УДК 517.9

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ*

А. М. Самойленко, Н. З. Дільна, А. М. Ронто

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: dilna@imath.kiev.ua
ar@imath.kiev.ua

We find sufficient conditions for the initial-value problem for a linear integral-differential equation to have a unique solution.

Отримано умови, достатні для однозначної розв'язності початкової задачі для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

Метою даної роботи є отримання умов, за яких система лінійних інтегро-диференціальних рівнянь

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_a^b H_j(t,s)u(\omega_j(t,s))ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

має єдиний абсолютно неперервний розв'язок $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, що задовольняє початкову умову

$$u(\tau) = c. \tag{2}$$

Тут $-\infty < a < b < +\infty$; $N \in \mathbb{N}$; $H_j : [a,b] \times [a,b] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $j = 1,2,\ldots,N$, — матричнозначні функції, всі компоненти яких належать до $L_1([a,b] \times [a,b], \mathbb{R})$; $n \in \mathbb{N}$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — інтегровна, а $\omega_j : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$, $j = 1,2,\ldots,N$, — вимірні функції; $c \in \mathbb{R}^n$; τ — задана точка з проміжку $[a,b]$. Під розв'язком задачі (1), (2), як прийнято у сучасній теорії функціонально-диференціальних рівнянь [1], розуміємо вектор-функцію $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ з абсолютно неперервними компонентами, що має властивість (2) та задовольняє рівність (1) при майже всіх t з $[a,b]$.

Зазначимо, що без додаткових припущень щодо коефіцієнтів рівняння та відхилень аргументу твердження про однозначну розв'язність лінійної початкової задачі (1), (2) не має місця навіть серед скалярних рівнянь вигляду (1). Наприклад, найпростіша однорідна початкова задача

$$u'(t) = \lambda u(1), \quad t \in [0,1], \tag{3}$$

* Частково підтримано грантами INTAS № 04-83-3968 і Президента України № F 8/331/2005 (А. М. Ронто) та грантом Президії НАН України № 0105U005666 (Н. З. Дільна).

$$u(0) = 0, \tag{4}$$

яку, очевидно, можна записати у вигляді (1), (2) при $n = 1$, $N = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $f \equiv \equiv 0$, $H_1 \equiv \lambda, \omega_1 \equiv 1$, не має нетривіального розв'язку при жодному $\lambda \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, але має безліч таких розв'язків при $\lambda = 1$.

1. Позначення. Скрізь у цій роботі $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ — алгебра n-вимірних квадратних матриць з дійсними елементами; $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахів простір неперервних вектор-функцій $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, норма в якому задана формулою

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto \max_{1 \le k \le n} \max_{s \in [a,b]} |u_k(s)| \,;$$

$L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахів простір інтегровних за Лебегом вектор-функцій $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ з нормою

$$L_1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto \max_{1 \le k \le n} \int\limits_a^b |u_k(s)| \, ds;$$

$L_1([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$ — банахів простір інтегровних за Лебегом функцій $u : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ зі стандартною нормою.

2. Початкова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь. Справедливим є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай існують такі сталі* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$, *що кожна з матричнозначних функцій* $H_j : [a, b] \times [a, b] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *задовольняє умову*

$$\Sigma H_j(t, s) \Sigma \mathrm{sign}\,(t - \tau) \ge 0 \quad \textit{для майже всіх} \quad t \quad \textit{та} \quad s \quad \textit{з} \quad [a, b], \tag{5}$$

де

$$\Sigma := \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \tag{6}$$

Крім цього, припустимо, що при деяких сталих $q \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, 1)$ *та векторі* d *із властивістю*

$$\sigma_\nu d_\nu > 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

для майже всіх t *з проміжку* $[a, b]$ *виконується нерівність*

$$\Sigma \sum_{j=1}^{N} \int\limits_a^b H_j(t, s) |\omega_j(t, s) - \tau|^q \, ds \,\mathrm{sign}(t - \tau) d \le \gamma q \, |t - \tau|^{q-1} \, \Sigma d. \tag{8}$$

Тоді однорідна задача Коші

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_a^b H_j(t,s)\, u(\omega_j(t,s))\, ds, \quad t \in [a,b], \tag{9}$$

$$u(\tau) = 0, \tag{10}$$

матиме лише тривіальний розв'язок, а відповідна неоднорідна задача (1), (2) однозначно розв'язна при довільних $f \in L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ *і* $c \in \mathbb{R}^n$. *Крім того, розв'язок задачі (1), (2) можна подати у вигляді рівномірно збіжного на* $[a,b]$ *функціонального ряду*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{[k]}(t), \quad t \in [a,b], \tag{11}$$