацію канторової множини коізотропних інваріантних торів на випадок локально гамільтонових систем.

2. КАМ-теорема для коізотропних інваріантних торів локально гамільтонових систем. ***2.1. Формулювання основної теореми.*** Будемо розглядати на симплектичному многовиді (M^{2m}, ω^2) локально гамільтонове векторне поле $\Im\omega$, де ω — замкнена 1-форма, а $\Im\colon T^*M^{2m} \mapsto TM^{2m}$ — індуковане симплектичною структурою гамільтонове відображення розшарувань, яке задовольняє рівність $\iota_{\Im\omega}\omega^2 = -\omega$ (ι — операція внутрішнього добутку векторного поля і диференціальної форми). Припустимо, що ця система в певному сенсі близька до B-інтегровної локально гамільтонової системи [15, 25], причому інваріантні тори останньої є коізотропними підмноговидами, дифеоморфними стандартному тору $\mathbb{T}^r := \mathbb{R}^r/2\pi\mathbb{Z}^r$. Тоді в околі кожного інваріантного тора існують координати типу „дія-кут” (y, φ), де $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)|\bmod 2\pi$, $s + r = 2m$, в яких:

а) кожен інваріантний тор визначається рівнянням $y = \mathrm{const}$;

б) для дужки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, індукованої симплектичною структурою ω^2, виконуються рівності

$$\{y, y\} = 0, \quad \{\varphi, y\} = \sigma, \quad \{\varphi, \varphi\} = \chi;$$

в) 1-форма ω набирає вигляду

$$\omega = d(\lambda_0 \cdot y + h(y, \varphi)) + (\zeta_0 + \zeta_1) \cdot d\varphi. \tag{1}$$

Тут σ та χ — матриці розміру $r \times s$ та $r \times r$ відповідно, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^s$, $\zeta_0 \in \mathbb{R}^r$, $\zeta_1 \in \mathbb{R}^r$ — деякі не залежні від y, φ вектори, h — функція, періодична з періодом 2π по кожній змінній φ_j, $j = 1, \ldots, r$, а символом «$\cdot$» позначено операцію стандартного скалярного добутку в координатному векторному просторі. Форма $dh + \zeta_1 \cdot d\varphi$ трактується як збурення форми $d(\lambda_0 \cdot y) + \zeta_0 \cdot d\varphi$, пов’язаної з лінеаризацією за змінними y незбуреної B-інтегровної системи в околі її інваріантного тора.

Зауважимо, що необхідною умовою інваріантності торів $y = \mathrm{const}$ локально гамільтонової системи з формою вигляду $df(y) + \zeta \cdot d\varphi$ є умова ортогональності

$$\sigma^{\mathrm{T}} \zeta = 0, \tag{2}$$

де символ «Т» позначає операцію транспонування. Справді, y-компонента векторного поля $\mathrm{Im}\,(df(y) + \zeta \cdot d\varphi)$ має вигляд $\{y, f(y) + \zeta \cdot \varphi\} = \{y, \varphi\}\zeta = -\sigma^{\mathrm{T}}\zeta$.

Таким чином, форма $d(\lambda_0 \cdot y) + \zeta_0 \cdot d\varphi$ породжує інтегровну локально гамільтонову систему

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi} = \{\varphi, \lambda_0 \cdot y + \zeta_0 \cdot \varphi\} \equiv \sigma\lambda_0 + \chi\zeta_0$$

за умови, що $\sigma^{\mathrm{T}}\zeta_0 = 0$. Оскільки інваріантні тори B-інтегровної системи утворюють s-параметричну сім'ю, то λ_0, h і, можливо, χ в загальному випадку додатково залежать від „внутрішніх" параметрів — сталих інтегрування. Вектори ζ_0 та ζ_1 від цих параметрів не залежать, однак вони, а також λ_0 та h, можуть залежати від деяких „зовнішніх" параметрів. Набір усіх параметрів системи позначимо через ϑ.

Наша мета полягає в тому, щоб обґрунтувати такий результат КАМ-теорії: якщо вектор ζ_1 також задовольняє умову ортогональності типу (2), а функція h та її похідні за змінними y при $y = 0$ є досить малими, то існує канторова підмножина параметрів, на якій справджується твердження: поблизу тора $y = 0$ існує r-вимірний інваріантний тор локально гамільтонової системи, породженої формою (1). При додаткових умовах невиродженої залежності досліджуваної системи від параметрів відносна міра зазначеної канторової множини прямує до 1, коли збурення прямує до нуля. Нас також цікавитиме питання диференційовності (в сенсі Вітні) множини торів збуреної системи. Крім того, ми маємо намір розглянути вироджений випадок, коли серед компонент вектора частот $\sigma\lambda_0 + \chi\zeta_0$ є такі, що прямують до нуля, коли величина збурення прямує до нуля.

Згідно з основною ідеєю методу штучних параметрів спочатку замість (1) будемо розглядати 1-форму загальнішого вигляду

$$\tilde{\omega} = d((\lambda + \mu\Delta) \cdot y + h(y, \varphi, \nu)) + \zeta \cdot d\varphi,$$

залежну від параметрів $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $n \geq s + r$, які задля зручності подальших викладок розбито на три групи: $\lambda := (\nu_1, \ldots, \nu_s)$, $\zeta := (\nu_{s+1}, \ldots, \nu_{s+r})$, $\vartheta := (\nu_{s+r+1}, \ldots, \nu_n)$. Множник $\mu \in (0; 1]$ надає можливість одночасно розглядати невироджений ($\mu = 1$) і вироджений ($\mu \ll 1$) випадки, а „поправка" $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_s)$ повинна бути визначена так, щоб вона не залежала від (y, φ), гладко залежала від параметрів ν і локально гамільтонова система з формою $\tilde{\omega}$ на певній підмножині простору параметрів ν мала інваріантний тор, близький до тора $y = 0$.

Для будь-якої множини $A \subset \mathbb{C}^n$ і числа $\delta > 0$ покладемо за означенням $A + \delta := \bigcup_{\nu \in A}\{\nu' \in \mathbb{C}^n : |\nu' - \nu| < \delta\}$. (Тут і далі значення норми $|\bullet|$ на векторі визначається як максимум модулів його компонент.) Через $\mathbf{C}^p$ та $\mathbf{C}^{\bar{\omega}}$ будемо позначати відповідно класи p разів неперервно диференційовних ($0 \leq p \leq \infty$) та дійсно-аналітичних відображень.

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 1. *Для додатних чисел* C, R, ρ, γ, τ, $a \in (1; 3/2)$, $b \in (1/2; 1)$, $a + b < 2$, *існують числа* $\varepsilon_* > 0$ *та* $\varkappa \in (0; 1)$ *такі, що для кожного* $\mu \in (0; 1]$ *і кожного* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*)$ *справджується твердження: якщо функція* h *є дійсно-аналітичною в області*

$$\Omega := \left\{z := (y, \varphi, \nu) \in \mathbb{C}^{s+r+n} : |y| < \rho, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho,\ \nu \in \mathcal{V} + r_0\right\},$$

де $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n = \mathrm{Re}\,\mathbb{C}^n$ *— обмежена область,* $r_0 := \mu|\ln\varepsilon|^{-\tau-1}$, *і задовольняє в ній нерівності*

$$\max\left\{|h|_{y=0}, |h'_y|_{y=0}\right\} \leq \mu^2\varepsilon, \quad \left|h''_{yy}\right|_{y=0} \leq \mu C, \quad \max\left\{|h|, \left|h'_z\right|, \left|h''_{zz}\right|\right\} \leq C,$$

то існують відображення

$$F(\varphi,\nu)\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{T}^r\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s),\quad \Delta(\nu)\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s)$$

з такими властивостями:

1) для кожного $\nu\in\mathcal{V}$ такого, що

$$\sigma^{\mathrm{T}}\zeta=0,\quad |\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda+\chi\zeta)|\geq\mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}\quad\forall\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r\setminus\{0\},$$

локально гамільтонова система з 1-формою $d((\lambda+\mu\Delta(\nu))\cdot y+h(y,\varphi,\nu))+\zeta\cdot d\varphi$ має інваріантний тор, заданий у фазовому просторі змінних (y,φ) рівнянням $y=F(\varphi,\nu)$, причому відображення $F(\bullet,\nu):\mathbb{T}^r\to\mathbb{R}^s$ — дійсно-аналітичне і потік на цьому торі квазіперіодичний з вектором базисних частот $\sigma\lambda+\chi\zeta$;

2) для кожного $p=0,1,2,\dots$ знайдеться стала $c(p,\varkappa)$, яка залежить лише від p та $\varkappa$, така, що справджується нерівність

$$\max\{|F|_p,|\Delta|_p\}\leq c(p,\varkappa)\mu^{1-p}|\ln\varepsilon|^{p(\tau+1)}\sup_{j\geq0}\frac{\varepsilon^{ba^j}}{\varkappa^{pj}},$$

де $|\bullet|_p$ — $\mathbf{C}^p$-норма у відповідній області.

Зауваження 1. За умови достатньої малості ε_* для тих p, які задовольняють нерівність $0\leq p\leq b\ln a\dfrac{\ln\varepsilon_*}{\ln\varkappa}$, маємо $\sup\limits_{j\geq0}\dfrac{\varepsilon^{ba^j}}{\varkappa^{pj}}=\varepsilon^b$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$.

Для того щоб цю теорему можна було застосувати до системи з 1-формою ω вигляду (1), у якій $\lambda_0=\lambda_0(\vartheta)$, $h=h(y,\varphi,\vartheta)$, $\zeta_j=\zeta_j(\vartheta)$, $j=0,1$, потрібно із співвідношень

$$\lambda+\mu\Delta(\lambda,\zeta_0(\vartheta)+\zeta_1(\vartheta),\vartheta=\lambda_0(\vartheta)\tag{3}$$

виразити $\lambda=\lambda(\vartheta)$. За природних припущень це можна зробити при всіх досить малих $\varepsilon>0$, при цьому разом з $\lambda_0(\vartheta)$ та $\zeta_j=\zeta_j(\vartheta)$, $j=0,1$, гладкою буде й функція $\lambda(\vartheta)$, і вона мало відрізнятиметься від $\lambda_0(\vartheta)$. Відтак підмножина параметрів ϑ, на якій система з формою (1) має інваріантний тор, визначатиметься такими умовами:

$$\nu(\vartheta):=(\lambda(\vartheta),\zeta_0(\vartheta)+\zeta_1(\vartheta),\vartheta)\in\mathcal{V},\quad\sigma^{\mathrm{T}}(\zeta_0(\vartheta)+\zeta_1(\vartheta))=0,$$

$$|\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda(\vartheta)+\chi(\zeta_0(\vartheta)+\zeta_1(\vartheta)))|\geq\mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}\quad\forall\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r\backslash\{0\}.$$

Для оцінки відносної міри цієї канторової підмножини у просторі параметрів ϑ слід застосувати результати теорії діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору (див., наприклад, [9]).

2.2. Допоміжна індуктивна лема. В цьому пункті наведено лему, яка є технічною основою доведення сформульованого вище основного результату. Вона містить опис одного кроку швидко збіжного ітераційного процесу послідовних симплектичних перетворень локально гамільтонових систем.

Лема 1. *Виберемо числа* $\alpha \in (0;1/2)$, $\beta \in (0;1)$ *так, щоб виконувалися нерівності* $a < 1+\alpha < 2-b$, $0 < \beta < 1-2\alpha$, *введемо послідовності чисел*

$$\delta_k = \frac{\rho}{14\cdot 2^{k+1}}, \quad \rho_0 = \rho, \quad \rho_{k+1} = \rho_k - 7\delta_k, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon, \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^a = \varepsilon_0^{a^{k+1}},$$

$$C_0 = C, \quad C_{k+1} = C_k + \varepsilon_k^\beta, \quad N_{k+1} = \frac{4a^k}{3\delta_k}|\ln\varepsilon|, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

і послідовності множин

$$L_k(\gamma, r_0) = \bigcup_{0<|\mathbf{m}|\le N_{k+1}} \left\{\nu \in \mathcal{V} + r_0 : |\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda + \chi\zeta)| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}\right\},\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r,$$

$$D_k = \left\{z := (y,\varphi,\theta) \in \mathbb{C}^{s+r+s} : |y| < \rho_k,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k,\ |\theta| < \varepsilon_k^\alpha\right\},$$

$$E_k = \{\theta \in \mathbb{C}^s : |\theta| < \varepsilon_k^\alpha\}, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Існує $\varepsilon_* > 0$ *таке, що для всіх* $\mu \in (0;1]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*)$ *і* $k = 0,1,2,\ldots$ *справджується твердження: якщо* $\omega_k = d((\lambda + \mu\theta)\cdot y + h_k(y,\varphi,\theta,\nu)) + \zeta\cdot d\varphi$ *задовольняє на множині* $D_k \times L_k(\gamma/2, r_0)$ *умови*

$$h_k \in \mathbf{C}^{\bar\omega}(D_k \times L_k(\gamma/2, r_0) \mapsto \mathbb{C}), \tag{4}$$

$$\max\left\{|h_k|_{y=0}, \left|h_{k\,y}'\right|_{y=0}\right\} \le \mu^2\varepsilon_k, \quad \left|h_{k\,yy}''\right|_{y=0} \le \mu C_k, \tag{5}$$

$$\max\left\{|h_k|, \left|h_{k\,z}'\right|, \left|h_{k\,zz}''\right|\right\} \le C_k, \tag{6}$$

то існують відображення

$$X_k \in \mathbf{C}^{\bar\omega}(D_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}^{s+r}), \quad \Theta_k \in \mathbf{C}^{\bar\omega}(E_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}^s)$$

з такими властивостями:

1) у відповідних областях визначення виконуються нерівності

$$|X_k| \le \mu\varepsilon_k^b, \quad \left|X_{k\,z}'\right| \le \mu\varepsilon_k^\beta, \quad |\Theta_k| \le \mu\varepsilon_k^b, \quad \left|\Theta_{k\,z}'\right| \le \mu\varepsilon_k^\beta;$$

2)при фіксованих $\theta \in \operatorname{Re} E_{k+1}$, $\nu \in \operatorname{Re} L_{k+1}(\gamma/2, r_0)$ *відображення*

$$\{y \in \mathbb{R}^s : |y| < \rho_{k+1}\} \times \mathbb{R}^r \ni (y,\varphi) =: x \mapsto x + X_k := (y + Y_k, \varphi + \Phi_k)$$

є симплектоморфізмом;

3) якщо у формі ω_k *виконати заміну змінних і параметрів*

$$z \mapsto z + Z_k := (x + X_k, \theta + \Theta_k)$$

і перетворену форму подати у вигляді $\omega_{k+1} = d((\lambda+\mu\theta)\cdot y + h_{k+1}(y,\varphi,\theta,\nu)) + \zeta\cdot d\varphi$, *то функція* h_{k+1} *задовольнятиме на множині* $D_{k+1}\times L_{k+1}(\gamma/2, r_0)$ *умови вигляду (4) – (6), в яких індекс* k *замінено на* $k+1$.

Доведення. При доведенні значною мірою повторюються міркування з [21, 23], тому ми не зупиняємося на поясненні суто технічних деталей. Визначимо функції

$$u_k(\varphi,\theta,\nu) \in \mathbf{C}^{\bar\omega}\left(\mathbb{C}^r \times E_k \times L_k\left(\frac{\gamma}{2}, r_0\right) \to \mathbb{C}\right),$$

$$v_k(\varphi,\theta,\nu) \in \mathbf{C}^{\bar\omega}\left(\mathbb{C}^r \times E_k \times L_k\left(\frac{\gamma}{2}, r_0\right) \to \mathbb{C}^s\right)$$

як розв'язки гомологічних рівнянь

$$\left[(\sigma\lambda+\chi\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]u_k = (\mathcal{P}_{N_{k+1}} - \mathcal{P}_0)\left[h_k|_{y=0}\right],$$

$$\left[(\sigma\lambda+\chi\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]v_k = (\mathcal{P}_{N_{k+1}} - \mathcal{P}_0)\left[h_k{}'_y|_{y=0} + h_k{}''_{yy}|_{y=0}\{y, u_k\}\right],$$

де $\mathcal{P}_0(\bullet) := (2\pi)^{-r}\int\limits_{\mathbb{T}^r} d\varphi$, $\mathcal{P}_N(\bullet) := \sum\limits_{0\le|\mathbf{m}|\le N} e^{i\mathbf{m}\cdot\varphi}\mathcal{P}_0(\bullet\, e^{-i\mathbf{m}\cdot\varphi})$, $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r$.

Функція $S_k = u_k + v_k\cdot y$ породжує гамільтонове векторне поле $\xi_k = \{x, S_k\}$. Скориставшись відомими оцінками, які використовуються в КАМ-теорії, неважко переконатися, що

$$|u_k| \le \frac{2^{r+3}\Gamma(r+1)\mu\varepsilon_k}{\gamma\delta_k^r} \le A_1\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^r} \quad \text{при} \quad (z,\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \quad \text{і} \quad |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - \delta_k,$$

$$\left|u_k{}'_\varphi\right| \le A_1\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{r+1}} \quad \text{при} \quad (z,\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \quad \text{і} \quad |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - 2\delta_k,$$

$$|v_k| \le A_2\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+1}} \quad \text{при} \quad (z,\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \quad \text{і} \quad |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - 3\delta_k,$$

$$\left|v_k{}'_\varphi\right| \le A_2\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}} \quad \text{при} \quad (z,\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \quad \text{і} \quad |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - 4\delta_k$$

(тут і далі в доведенні леми A_j позначають сталі, що не залежать від μ, ε, k). Тоді, враховуючи, що ξ_k — поліном першого степеня щодо y, маємо (у подальших оцінках доведення леми вважаємо, що $\nu\in L_{k+1}(\gamma/2, r_0)$)

$$|\xi_k| \le A_3\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}} \quad \text{при} \quad |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - 4\delta_k,$$

$$\left|\xi_k{}'_x\right| \le A_3\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+3}} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - \delta_k, \quad |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - 5\delta_k.$$

Використаємо S_k як інфінітезимальну твірну функцію (локальної) однопараметричної групи симплектичних дифеоморфізмів — (локального) потоку $\{\mathcal{X}_k^t\}$, породженого векторним полем ξ_k, і покладемо $X_k = \mathcal{X}_k^1 - x$. Тоді

$$|X_k| \le A_3 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}} \quad \text{при} \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 4\delta_k,$$

$$\left|X_k{}'_z\right| \le A_3 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-\alpha}}{\delta_k^{2r+3}} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - \delta_k, |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k, |\theta_k| < \varepsilon_k^{a\alpha} = \varepsilon_{k+1}^{\alpha},$$

$$|X_k - \xi_k| \le A_4 \frac{\mu^2\varepsilon_k^2}{\delta_k^{4r+5}} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - \delta_k, |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k,$$

$$\left|(X_k - \xi_k)'_y\right| \le A_4 \frac{\mu^2\varepsilon_k^2}{\delta_k^{4r+6}} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - 2\delta_k, |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k.$$

Покладемо $\Theta_k = -\dfrac{1}{\mu}\,\mathcal{P}_0\left[h_k{}'_y|_{y=0} + h_k{}''_{yy}|_{y=0}\{y, u_k\}\right]$. Тоді виконуються нерівності

$$|\Theta_k| \le A_5 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{r+1}} \quad \text{при} \quad |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha}, \quad \left|\Theta_k{}'_\theta\right| \le A_5 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-\alpha}}{\delta_k^{r+1}} \quad \text{при} \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha}.$$

Отже, відображення X_k та Θ_k задовольняють нерівності, наведені в п. 1 леми. При цьому очевидно, що умова (4), в якій індекс k замінено на $k+1$, виконується.

Подамо h_{k+1} у вигляді

$$h_{k+1}(z,\lambda,\nu) = h_k(z,\lambda,\nu) + \int_0^1 Z_k \cdot \frac{\partial h_k(z + tZ_k, \lambda, \nu)}{\partial z}\, dt - \mathcal{P}_0[h_k|_{y=0}] + \zeta\cdot\left(\Phi_k - \{\varphi, S_k\}\right),$$

$$|y| < \rho_k - \delta_k, |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 6\delta_k, |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha}.$$

Тоді можна стверджувати, що

$$\begin{gathered} |h_{k+1} - h_k| \le A_6 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}, \quad \left|(h_{k+1} - h_k)'_z\right| \le A_6 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-\alpha}}{\delta_k^{2r+3}}, \quad \left|(h_{k+1} - h_k)''_{zz}\right| \le 2A_6 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-2\alpha}}{\delta_k^{2r+4}}, \\ |y| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 7\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha}. \end{gathered} \tag{7}$$

Оскільки $C_{k+1} = C_k + \varepsilon_k^{\beta}$, то умова (6), в якій індекс k замінено на $k+1$, виконується.

Далі, якщо виконуються умови ортогональності (2), то для довільної диференційовної функції $u(y,\varphi)$ маємо

$$\{\lambda\cdot y + \zeta\cdot\varphi, u\} = \lambda\cdot\{y,u\} + \zeta\cdot\{\varphi,u\} = -\lambda\cdot\sigma^{\mathrm{T}} u'_\varphi + \zeta\cdot(\sigma u'_y + \chi u'_\varphi) = -\left[(\sigma\lambda + \chi\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] u.$$

Взявши до уваги, що $\xi_k = (\{y, S_k\}, \{\varphi, S_k\})$, а u_k та v_k є розв'язками гомологічних рівнянь, подамо h_{k+1} у вигляді

$$h_{k+1} = \lambda \cdot (Y_k - \{y, S_k\}) + \mu\theta \cdot Y_k + (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_{N_{k+1}})[h_k|_{y=0}] + h_k{}'_y|_{y=0} \cdot Y_k + h_k{}'_\varphi|_{y=0} \cdot \Phi_k +$$
$$+ (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_{N_{k+1}}) \left[h_k{}'_y|_{y=0} + h_k{}''_{yy}|_{y=0}\{y, u_k\}\right] \cdot y + \zeta \cdot (\Phi_k - \{\varphi, S_k\}) + \mu\Theta_k \cdot Y_k +$$
$$+ h_k{}'_\theta|_{y=0} \cdot \Theta_k + O(Z_k^2) + O(y^2).$$

Знову скориставшись оцінками КАМ-теорії, дістанемо нерівності

$$|h_{k+1}|_{y=0} \le \mu^2\varepsilon_{k+1}, \ \left|(h_{k+1})'_y\right|_{y=0} \le \mu^2\varepsilon_{k+1} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - \delta_k, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \delta_k - 6\delta_k, |\theta| < \varepsilon_{k+1}^\alpha.$$

Застосувавши оцінки Коші до першої нерівності в (7), отримаємо

$$\left|(h_{k+1} - h_k)''_{yy}\right| \le 2A_6 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+3}} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - 3\delta_k, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k - 7\delta_k, |\theta| < \varepsilon_{k+1}^\alpha.$$

З цієї нерівності випливає $\left|(h_{k+1})''_{yy}\right|_{y=0} \le \mu C_{k+1}$. Отже, умова (5), в якій індекс k замінено на $k+1$, виконується.

Лему 1 доведено.

2.3. Доведення основної теореми. Доведення теореми полягає в побудові близького до тотожного (при малих ε) симплектичного перетворення

$$x \mapsto x + \Xi(x, \nu), \tag{8}$$

яке на відповідній множині параметрів ν зводить 1-форму ω до вигляду $\omega_* = d(\lambda \cdot y + h_*(y, \varphi, \nu)) + \zeta \cdot d\varphi$, де функція h_* задовольняє рівності $h_*|_{y=0} = 0$, $h_*{}'_y|_{y=0} = 0$.

Оскільки рівняння руху системи з локально гамільтоновим векторним полем $\Im\omega_*$ в нових координатах (y, φ) мають вигляд

$$\dot y = -\sigma^{\mathrm{T}} \cdot h_*{}'_\varphi, \quad \dot\varphi = \sigma\left(\lambda + h_*{}'_y\right) + \chi\left(h_*{}'_\varphi + \zeta\right),$$

то множина $y = 0$ є її інваріантним тором, і потік на цьому торі задається системою $\dot\varphi = \sigma\lambda + \chi\zeta$.

Перетворення (8) вдається побудувати методом прискореної збіжності як границю послідовності симплектичних перетворень, кожне з яких є перетворенням Лі зсуву за одиницю часу вздовж траєкторій гамільтонової системи зі спеціальним чином вибраним гамільтоніаном (інфінітезимальною твірною функцією).

Визначимо дві послідовності відображень

$$\Xi_k : D_k \times L_k\left(\frac{\gamma}{2}, r_0\right) \to \mathbb{C}^{s+r}, \quad \Delta_k : E_k \times L_k\left(\frac{\gamma}{2}, r_0\right) \to \mathbb{C}^s \tag{9}$$

рекурентними співвідношеннями

$$\Xi_0 = x, \quad \Xi_{k+1} = \Xi_k(x + X_k, \theta + \Theta_k, \nu),$$

$$\Delta_0 = \theta, \quad \Delta_{k+1} = \Delta_k(\theta + \Theta_k, \nu), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де X_k, Θ_k — послідовності відображень, а D_k, E_k, $L_k(\gamma/2, r_0)$ — послідовності множин, визначені в індуктивній лемі, якщо попередньо покласти $h_0 = h$.

Неважко перевірити, що відображення (9) задовольняють нерівності

$$|\Xi_{k+1} - \Xi_k| \le 2\mu\varepsilon_k^b, \quad |\Delta_{k+1} - \Delta_k| \le 2\mu\varepsilon_k^b \tag{10}$$

для всіх $(x, \theta, \nu) \in D_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0)$.

З (10) випливає рівномірна збіжність послідовності $\{\Xi_k, k \ge 0\}$ до $\Xi_{(\infty)}$ на множині $D_{(\infty)} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ і послідовності $\{\Delta_k, k \ge 0\}$ до $\Delta_{(\infty)}$ на множині $\{\theta = 0\} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$. При цьому для фіксованого $\nu \in L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ відображення $\Xi_{(\infty)}$ є дійсно-аналітичним щодо (y, φ) в області $\{(y, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+r} : |y| < \rho/2, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho/2\}$.

Пересвідчимося, що відображення $\Xi_{(\infty)}$ та $\Delta_{(\infty)}$ є гладкими в сенсі Вітні. Неважко показати, що для досить малого $\varkappa \in (0; 1)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, досить малого $\varepsilon_* > 0$ та всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*)$, $\mu \in (0; 1]$ виконується нерівність

$$2\mu\,\varepsilon_k^b \le M r_k^p,$$

в якій $r_k = \mu |\ln\varepsilon|^{-\tau-1}\varkappa^k$, $M = 2\mu^{1-p}|\ln\varepsilon|^{p(\tau+1)} \sup\limits_{k\ge 0} \dfrac{\varepsilon^{ba^k}}{\varkappa^{pk}}$. До того ж для кожного $k = 0, 1, 2, \ldots$ множина $\{(y, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+r} : |y| < \rho/2, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho/2\} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ міститься в множині $\{(y, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+r} : |y| < \rho_k, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k\} \times L_k(\gamma/2, r_0)$ разом зі своїм r_k-околом (див. пп. 3.3, де доведено більш загальне твердження).

Тоді можна стверджувати [8, 9], що відображення $\Xi_{(\infty)}$ та $\Delta_{(\infty)}$ є гладкими в сенсі Вітні відповідно на множинах $\{(y, \varphi) \in \mathbb{R}^{s+r} : |y| < \rho/2, |\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho/2\} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ та $L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ (оскільки $E_{(\infty)} = \{0\}$, то вважаємо, що $\Xi_{(\infty)}$ та $\Delta_{(\infty)}$ не залежать від θ). Ці відображення можна продовжити до гладких, визначених відповідно в $\mathbb{R}^{s+r+n}$ та $\mathbb{R}^n$, причому існує стала $\widetilde{c}$, яка залежить лише від p та $\varkappa$, така, що виконується нерівність

$$\max\left\{|\Xi_{(\infty)}|_p,\, |\Delta_{(\infty)}|_p\right\} \le \widetilde{c}\,M.$$

Відображення Δ покладемо рівним $\Delta_{(\infty)}$.

Для того щоб побудувати відображення F, яке описує інваріантний тор збуреної системи у вихідних координатах (y, φ), позначимо через $y_k(\varphi, \nu)$ та $\varphi + f_k(\varphi, \nu)$ відповідно y- та φ-компоненти для $\Xi_k|_{y=0}$. При фіксованому $\nu \in L_k(\gamma, r_0)$ відображення $\varphi \mapsto \varphi + f_k$ визначає аналітичний дифеоморфізм смуги $|\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_{k+1}$ у смугу $|\mathrm{Im}\,\varphi| < \rho_k$. Позначивши через $\varphi + \psi_k(\varphi, \nu)$ обернений дифеоморфізм, дістанемо послідовність дійсно-аналітичних відображень $F_k(\varphi, \nu) := y_k(\varphi + \psi_k(\varphi, \nu), \nu)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Її збіжність, гладкість у сенсі Вітні граничного відображення $F_\infty(\varphi, \nu) =: F(\varphi, \nu)$, а також оцінка для $|F|_p$ встановлюються на основі міркувань, аналогічних наведеним вище.

Теорему доведено.

2.4. Рух електрона в електромагнітному полі. Наслідуючи [25], розглянемо задачу про рух електрона по двовимірному тору $\mathbb{T}^2$ під впливом електромагнітного поля. Нехай тор $\mathbb{T}^2$, вкладений у тривимірний простір, описується рівняннями

$$x = (R + r\cos\varphi_1)\cos\varphi_2, \quad y = (R + r\cos\varphi_1)\sin\varphi_2, \quad z = r\sin\varphi_1,$$

де φ_1, φ_2 — кутові координати, а r і R, $r < R$, — радіуси відповідно малого та великого кіл. За припущення, що магнітне поле є ортогональним до тора і має сталу інтенсивність B, а електричне поле — дотичним до тора, рух електрона описується рівняннями Лагранжа [26, 27] на двовимірному торі $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2)| \mod 2\pi\}$ з багатозначним лагранжіаном

$$L = \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m(R + r\cos\varphi_1)^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{e}{c} B\varphi_1\dot{\varphi}_2 + eE_1\varphi_1 + eE_2\varphi_2, \tag{11}$$

де m — маса електрона, e — його заряд, c — швидкість світла, E_1, і E_2 — компоненти електричного поля.

Увівши імпульси $p_1 = mr^2\dot{\varphi}_1$, $p_2 = m(R + r\cos\varphi_1)^2\dot{\varphi}_2$ і перетворивши кутові змінні $\varphi_1 \mapsto \varphi_1 - \frac{c}{eB} p_2$, $\varphi_2 \mapsto \varphi_2 + \frac{c}{eB} p_1$, дістанемо локально гамільтонову систему з багатозначним гамільтоніаном

$$H = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2}\left(1 + \frac{r}{R}\cos\left(\varphi_1 - \frac{cp_2}{eB}\right)\right)^{-2} - \frac{cE_2p_1}{B} + \frac{cE_1p_2}{B} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2$$

на симплектичному многовиді $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2, \omega^2)$, де $\omega^2 := -\frac{c}{eB}\, dp_1 \wedge dp_2 + \frac{eB}{c}\, d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$.

Після симплектичного перетворення

$$p_1 \mapsto p_1 + \frac{cmE_2r^2}{B}, \quad p_2 \mapsto p_2 - \frac{cmE_1R^2}{B}, \quad \varphi_1 \mapsto \varphi_1 - \frac{mc^2E_1R^2}{eB^2}$$

і введення малого параметра $\mu := r/R$ гамільтоніан з точністю до сталого доданка набирає вигляду

$$H = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2 + \frac{(Bp_2 - mcE_1R^2)^2}{2mB^2R^2}\left[\left(1 + \mu\cos\left(\varphi_1 - \frac{cp_2}{eB}\right)\right)^{-2} - 1\right].$$

У [25] за умови, що $r/R \ll 1$, цей гамільтоніан інтерпретується як мале збурення гамільтоніана

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2.$$

Відповідна незбурена система має однозначний перший інтеграл

$$\mathcal{I}(p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2mr^2} + \frac{p_2^2}{2mR^2}.$$

Кожний нетривіальний многовид рівня цієї функції у фазовому просторі $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ є 3-вимірним коізотропним інваріантним тором незбуреної системи, усі траєкторії якої квазіперіодичні з частотами

$$\frac{eB}{cmrR}, \quad \frac{cE_2}{B}, \quad -\frac{cE_1}{B}. \tag{12}$$

При спробі застосувати до збуреної системи результати КАМ-теорії виникають труднощі, пов'язані з тим, що модуль збуреного гамільтоніана оцінюється величиною порядку $\max\{r/R^3, rR\}$, а перша з частот — величиною порядку $1/rR$. Отже, ця частота необмежено зростає, коли збурення прямує до нуля. Для того щоб мати змогу застосувати теорему 1, нам доведеться виконати низку додаткових перетворень збуреного гамільтоніана.

Уведемо нові змінні $(u, \psi| \mod 2\pi)$ за формулами

$$p_1 = \frac{eBr}{cR}\,\mathrm{e}^u \sin\psi, \quad p_2 = \frac{eB}{c}\,\mathrm{e}^u \cos\psi.$$

Тоді

$$H = \frac{(eB)^2}{2m(cR)^2}\,\mathrm{e}^{2u} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2 + \\ + \frac{(eB^2\mathrm{e}^u\cos\psi - mc^2E_1R^2)^2}{2m(cBR)^2}\left[\frac{1}{(1+\mu\cos(\varphi_1 - \mathrm{e}^u\cos\psi))^2} - 1\right], \tag{13}$$

$$\omega^2 = \mu\,\frac{eB\mathrm{e}^{2u}}{c}\,du\wedge d\psi + \frac{eB}{c}\,d\varphi_1\wedge d\varphi_2. \tag{14}$$

Вигляд гамільтонової системи не зміниться, якщо форму ω^2 домножити на $\dfrac{c}{\mu eB}$ і замінити час $t \mapsto \dfrac{c}{\mu eB}t$. Ненульові елементи зміненої дужки Пуассона визначатимуться рівностями

$$\{\psi, u\} = \mathrm{e}^{-2u}, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\} = -\mu.$$

Далі R вважаємо фіксованим. Увівши для зовнішніх параметрів системи позначення $\upsilon := (B, E_1, E_2)$, покладемо $\kappa_0 = \kappa_0(\upsilon) := \dfrac{(eB)^2}{m(cR)^2}$, і розклавши останній доданок в (13) за степенями малого параметра μ, подамо гамільтоніан у вигляді

$$H = H_0(u,\varphi_1,\varphi_2,\upsilon) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k H_k(u,\varphi_1,\psi,\upsilon), \quad H_0 := \frac{\kappa_0}{2}\,\mathrm{e}^{2u} - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2. \tag{15}$$

Легко бачити, що функції H_k є цілими як функції фазових змінних u, φ_1, ψ і раціональними як функції параметрів υ, причому ряд в (15) має ненульовий радіус збіжності в кожній області простору $\mathbb{C}^6$, у якій $B \neq 0$ і $|u|$, $|\mathrm{Im}\,\varphi_1|$, $|\mathrm{Im}\,\psi|$ — обмежені.

Усереднимо спочатку гамільтоніан (15) за змінною ψ до членів порядку $O(\mu^3)$. Запишемо дужку Пуассона у вигляді $\{\bullet,\bullet\} = \{\bullet,\bullet\}_0 + \mu\{\bullet,\bullet\}_1$, де $\{\psi, u\}_0 := \mathrm{e}^{-2u}$, $\{\varphi_1,\varphi_2\}_1 := -1$. Тоді симплектичне перетворення зсуву за час $t = 1$ вздовж траєкторій системи з інфінітезимальною твірною функцією $\mu S_1(u,\varphi_1,\psi,\upsilon) + \mu^2 S_2(u,\varphi_1,\psi,\upsilon)$ індукує перетворення гамільтоніана

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k H_k \mapsto H_0+\mu\left(\{H_0,S_1\}_0+H_1\right)+$$
$$+\mu^2\left(\{H_0,S_2\}_0+\{H_0,S_1\}_1+\frac{1}{2}\{\{H_0,S_1\},S_1\}_0+\{H_1,S_1\}_0+H_2\right)+O\left(\mu^3\right).$$

Врахувавши, що $\{H_0,S_1\}_1=0$, покладемо

$$H_1^1:=H_1,\quad H_2^1:=\frac{1}{2}\{\{H_0,S_1\},S_1\}_0+\{H_1,S_1\}_0+H_2$$

і позначимо через $\bar H_j^1$ середнє за змінною ψ функції H_j^1. Тепер визначимо функції S_j, $j=1,2$, так, щоб

$$\{S_j,H_0\}\equiv\kappa_0\,\frac{\partial S_j}{\partial\psi}=H_j^1-\bar H_j^1.$$

Очевидно, можна покласти $S_j=\dfrac{1}{\kappa_0}\displaystyle\int_0^{\psi}\left(H_j^1(u,\varphi_1,s,\upsilon)-\bar H_j^1(u,\varphi_1,\upsilon)\right)ds$. Тоді перетворений гамільтоніан набере вигляду $H=H_0+\mu\bar H_1^1+\mu^2\bar H_2^1+O(\mu^3)$.

Далі усереднимо цей гамільтоніан за змінною φ_1 за допомогою перетворення зсуву вздовж траєкторій системи з гамільтоніаном $S_0^1(u,\varphi_1,\upsilon)+\mu S_1^1(u,\varphi_1,\upsilon)$. Для функцій, які не залежать від ψ, дужка $\{\bullet,\bullet\}$ збігається з $\mu\{\bullet,\bullet\}_1$, а дужка Пуассона функцій, які не залежать від φ_2 і ψ, дорівнює нулю. Тому

$$H_0+\mu\bar H_1^1+\mu^2\bar H_2^1+O(\mu^3)\mapsto H_0+\mu\left(\{H_0,S_0^1\}_1+\bar H_1^1\right)+$$
$$+\mu^2\left(\{H_0,S_1^1\}_1+\frac{1}{2}\{\{H_0,S_0^1\}_1,S_0^1\}_1+\{\bar H_1^1,S_0^1\}_1+\bar H_2^1\right)+O(\mu^3)=$$
$$=H_0+\mu\left(\{H_0,S_0^1\}_1+\bar H_1^1\right)+\mu^2\left(\{H_0,S_1^1\}_1+\bar H_2^1\right)+O(\mu^3).$$

Позначимо через $\bar{\bar H}_j^1(u,\upsilon)$ середнє функції $\bar H_j^1(u,\varphi_1,\upsilon)$ за змінною φ_1. Функції S_j^1, $j=0,1$, визначимо так, щоб

$$\left\{S_j^1,H_0\right\}_1\equiv -eE_2\,\frac{\partial S_j^1}{\partial\varphi_1}=\bar H_{j+1}^1-\bar{\bar H}_{j+1}^1.$$

Очевидно, можна покласти $S_j^1=-\dfrac{1}{eE_2}\displaystyle\int_0^{\varphi_1}\left(\bar H_{j+1}^1(u,s,\upsilon)-\bar{\bar H}_{j+1}^1(u,\upsilon)\right)ds$. Легко зрозуміти, що $\bar{\bar H}_1^1=0$. Тому усереднений гамільтоніан матиме вигляд

$$H=\frac{\kappa_0}{2}\,\mathrm{e}^{2u}-eE_1\varphi_1-eE_2\varphi_2+\mu^2\bar{\bar H}_2^1(u,\upsilon)+O(\mu^3).$$

Нарешті, ввівши нову змінну $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2u} - \xi$, де $\xi > 0$ — внутрішній параметр, який нумерує тори незбуреної системи, дістанемо гамільтоніан вигляду

$$H = (\kappa_0 + \mu^2\kappa_2)y - eE_1\varphi_1 - eE_2\varphi_2 + h(y, \varphi_1, \psi, \upsilon, \mu), \tag{16}$$

де $\kappa_2 = \kappa_2(\upsilon, \xi) := \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{y=0} \bar{\bar{H}}_j^1(\ln\sqrt{2(\xi + y)}, \upsilon)$ і $h = O(\mu^3)$, та дужки Пуассона

$$\{\psi, y\} = 1, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\} = -\mu.$$

Тепер до відповідної гамільтонової системи вже можна застосувати теорему 1. У даному випадку $\lambda_0 = \kappa_0(\upsilon) + \mu^2\kappa_2(\upsilon, \xi)$, $\zeta_0 = \zeta = (-eE_1, -eE_2, 0)$, $\nu = (\lambda, \upsilon, \xi)$ (λ — скаляр),

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \sigma = \{\varphi, y\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \{\varphi, \varphi\} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поклавши $\varepsilon := \mu^b$, де $b \in (1/2; 1)$ — фіксоване число, можна вказати таке досить мале μ_*, що для кожного $\mu \in (0, \mu_*)$ будуть існувати (скалярні) функції $F = F_\mu(\varphi, \nu)$ та $\Delta = \Delta_\mu(\nu)$, про які йдеться в теоремі 1. При цьому, оскільки $\bar{\bar{H}}_1 = 0$, має місце зображення $\Delta_\mu(\nu) = \mu\tilde{\Delta}_\mu(\nu)$, і $\tilde{\Delta}_\mu$ має ті ж властивості, що й Δ_μ. Тепер з рівняння

$$\lambda + \mu^2\tilde{\Delta}_\mu(\nu) = \kappa_0(\upsilon) + \mu^2\kappa_2(\upsilon, \xi)$$

виразимо λ як функцію інших параметрів: $\lambda = \lambda_\mu(\upsilon, \xi)$. Очевидно, що $\lambda_\mu = \kappa_0(\upsilon) + O(\mu^2)$. Будемо припускати, що параметр E_2 змінюється в області $E_2 > \gamma/e$. Тоді, оскільки h не залежить від φ_2, з урахуванням вигляду дужок Пуассона діофантові умови на параметри λ, ζ можна подати у вигляді $\frac{\lambda}{eE_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_\mu$, де $\mathcal{R}_\mu$ — об'єднання відрізків

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\mu\frac{m}{k} + x\right| \leq \frac{\mu}{l(|k| + l)^\tau}\right\} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\ \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Легко показати, що $\operatorname{mes}\mathcal{R}_\mu \leq 4\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^\tau}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} := C(\tau)\mu$ при $\tau > 1$. Отже, для кожного $\mu \in (0, \mu_*)$, кожного $x \in \mathcal{R}_\mu$ і значень параметрів υ, ξ, для яких виконується рівність

$$\frac{\lambda_\mu(\upsilon, \xi)}{eE_2} = x,$$

система з гамільтоніаном (16) має тривимірний інваріантний тор, заданий рівнянням $y = F_\mu(\varphi, \lambda_\mu(\upsilon, \xi), \upsilon, \xi)$. Рух на торі є квазіперіодичним із частотами $(\mu eE_2, -\mu eE_1, \lambda_\mu(\upsilon, \xi))$.

На основі проведеного дослідження дістаємо, зокрема, такий результат.

Теорема 2. *Нехай* $R_0 > r_0 > 0, \gamma > 0, \tau > 1$ — *довільні числа. Тоді існують такі* $r_* \in (0, r_0), C > 0$, *що для будь-яких* $\mathcal{I}_0, R, r, E_1, E_2, \widetilde{B}$, *які задовольняють умови*

$$\mathcal{I}_0, R \in (r_0; R_0), \quad r \in (0; r_*), \quad |E_1| < R_0, \quad E_2, \tilde{B} \in (-R_0; -r_0) \cup (r_0; R_0),$$

$$\left| eE_2 rk + \frac{(e\tilde{B})^2}{mc^2 R} l \right| \leq \frac{r\gamma}{(|k| + l)^\tau} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \;\forall\, l \in \mathbb{N},$$

існує таке B, *що* $|B - \tilde{B}| < Cr^2$ *і система з лагранжіаном* L *(11) в* Cr*-околі тривимірного тора, який задається у фазовому просторі рівнянням*

$$\mathcal{I}\left(mr^2 \dot{\varphi}_1 - \frac{cmE_2 r^2}{B}, m(R + r\cos\varphi_1)^2 \dot{\varphi}_2 + \frac{cmE_1 R^2}{B} \right) = \mathcal{I}_0,$$

має тривимірний інваріантний тор, усі рухи на якому квазіперіодичні з частотами (12).

3. Біфуркація коізотропних інваріантних торів при локально гамільтонових збуреннях систем, інтегровних за Ліувіллем. Покажемо, що коли цілком інтегровну систему збурювати локально гамільтоновим векторним полем й одночасно деформувати симплектичну структуру, то в фазовому просторі можуть виникати коізотропні інваріантні тори, які несуть на собі ергодичні квазіперіодичні рухи.

Нехай $\left(M^{2n}, \omega_0^2\right)$ — $2n$-вимірний симплектичний многовид із симплектичною структурою ω_0^2, а $H_0 : M^{2n} \to \mathbb{R}$ — гамільтоніан інтегровної в сенсі Ліувілля системи. Нехай ця система зазнає збурень вигляду

$$dH_0 \mapsto dH_0 + \mu\omega^1, \quad \omega_0^2 \mapsto \omega_0^2 + \mu\omega_1^2,$$

де μ — малий параметр, а 1-форма ω^1 і 2-форма ω_1^2 є замкненими, але не точними. Подібну задачу, проте у випадку, коли ω^1 є точною, розглянуто в [20, 24].

3.1. Основні припущення. Нехай $\{F_i : M^{2n} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ — повний інволютивний набір перших інтегралів незбуреної системи. Розглянемо відображення $F = (F_1, \ldots, F_n) : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ і припустимо, що $c \in F(M^{2n})$ — таке некритичне значення, для якого $F^{-1}(c)$ містить зв'язну компоненту M_c. Тоді M_c є лагранжевим підмноговидом, дифеоморфним n-вимірному тору $\mathbb{T}^n$ [28]. Крім того, в $\mathbb{R}^n$ існує однозв'язна область $G \in F(M^{2n})$ значень c з указаною властивістю, а на множині $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{c \in G} M_c$ визначено симплектичну дію тора $\mathbb{T}^n$, яка задається абелевою групою симплектоморфізмів $\{\Phi^q : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, q \in \mathbb{T}^n\}$ і орбітами якої є многовиди $M_c \subset \mathcal{N}$.

Припустимо, що функція H_0 та 2-форма ω_1^2 задовольняють аналоги умов з [20]. Щоб їх охарактеризувати, обчислимо усереднену форму $\bar{\omega}_1^2 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} (\Phi^q)^* \omega_1^2 dq$, для кожного $a \in \mathbb{R}^n$ визначимо векторне поле $X_a(x) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi^{at}(x)$ і введемо кососиметричну білінійну форму $\mathcal{C}(a, b) = \bar{\omega}_1^2(X_a, X_b), a, b \in \mathbb{R}^n$. Нехай $\{\varsigma_1, \ldots, \varsigma_k\}$ — базис в $\ker \mathcal{C}$.

Припущення 1. *Білінійна форма* $\mathcal{C}$ *є виродженою:* $k := \dim\ker\mathcal{C} > 0$.

Припущення 2. *Існує таке* $\gamma_0 > 0$, *що* $\max_{j=1,\dots,k} |\mathbf{m} \cdot \varsigma_j| \geq \gamma_0 |\mathbf{m}|^{-n}$ *для кожного* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$.

Використавши теорему Дарбу – Вейнстейна, введемо в $\mathcal{N}$ координати прямого добутку $(p, q| \bmod 2\pi)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, типу „дія-кут", в яких 1-форма збуреної системи і матриця дужок Пуассона відповідно набирають вигляду

$$\omega_\mu = dH_0 + \mu\omega^1 = dH_0(p) + \mu(dH_1(p, q, \mu) + \beta \cdot dq),$$

$$\{p, p\} = \mu C, \quad \{q, p\} = E_n, \tag{17}$$

де β — сталий вектор, E_n — одинична матриця розміру $n \times n$, C — кососиметрична матриця форми $\mathcal{C}$ в координатах q, а саме $\mathcal{C}(a, b) = Ca \cdot b$ (умовимося тут і далі не виписувати елементи матриці дужки Пуассона, якщо вони дорівнюють нулю).

Припущення 3. *Для деяких додатних чисел* R_0, ρ_0, μ_0 *функції* H_0 *та* H_1 *— дійсно-аналітичні в областях* $\{p \in \mathbb{C}^n : |p| < R_0\}$ *і* $\{(p, q, \mu) \in \mathbb{C}^{2n+1} : |p| < R_0, |\operatorname{Im} q| < \rho_0, |\mu| < \mu_0\}$ *відповідно.*

Зменшуючи в разі потреби R_0, ρ_0, μ_0 і використовуючи нерівності Коші, без обмеження загальності міркувань можна вважати, що в зазначених областях функції H_0 та H_1 обмежені разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку.

Для того щоб уникнути руйнування інваріантних торів вже в першому наближенні теорії збурень, необхідно, щоб виконувалися ще два припущення, природність яких стає зрозумілою із наведених нижче міркувань.

Зауважимо, що оскільки $C\varsigma_j = 0$, $j = 1, \dots, k$, то функції $p \cdot \varsigma_i$, $i = 1, \dots, k$, утворюють повний набір функцій Казіміра пуассонової структури в $\mathbb{R}^n$, визначеної співвідношенням $\{f(p), g(p)\}_1 = f'(p) \cdot Cg'(p)$. Спільна поверхня рівня цих функцій являє собою $(n-k)$-вимірний афінний простір, який є симплектичним листком максимальної розмірності зазначеної пуассонової структури в $\mathbb{R}^n$. Базис $\{\varsigma_1, \dots, \varsigma_k\}$ підпростору $\ker C$ завжди можна доповнити векторами $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ до базису всього простору $\mathbb{R}^n$ так, щоб матриця, ij-елементом якої є $\{p \cdot \alpha_i, p \cdot \alpha_j\}_1 = \alpha_i \cdot C\alpha_j$, $i = 1, \dots, 2m$, збігалася з $I := \begin{pmatrix} 0_m & -E_m \\ E_m & 0_m \end{pmatrix}$.

Після введення координат

$$w_i = p \cdot \alpha_i, \quad z_j = p \cdot \varsigma_j$$

матриця дужок Пуассона (17) набирає вигляду

$$\{w, w\} = \mu I, \quad \{q, z\} = \Sigma, \quad \{q, w\} = A,$$

де матрицю Σ складено зі стовпців $\varsigma_1, \dots, \varsigma_k$, а матрицю A — з $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$.

Запишемо тепер рівняння, які описують еволюцію змінних w, z для гамільтонової системи першого наближення, породженої лінеаризованою в деякій точці (w_0, z_0) формою $d({H_0}'_w(w_0, z_0) \cdot w + {H_0}'_z(w_0, z_0) \cdot z) + \mu\beta \cdot dq$. Маємо

$$\dot{w} = \mu(I{H_0}'_w(w_0, z_0) - A^{\mathrm{T}}\beta), \quad \dot{z} = -\mu\Sigma^{\mathrm{T}}\beta. \tag{18}$$

Відсутність дрейфу за змінними z забезпечує така умова.

Припущення 4. *Вектор β є ортогональним до кожного вектора ς_j, $j = 1, \ldots, k$.*

З огляду на перше рівняння в (18) назвемо точку (w_0, z_0) *квазістаціонарною* (порівн. з [24]), якщо

$$H_0{}'_w(w_0, z_0) + IA^T\beta = 0.$$

Невиродженою квазістаціонарною точкою еліптичного типу назвемо таку квазістаціонарну точку, в якій матриця $IH_0{}''_{ww}(w_0, z_0)$ є невиродженою і має різні суто уявні власні числа.

Припущення 5. *Існує невироджена квазістаціонарна точка еліптичного типу (w_*, z_*).*

З теореми про неявну функцію випливає, що принаймні в околі (w_*, z_*) невироджені квазістаціонарні точки еліптичного типу утворюють k-вимірний многовид, який можна задати в координатах w, z параметричними рівняннями $w = w_0(\eta)$, $z = \eta$ з дійсно-аналітичною принаймні в околі z_* функцією $w_0(\eta)$, $w_0(z_*) = w_*$. При цьому матриця $IH_0{}''_{ww}(w_0(\eta), \eta)$ матиме різні суто уявні власні числа $\pm i\widetilde{\lambda}_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$.

Нехай $p = p_0(\eta)$ — рівняння многовиду квазістаціонарних точок, записане у початкових p-координатах. У подальшому будемо називати *квазістаціонарним многовидом* і множину $\mathcal{M}$, задану цим рівнянням в усьому $2n$-вимірному фазовому просторі. Зрозуміло, що вона являє собою k-параметричну сім'ю n-вимірних інваріантних торів незбуреної системи.

Як буде показано далі, аналогічно [24] проблема малих знаменників, яка виникає в процесі побудови квазіперіодичних рухів збуреної системи, має безпосередній зв'язок з теорією діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору. У зв'язку з цим нам доведеться накласти умови невиродженості Рюссмана [10] на функції $H_0'(p_0(\eta))$ та $\tilde{\lambda}_j(\eta)$.

Припущення 6. *Система $n + m$ функцій, утворена компонентами вектор-функції $H_0'(p_0(\eta))$ і функціями $\tilde{\lambda}_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$, лінійно незалежна в їхній спільній області визначення.*

3.2. Попередні перетворення. Для того щоб застосувати КАМ-теорію для встановлення існування квазіперіодичних рухів збуреної системи, цю систему потрібно звести до спеціального вигляду. Відповідна процедура значною мірою повторює методику, викладену в [24], тому в подальшому викладі будемо нехтувати деякими технічними деталями.

Спочатку виконаємо перетворення вигляду

$$p \mapsto p_0 + \sqrt{\mu}p - \mu S_1{}'_q(q, p_0),$$

де p_0 — n-вимірний параметр з областю зміни $\{|p_0| < R_1\}$, де $R_1 < R_0$, а $S_1(q, p_0)$ — функція, яка підлягає визначенню. Зауважимо, що вигляд локально гамільтонової системи не зміниться, якщо дужку Пуассона домножити на $\sqrt{\mu}$, а відповідну 1-форму — на $1/\sqrt{\mu}$. Тому можна вважати, що дужка Пуассона і 1-форма збуреної системи мають вигляд

$$\{p, p\} = \sqrt{\mu}C, \quad \{q, p\} = E_n,$$

$$\omega_\mu = d\left[H_0'\cdot p + \sqrt{\mu}\left(\frac{1}{2}H_0''p^2 + H_1(p_0,q,0) - H_0'\cdot {S_1}_q'(q,p_0)\right) + O(\mu)\right] + \sqrt{\mu}\beta\cdot dq,$$

де похідні функції H_0 беруться в точці p_0.

Нехай оператори $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_N$ визначено, як і при доведенні леми 1 (із заміною $\varphi \mapsto q$). Виберемо для заданого натурального l число $T = T(\rho_0, l) > 0$ досить великим так, щоб поклавши $N = T|\ln\varepsilon|$, де $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*)$, а $\varepsilon_* > 0$ — досить мале, одержати оцінку $|(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_N)H_1(p_0,q,0)| < \varepsilon^{l+1}$ при $|p_0| < R_1$, $|\mathrm{Im}q| < \rho_0/2$. Після цього визначимо функцію $S_1(q,p_0)$, як і в [24], тобто шляхом гладкого продовження на область $|\mathrm{Im}q| < \rho_0$, $|p_0| < R_1$ розв'язку гомологічного рівняння

$$H_0'(p_0)\cdot {S_1}_q' = [\mathcal{P}_N - \mathcal{P}_0]\, H_1(p_0,q,0),$$

побудованого спочатку в області N-нерезонансних значень p_0, які, за означенням, задовольняють нерівності

$$|p_0| < R_1, \quad \left|\mathbf{m}\cdot H_0'(p_0)\right| \geq \frac{\gamma}{2}|\mathbf{m}|^{-\tau} \quad \forall\, \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n,\ 0 < |\mathbf{m}| \leq N \tag{19}$$

(зауважимо, що продовжена функція S_1 задовольняє гомологічне рівняння лише для N-нерезонансних значень p_0). Після цього коефіцієнт при $\sqrt{\mu}$ в ω_μ для нерезонансних p_0 і $|\mathrm{Im}q| < \rho_0/2$ матиме вигляд $\frac{1}{2}H_0''p^2 + O(\varepsilon^{l+1})$.

Дотримуючись і далі схеми [24], розкладемо компоненту порядку $O(\mu)$ у формі ω_μ в ряд за степенями $\sqrt{\mu}$ і здійснимо процедуру симплектичного усереднення перших $2l$ його членів за змінними q в нерезонансній області параметрів p_0. Інфінітезимальна дійсно-аналітична твірна функція вигляду $\sum_{j=2}^{2l+1}\mu^{j/2}S_j(p,q,p_0)$ генерує симплектичні перетворення у вигляді збіжних в деякому околі $|\mu| < \mu_* \leq \mu_0$ степеневих рядів щодо $\mu^{1/2}$

$$p \mapsto p - \mu {S_2}_q' - \sum_{j=3}^{2l+1}\mu^{j/2}\left({S_j}_q' + P_j\right) + o(\mu^{l+1/2}),$$

$$q \mapsto q + \mu {S_2}_p' + \sum_{j=3}^{2l+1}\mu^{j/2}\left({S_j}_p' + Q_j\right) + o(\mu^{l+1/2})$$

(функції P_j, Q_j — це деякі поліноми від частинних похідних першого і вищих порядків функцій $S_2,\dots,S_{j-1}$). Коефіцієнт при $\mu^{j/2}$ під диференціалом у перетвореній формі матиме вигляд $F_{\varepsilon,j} - H_0'(p_0)\cdot {S_j}_q'$, де $F_{\varepsilon,j}$ — не залежні від S_k, $k \geq j$, дійсно-аналітичні функції змінних p, q, p_0. Якщо тепер функції $S_j(p,q,p_0)$, $j = 2,\dots,2l+1$, визначити за тим самим принципом, що й S_1, тобто з гомологічних рівнянь $H_0'(p_0)\cdot {S_j}_q' = [\mathcal{P}_N - \mathcal{P}_0]\, F_{\varepsilon,j}(p,q,p_0)$, а потім виконати заміну $p \mapsto \sqrt{\mu}p$ й перепозначити форму $\omega_\mu/\sqrt{\mu} \mapsto \omega_\mu$ та дужку Пуассона $\sqrt{\mu}\{\bullet,\bullet\} \mapsto \{\bullet,\bullet\}$, то дістанемо локально гамільтонову систему, породжену формою вигляду

$$\omega_\mu = d\left[H_0'\cdot p + \mu\left(\frac{1}{2}H_0''p^2 + {\bar{H}_1}{}_p'\cdot p\right) + \sum_{j=3}^{2l+1}\mu^{j/2}\bar{F}_{\varepsilon,j}(p,p_0) + f_\varepsilon(p,q,p_0,\sqrt{\mu})\right] + \beta\cdot dq$$

(похідні функцій H_0, $\bar{H}_1$ беруться в точці p_0), відносно дужки Пуассона, визначеної рівностями

$$\{p, p\} = C, \quad \{q, p\} = E_n.$$

Тут $\bar{H}_1(p) := \mathcal{P}_0 H_1(p, q, 0)$, функції $\bar{F}_{\varepsilon,j}$, $f_{\varepsilon,l}$ — гладкі в сенсі дійсного аналізу і рівномірно щодо $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*)$ обмежені в області

$$|p| < R_2, \quad |p_0| < R_1, \quad |\mathrm{Im}\, q| < \rho, \quad |\mu| < \mu_*, \tag{20}$$

де R_2 і $\rho \in (0, \rho_0/2)$ — деякі додатні числа. Крім того, в області, яка виділяється з (20) нерівностями (19), зазначені функції є дійсно-аналітичними, причому

$$|f_\varepsilon| < \mu^{l+1/2} + \varepsilon^{l+1/2} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_*).$$

Далі ми зосередимо свою увагу на формі $\hat{\omega}_\mu := \omega_\mu - dh_{\varepsilon,l}$, коефіцієнти якої не залежать від q. Після введення координат $w_i = p \cdot \alpha_i$, $z_j = p \cdot \varsigma_j$ (див. п. 3) дужка Пуассона і форма $\widehat{\omega}_\mu$ набирають відповідно вигляду

$$\{w, w\} = I, \quad \{q, z\} = \Sigma, \quad \{q, w\} = A,$$

$$\widehat{\omega}_\mu = d\Big[H_0{}'_w \cdot w + H_0{}'_z \cdot z + \mu\Big(\frac{1}{2} H_0{}''_{ww} w^2 + H_0{}''_{wz} wz + \frac{1}{2} H_0{}''_{zz} z^2 + \\ + \bar{H}_1{}'_w \cdot w + \bar{H}_1{}'_z \cdot z\Big) + O(\mu^{3/2})\Big] + \beta \cdot dq,$$

де всі похідні беруться в точці (w_0, z_0), яка відповідає точці p_0. Виконаємо тепер перетворення

$$w \mapsto w - \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} \left(H_0{}''_{wz} z + \bar{H}_1{}'_w\right),$$

після чого введемо нові кутові змінні ψ

$$\psi = q + \Big(\Sigma H_0{}''_{zw} \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} + A\Big)\, Iw.$$

У такий спосіб, врахувавши, що наслідком припущення 4 є рівність $\Sigma^{\mathrm{T}} \beta = 0$, зведемо дужку Пуассона і форму $\hat{\omega}_\mu$ відповідно до вигляду

$$\{w, w\} = I, \quad \{\psi, z\} = \Sigma, \quad \{\psi, \psi\} = B,$$

$$\widehat{\omega}_\mu = d\left[(H_0{}'_w + \beta_*) \cdot w + \Lambda \cdot z + \mu\left(\frac{1}{2} H_0{}''_{ww} w^2 + \Lambda_1 \cdot z + M z^2\right) + O(\mu^{3/2})\right] + \beta \cdot d\psi,$$

де

$$B = B(w_0, z_0) := -\left(\Sigma H_0{}''_{zw} [H_0{}''_{ww}]^{-1} I + AI\right) I \left(\Sigma H_0{}''_{zw} [H_0{}''_{ww}]^{-1} I + AI\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_* := I A^{\mathrm{T}} \beta, \quad \Lambda = \Lambda(w_0, z_0) := H_0{}'_z - H_0{}''_{zw} \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} H_0{}'_w,$$

а елементи вектора $\Lambda_1 = \Lambda_1(w_0, z_0)$ і матриці $M = M(w_0, z_0)$ також в явному вигляді виражаються через похідні функцій H_0, $\bar{H}_1$ в точці (w_0, z_0).

Починаючи з цього моменту, примусимо точку (w_0, z_0) пробігати многовид квазістаціонарних точок, тобто покладемо $w_0 = w_0(\eta)$, $z_0 = \eta$. Тоді $H_0{}'_w(w_0(\eta), \eta) + \beta_* \equiv 0$.

Відомо, що принаймні в деякому околі точки $\eta = z_*$ лінійним дійсно-аналітичним щодо η перетворенням $w \mapsto W(\eta)w$, яке до того ж є I-симплектичним, тобто $W^{\mathrm{T}}(\eta) I W(\eta) = I$, квадратичну форму $H_0{}''_{ww}(w_0(\eta), \eta)w^2$ можна звести до суми квадратів $\sum_{j=1}^{m} \tilde{\lambda}_j(\eta)(w_j^2 + w_{j+m}^2)$. Якщо тепер увести змінні $u = (u_1, \ldots, u_m)$ та $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)| \mod 2\pi$ за формулами

$$w_i = \sqrt{2(\xi_i + u_i)} \cos \phi_i, \quad w_{i+m} = \sqrt{2(\xi_i + u_i)} \sin \phi_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — m-вимірний параметр, то для дужок Пуассона матимемо співвідношення

$$\{\phi, u\} = E_m, \quad \{\psi, z\} = \Sigma, \quad \{\psi, \psi\} = B(\eta), \tag{21}$$

а 1-форма $\widehat{\omega}_\mu$ зведеться до вигляду

$$\widehat{\omega}_\mu = d\left[\Lambda(\eta) \cdot z + \mu\left(\tilde{\Lambda}(\eta) \cdot u + \Lambda_1(\eta) \cdot z + M(\eta) z^2\right) + O(\mu^{3/2})\right] + \beta \cdot d\psi,$$

де $\tilde{\Lambda}(\eta) := (\tilde{\lambda}_1(\eta), \ldots, \tilde{\lambda}_m(\eta))$, і залежність відповідних функцій від $(w_0(\eta), \eta)$ тепер скорочено позначається як залежність від η.

Далі проводимо процедуру симплектичного усереднення форми $\widehat{\omega}_\mu$ за змінними ϕ за допомогою інфінітезимальної твірної функції вигляду $\tilde{S} := \sum_{j=1}^{2l-1} \mu^{j/2} \tilde{S}_j(u, z, \phi, \vartheta)$, де $\vartheta = (\eta, \xi)$ — набір параметрів. Зауважимо, що оскільки функції $\tilde{S}_j$ не залежать від ψ, то перетворення, генеровані функцією $\tilde{S}$, не зачіпають координат z. Крім того, з

$$\{\tilde{S}_j, \beta \cdot \psi\} = -\tilde{S}_j{}'_z \cdot \Sigma^{\mathrm{T}} \beta = 0$$

випливає, що форма $\beta \cdot d\psi$ є інваріантною відносно цих перетворень. Таким чином, нам досить тепер описати процедуру усереднення за змінними ϕ функції вигляду $\tilde{\Lambda}(\eta) \cdot u + \sum_{j=1}^{2l-1} \mu^{j/2} \tilde{F}_j(u, z, \phi, \vartheta)$.

Легко бачити, що внаслідок зсуву за час $t = 1$ вздовж траєкторій векторного поля $\Im \tilde{S}$ координати u, ϕ зазнають перетворень вигляду

$$u \mapsto u - \mu^{1/2} \tilde{S}_1{}'_\phi - \sum_{j=2}^{2l-1} \mu^{j/2} (\tilde{S}_j{}'_\phi + \tilde{U}_j) + o(\mu^{l-1/2}),$$

$$\phi \mapsto \phi + \mu^{1/2} \tilde{S}_1{}'_u + \sum_{j=2}^{2l-1} \mu^{j/2} (\tilde{S}_j{}'_u + \tilde{\Phi}_j) + o(\mu^{l-1/2}),$$

де $\tilde{U}_j$, $\tilde{\Phi}_j$ — деякі поліноми від частинних похідних першого і вищих порядків функцій $\tilde{S}_2, \ldots, \tilde{S}_{j-1}$. Внаслідок цього гомологічне рівняння для визначення функції $\tilde{S}_j$ матиме вигляд

$$\tilde{\Lambda}(\eta) \cdot \tilde{S}'_{j\phi} = [\mathcal{P}_N - \mathcal{P}_0]\, G_{\varepsilon,j}(u,z,\phi,\vartheta),$$

де функція $G_{\varepsilon,j}$ не залежить від $\tilde{S}_k$, $k \geq j$. Визначимо функцію $\tilde{S}_j$ аналогічно S_j спочатку для η з N-нерезонансної множини, яка характеризується нерівностями

$$\left|\widetilde{\mathbf{m}} \cdot \widetilde{\Lambda}(\eta)\right| \geq \frac{\gamma}{2}|\widetilde{\mathbf{m}}|^{-\tau} \quad \forall\, \widetilde{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^m,\ 0 < |\widetilde{\mathbf{m}}| \leq N, \tag{22}$$

а потім, як і в [24], гладко продовжимо її в резонансну область.

Після описаної процедури усереднення форма ω_μ набирає вигляду

$$\begin{aligned}\omega_\mu = d\Bigg[&\Lambda(\eta)\cdot z + \mu\left(\tilde{\Lambda}(\eta)\cdot u + \Lambda_1(\eta)\cdot z + M(\eta)z^2 + \sum_{j=1}^{2l-1}\mu^{j/2}\overline{G}_{\varepsilon,j}(u,z,\vartheta)\right) + \\ &+ g_\varepsilon(u,z,\phi,\psi,\vartheta,\sqrt{\mu})\Bigg] + \beta\cdot d\psi,\end{aligned} \tag{23}$$

де функції $\overline{G}_{\varepsilon,j}$, g_ε є гладкими в сенсі дійсного аналізу й рівномірно щодо $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*)$ обмеженими разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку в області, яка задається умовами

$$|u| < \rho,\ |z| < \rho,\ |\operatorname{Im}\phi| < \rho,\ |\operatorname{Im}\psi| < \rho,\ \eta \in \mathcal{U} + \delta,\ \rho < |\xi| < R,\ |\mu| < \mu_*, \tag{24}$$

де ρ, δ і $R > \rho$ — деякі додатні числа, а $\mathcal{U}$ — деяка область в $\mathbb{R}^k = \operatorname{Re}\mathbb{C}^k$. Крім того, якщо параметри η обмежити на множину, яка виділяється з $\mathcal{U} + \delta$ нерівностями (19) при $p_0 = p_0(\eta)$, та нерівностями (22), то дістанемо область, в якій зазначені функції будуть дійсно-аналітичними і при цьому

$$|g_\varepsilon| < \mu^l + \varepsilon^l.$$

Тепер остаточно зведемо форму ω_μ до вигляду (1). Для довільного $d \geq 1$ виберемо натуральне $l > d + 2$ і покладемо $\varepsilon = \mu^d$. Тоді при всіх досить малих $\mu > 0$ буде виконуватися нерівність $\mu^l + \varepsilon^l < \mu^2\varepsilon$.

Виділимо в формі ω_μ лінійну щодо u, z частину і подамо її у вигляді

$$d\left[\mu\left(\tilde{\Lambda}(\eta) + \sum_{j=1}^{2l-1}\mu^{j/2}\tilde{\Lambda}_{\mu,j}(\vartheta)\right)\cdot u + \left(\Lambda(\eta) + \sum_{j=0}^{2l-1}\mu^{1+j/2}\Lambda_{\mu,j+1}(\vartheta)\right)\cdot z\right],$$

де $\tilde{\Lambda}_{\mu,j}(\vartheta) := \dfrac{\partial}{\partial u}\bar{G}_{\mu^d,j}(0,0,\vartheta), \Lambda_{\mu,j+1}(\vartheta) := \dfrac{\partial}{\partial z}\bar{G}_{\mu^d,j}(0,0,\vartheta)$ при $j = 1,\ldots,2l-1$, і $\Lambda_{\mu,1}(\vartheta) := \Lambda_1(\eta)$.

Нарешті, визначимо функцію

$$h_\mu(u,z,\phi,\psi,\vartheta) := \mu M(\eta)z^2 + \mu\sum_{j=1}^{2l-1}\mu^{j/2}\Big(\bar G_{\mu^d,j}(u,z,\vartheta) - \bar G_{\mu^d,j}(0,0,\vartheta) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial u}\bar G_{\mu^d,j}(0,0,\vartheta)\cdot u - \frac{\partial}{\partial z}\bar G_{\mu^d,j}(0,0,\vartheta)\cdot z\Big) + g_{\mu^d}(u,z,\phi,\psi,\vartheta,\sqrt{\mu}).$$

З наведених вище міркувань випливає така підготовча теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення 1 – 5. Тоді для деякого додатного числа* μ_* *і для будь-якого* $\mu \in (0;\mu_*)$ *в* $O(\mu)$*-околі квазістаціонарного многовиду існує відкрита множина, яка є об'єднанням* $(m+n)$*-вимірних коізотропних торів* $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\vartheta) = \mathcal{T}_\mu^{m}(\vartheta)\times\mathcal{T}_\mu^{n}(\vartheta)$, *занумерованих* $k+m$ *параметрами* $\vartheta = (\eta,\xi) \in \mathcal{W}_0$, *де* $\mathcal{W}_0 := \{\vartheta \in \mathbb{R}^{k+m} : \eta \in \mathcal{U},\ \rho < |\xi| < R\}$. *В околі кожного тора* $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\vartheta)$ *можна ввести гладко залежні від* ϑ *координати прямого добутку*

$$\{u\in\mathbb{R}^m\}\times\{z\in\mathbb{R}^k\}\times\{\phi\in\mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m\}\times\{\psi\in\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n\}$$

так, щоб цей тор задавався рівняннями $u=0$, $z=0$, *змінні* ϕ *і* ψ *були кутовими координатами відповідно на торах* $\mathcal{T}_\mu^{m}(\vartheta)$ *і* $\mathcal{T}_\mu^{n}(\vartheta)$, *дужка Пуассона визначалася рівностями (21), а форма* ω_μ *мала вигляд*

$$\omega_\mu = d\left[\mu\left(\tilde\Lambda(\eta) + \sum_{j=1}^{2l-1}\mu^{j/2}\tilde\Lambda_{\mu,j}(\vartheta)\right)\cdot u + \left(\Lambda(\eta) + \sum_{j=0}^{2l-1}\mu^{1+j/2}\Lambda_{\mu,j+1}(\vartheta)\right)\cdot z\right] +$$

$$+ h_\mu(u,z,\phi,\psi,\vartheta)) + \beta\cdot d\psi.$$

При цьому функції $B(\eta)$, $\tilde\Lambda(\eta)$ *і* $\Lambda(\eta)$ *є дійсно-аналітичними в області* $\mathcal{U}+\delta$, *функції* $\Lambda_{\mu,j+1}(\vartheta)$, $\tilde\Lambda_{\mu,j}(\vartheta)$, $j=1,\ldots,2l-1$, *та* $h_\mu(u,z,\phi,\psi,\vartheta)$ *— гладкими в сенсі дійсного аналізу й рівномірно щодо* $\mu\in(0;\mu_*)$ *обмеженими разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку в області (24). Крім того, якщо параметри* η *обмежити на множину, яка виділяється з* $\mathcal{U}+\delta$ *нерівностями (19), (22) при* $p_0 = p_0(\eta)$ *і* $N = N_\mu := T|\ln\mu^d|$, *то дістанемо область, в якій зазначені функції будуть дійсно-аналітичними і при цьому*

$$|h_\mu| < \mu^{2+d}.$$

На завершення цього пункту розглянемо локально гамільтонову систему, породжену лінеаризованою формою „першого наближення” $d\Big[\Lambda(\eta)\cdot z + \mu\tilde\Lambda(\eta)\cdot u\Big) + \beta\cdot d\psi$. Кожен тор $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\vartheta)$ є інваріантним для цієї системи, а рівняння руху на ньому в координатах ϕ, ψ мають вигляд

$$\dot\phi = \mu\tilde\Lambda(\eta), \quad \dot\psi = \Sigma\Lambda(\eta) + B(\eta)\beta.$$

Таким чином, маємо вироджений випадок, коли вектор частот лінеаризованої системи першого наближення має „повільні” $\mu\tilde\Lambda(\eta)$ і „швидкі” $\Sigma\Lambda(\eta)+B(\eta)\beta$ компоненти. Покажемо, що для останніх справджується рівність

$$H_0'(p_0(\eta)) = \Sigma\Lambda(\eta) + B(\eta)\beta. \tag{25}$$

Справді, з одного боку,

$$
\begin{aligned}
&H_0'(p_0(\eta)) = \{q, H_0'(p_0(\eta)) \cdot p\} = \\
&= \Big\{\psi - \Big(\Sigma H_0{}''_{zw} \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} + A\Big) Iw H_0{}'_w \cdot \Big(w - \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} (H_0{}''_{wz} z + \bar{H}_1{}'_w)\Big) + H_0{}'_z \cdot z\Big\} = \\
&= \Sigma\Lambda(\eta) + \Big(\Sigma H_0{}''_{zw} \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} + A\Big) H_0{}'_w.
\end{aligned}
$$

З іншого боку, враховуючи явний вигляд матриці B, умову ортогональності та означення многовиду квазістаціонарних точок, маємо

$$
B(\eta)\beta = -\Big(\Sigma H_0{}''_{zw} \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} + A\Big) I A^T \beta = \Big(\Sigma H_0{}''_{zw} \left[H_0{}''_{ww}\right]^{-1} + A\Big) H_0{}'_w.
$$

Порівнюючи одержані рівності, отримуємо потрібний результат.

3.3. Застосування КАМ-теореми. Якщо ввести $(m+k)$-вимірні вектори $y := (u, z)$ та

$$
\lambda_\mu(\vartheta) := \left(\mu\tilde{\Lambda}(\eta) + \mu \sum_{j=1}^{2l-1} \mu^{j/2} \tilde{\Lambda}_{\mu,j}(\vartheta),\ \Lambda(\eta) + \sum_{j=0}^{2l-1} \mu^{1+j/2} \Lambda_{\mu,j+1}(\vartheta)\right),
$$

а також $(m+n)$-вимірні вектори $\varphi := (\phi, \psi)$ та $\zeta = (0, \beta)$, то матимемо

$$
\omega_\mu = d(\lambda_\mu(\vartheta) \cdot y + h_\mu(y, \varphi, \vartheta)) + \zeta \cdot d\varphi,
$$

тобто форма ω_μ набере вигляду (1) з $\lambda_0 = \lambda_\mu$, $h = h_\mu$, $\zeta_0 = \zeta$, $\zeta_1 = 0$. Відповідні матриці дужок Пуассона в даному випадку матимуть вигляд

$$
\sigma = \begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & \Sigma \end{pmatrix}, \quad \chi(\eta) = \begin{pmatrix} 0_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & B(\eta) \end{pmatrix}.
$$

Для того щоб у цій ситуації застосувати теорему 1, потрібно визначити множину $\mathcal{V}$. Будемо вважати, що β — фіксований вектор, так що параметрами є ϑ і $\lambda \in \mathbb{R}^{m+k}$. Покладемо $r_\mu := \mu|\ln \mu^d|^{-\tau-1}$ і доведемо таку лему.

Лема 2. *Нехай* $f \in \mathrm{C}^1(\mathcal{U} + \delta \mapsto \mathbb{C}^n)$ *і* $|f'|_0 := \sup_{\eta \in \mathcal{U}+\rho} |f'(\eta)| < \infty$. *Покладемо*

$$
\mathcal{U}_\mu(\delta, \gamma) := \left\{\eta \in \mathcal{U} + \delta : |\mathbf{m} \cdot f(\eta)| \geq \gamma |\mathbf{m}|^{-\tau}\ \forall\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : 0 < |\mathbf{m}| \leq N_\mu\right\}.
$$

Тоді існує $\mu_* > 0$ *таке, що* $\mathcal{U}_\mu(0, \gamma) + r_\mu \subset \mathcal{U}_\mu(\delta, \gamma/2)$ *для всіх* $\mu \in (0; \mu_*)$.

Доведення. Виберемо $\mu_* > 0$ так, щоб $r_\mu < \delta$ і $\mu T^{\tau+1}|f'|_0 < \gamma/2$, Нехай $\eta \in \mathcal{U}_\mu(0,\gamma) + r_\mu$. Тоді знайдеться $\eta_0 \in \mathcal{U}_\mu(0, \gamma) \subset \mathcal{U}$ таке, що $|\eta - \eta_0| < r_\mu$. Тепер для довільного $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ такого, що $0 < |\mathbf{m}| \leq N_\mu$, маємо

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{m} \cdot f(\eta)| &\geq |\mathbf{m} \cdot f(\eta_0)| - |\mathbf{m} \cdot (f(\eta) - f(\eta_0)| \geq \gamma|\mathbf{m}|^{-\tau} - r_\mu |\mathbf{m}| |f'|_0 \geq \\
&\geq \gamma|\mathbf{m}|^{-\tau} - \mu T^{\tau+1} |f'|_0 N_\mu^{-\tau-1} |\mathbf{m}| \geq \left(\gamma - \mu T^{\tau+1}|f'|_0\right) |\mathbf{m}|^{-\tau} \geq \frac{\gamma}{2} |\mathbf{m}|^{-\tau}.
\end{aligned}
$$

Отже, $\eta \in \mathcal{U}_\mu(\delta, \gamma/2)$.

Лему 2 доведено.

З цієї леми випливає, що природно покласти $r_0 = r_\mu$ і ввести множину $\mathcal{V}_\mu$, яка складається з $\nu = (\lambda, \eta, \xi) \in \mathbb{R}^{2(m+k)}$, що задовольняють умови:

$$\begin{gathered} |\lambda| < R, \quad \eta \in \mathcal{U}, \quad \rho + r_\mu < |\xi| < R - r_\mu, \\ |\mathbf{m} \cdot H_0'(p_0(\eta))| \geq \gamma |\mathbf{m}|^{-\tau}, \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n, \quad 0 < |\mathbf{m}| \leq N_\mu, \\ |\widetilde{\mathbf{m}} \cdot \widetilde{\Lambda}(\eta)| \geq \gamma |\widetilde{\mathbf{m}}|^{-\tau}, \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^m, \quad 0 < |\widetilde{\mathbf{m}}| \leq N_\mu. \end{gathered} \tag{26}$$

Тепер очевидно, що функція h_μ в області

$$\Omega_\mu := \Big\{(y, \varphi, \nu) \in \mathbb{C}^{2k+3m+2n} : |y| < \rho, \ |\mathrm{Im}\, \varphi| < \rho, \ \nu \in \mathcal{V}_\mu + r_\mu\Big\}$$

задовольняє всі умови теореми 1.

Використавши цю теорему, опишемо побудову множини параметрів ϑ, кожній точці якої відповідає $(m + n)$-вимірний інваріантний тор гамільтонової системи, породженої формою ω_μ. Нехай $F(\varphi, \nu) = F_\mu(\varphi, \lambda, \vartheta)$ і $\Delta(\nu) = \Delta_\mu(\lambda, \vartheta)$ — відображення, побудовані згідно з теоремою 1. Відповідно до зауваження 1 для кожного натурального p і дійсного $k \geq 1$ можна вибрати числа l, d і $\mu_* > 0$ так, щоб

$$\max\{|F_\mu(\varphi, \lambda, \vartheta)|_p, |\Delta_\mu(\lambda, \vartheta)|_p\} \leq c(p, \varkappa) \mu^{bd+2-p} |\ln \mu^d|^{p(\tau+1)} \leq \mu^k \quad \forall\ \mu \in (0; \mu_*).$$

Тоді рівняння $\lambda + \mu\Delta_\mu(\lambda, \vartheta) = \lambda_\mu(\vartheta)$ можна розв'язати відносно λ і таким чином визначити гладку функцію вигляду $\lambda = \lambda_\mu(\vartheta) + \mu\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)$, де $|\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)|_p = O(\mu^k)$ при $\mu \to 0$.

Нарешті, визначимо множину $\mathcal{W}_\mu$, яка складається з тих ϑ, які задовольняють умови (26) і нерівності

$$\left|\mathbf{n} \cdot \left(\sigma\left(\lambda_\mu(\vartheta) + \mu\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)\right) + \chi(\eta)\zeta\right)\right| \geq \mu\gamma |\mathbf{n}|^{-\tau} \quad \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus \{0\}. \tag{27}$$

Зауважимо, що, поклавши $\mathbf{n} = (\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}})$, де $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, $\widetilde{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^m$, та взявши до уваги рівність (25), матимемо

$$\mathbf{n} \cdot \left(\sigma\left(\lambda_\mu(\vartheta) + \mu\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)\right) + \chi(\eta)\zeta\right) = \mathbf{m} \cdot \left(H_0'(p_0(\eta)) + O(\mu)\right) + \mu\widetilde{\mathbf{m}} \cdot \left(\widetilde{\Lambda}(\eta) + O(\mu^{1/2})\right).$$

Ця рівність показує, що основну роль при визначенні структури і метричних характеристик множини $\mathcal{W}_\mu$ відіграють дійсно-аналітичні в області $\mathcal{U} + \delta$ функції $H_0'(p_0(\eta))$ і $\widetilde{\Lambda}(\eta)$. З відомих результатів теорії діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору [9–11] та припущення 6 випливає така лема.

Лема 3. *Для кожного $\xi \in \mathbb{R}^m$ такого, що $\rho + r_\mu < |\xi| < R - r_\mu$, позначимо через $\mathcal{U}_{\mu,\xi}$ множину, утворену тими $\eta \in \mathcal{U}$, що задовольняють нерівності (26) та (27). Тоді при відповідному виборі числа τ справджується рівність*

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\mathrm{mes}\, \mathcal{U}_{\mu,\xi}}{\mathrm{mes}\, \mathcal{U}} = 1.$$

Тепер можна сформулювати підсумковий результат.

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення 1 – 6. Тоді при відповідному виборі числа $\tau > 0$ для довільного дійсного $k \geq 1$ існує таке $\mu_* > 0$, що для кожного $\mu \in (0; \mu_*)$ і кожного $\vartheta \in \mathcal{W}_\mu$ в μ^k-околі тора $\mathcal{T}_\mu^{m+n}$ існує $(m+n)$-вимірний інваріантний тор збуреної гамільтонової системи. Рухи на цьому торі є квазіперіодичними з вектором базисних частот $\sigma\left(\lambda_\mu(\vartheta) + \mu\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)\right) + \chi(\eta)\zeta$. При цьому*

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\operatorname{mes} \mathcal{W}_\mu}{\operatorname{mes} \mathcal{W}_0} = 1.$$

4. Висновки. В даній роботі доведено теорему про існування квазіперіодичних рухів на коізотропних інваріантних торах локально гамільтонових систем, близьких до інтегровних в узагальненому сенсі. Ця теорема охоплює так звані вироджені випадки, коли серед частот квазіперіодичних рухів є такі, що прямують до нуля разом з величиною збурення, і дозволяє уніфікувати аналіз різних ситуацій, які виникають в теорії збурень коізотропних інваріантних торів.

Показано, що аналогічно [8] інваріантні тори збуреної локально гамільтонової системи утворюють гладку в сенсі Вітні сім'ю. На відміну від глобально гамільтонового випадку для існування інваріантних торів як незбуреної, так і збуреної систем необхідно накладати умову ортогональності на 1-форму (багатозначний гамільтоніан) як незбуреної, так і збуреної систем. Ця умова означає, що гамільтонове векторне поле, породжене 1-формою, одержаною шляхом усереднення відповідної (незбуреної або збуреної) 1-форми вздовж незбурених інваріантних торів, повинно дотикатися кожного з цих торів.

Доведена теорема дозволила довести існування тривимірних коізотропних інваріантних торів у чотиривимірному фазовому просторі лагранжевої системи з багатозначним лагранжіаном, яка описує рух електрона на двовимірному торі $\mathbb{T}^2$ під впливом електромагнітного поля. Раніше О. І. Богоявленським в [25] було показано, що фазовий простір зазначеної системи розшаровується тривимірними інваріантними торами лише в граничному випадку, одержаному після спрямування до нуля відношення меншого до більшого радіуса тороїдальної камери. Важливо підкреслити, що проблему існування інваріантних торів в ситуації, коли зазначене відношення радіусів є досить малим, але не нульовим, нами зведено до виродженого випадку КАМ-теорії в його коізотропному і локально гамільтоновому варіанті.

З аналогічним варіантом виродженого випадку КАМ-теорії ми зустрічаємося і при дослідженні околу квазістаціонарного многовиду гамільтонової системи, одержаної внаслідок одночасної деформації симплектичної структури і збурення локально гамільтоновим векторним полем системи, інтегровної за Ліувіллем. У цій ситуації встановлено, що в процесі переходу параметра збурення μ через нульове значення від квазістаціонарного многовиду відгалужується канторова множина коізотропних інваріантних торів. Ця множина майже повністю (в сенсі міри Лебега) заповнює деяку відкриту область, розташовану в $O(\mu)$-околі зазначеного квазістаціонарного многовиду.

1. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. — 1954. — **98**, № 4. — С. 527 – 530.

2. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. — 1963. — **18**, вып. 5. — С. 13 – 40.

3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Там же. — 1963. — **18**, вып. 6. — С. 91 – 192.

4. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод и нелинейные дифференциальные уравнения // Там же. — 1968. — **23**, вып. 4. — С. 179 – 238.

5. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических движениях в задачах нелинейной механики // Тр. Первой летней математической школы. — Киев: Наук. думка, 1964. — С. 11 – 101.

6. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды // Успехи мат. наук. — 1969. — **24**, вып. 2. — С. 165 – 217.

7. *Боголюбов Н. Н., Митропольський Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1969.

8. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Communs Pure and Appl. Math. — 1982. — **35**, № 5. — P. 653 – 695.

9. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order admits chaos // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer, 1997. — **1645**. — 195 p.

10. *Rüssmann H.* Non-degeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems // London Math. Soc. Lect. Note Ser. — 1989. — № 134. — P. 15 – 18.

11. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М: Эдиториал УРСС, 2002. — 416 с.

12. *Sevryuk M. B.* The classical KAM theory at the dawn of the twenty-first century // Moscow Math. J. — 2003. — **3**, № 3. — P. 1113 – 1144.

13. *Де ла Яве Р.* Введение в КАМ-теорию. — Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 176 с.

14. *Парасюк И. О.* О сохранении многомерных инвариантных торов гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 4. — С. 467 – 473.

15. *Парасюк И.О.* Коизотропные инвариантные торы локально гамильтоновых систем // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 129 – 133.

16. *Парасюк И. О.* О сохранении коизотропных инвариантных торов локально гамильтоновых систем // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. — С. 150 – 154.

17. *Парасюк И. О.* Коизотропные инвариантные торы гамильтоновых систем квазиклассической теории движения электрона проводимости // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 3. — С. 346 – 351.

18. *Herman M.-R.* Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies // C. r. Acad. sci. Sér. I. Math. — 1991. — **312**, № 13. — P. 989 – 994.

19. *Herman M.-R.* Différentiabilité en contre-exemples á la fermeture en topologie C^∞ des orbites récurrentes de flots hamiltoniens // Ibid. — **313**, № 1. — P. 49 – 51.

20. *Парасюк І. О.* Біфуркація канторової множини коізотропних інваріантних торів гамільтонових систем при збуренні симплектичної структури // Нелінійні коливання. — 1998. — **1**, № 2. — С. 81 – 89.

21. *Парасюк І. О.* Збурення вироджених коізотропних інваріантних торів гамільтонових систем // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 1. — С. 72 – 85.

22. *Cong F., Li Y.* Existence of higher-dimensional invariant tori for Hamiltonian systems // J. Math. Anal. and Appl. — 1998. — **222**, № 1. — P. 255 – 267.

23. *Кубічка А. А., Парасюк І. О.* Диференційовна за Вітні сім'я коізотропних інваріантних торів гамільтонової системи, близької до виродженої // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика. Механіка. — 2000. — Вип. 4. — С. 20 – 29.

24. *Кубічка А. А., Парасюк І. О.* Біфуркація гладкої у сенсі Вітні сім'ї коізотропних інваріантних торів гамільтонової системи при малій деформації симплектичної структури // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 5. — С. 610 – 624.

25. *Bogoyavlenskij O. I.* Extended integrability and Bi-hamiltonian systems // Communs Math. Phys. — 1998. — **196**. — P. 19 – 51.

26. *Alfven H., Avez A.* Cosmical electrodynamics. Fundamental principles. — Oxford: Clarendon Press, 1963.

27. *Clemow P.C., Dougherty J.P.* Electrodynamics of particles and plasmas. — Reading: Addison-Wesley, 1969.

28. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.

Одержано 13.09.2005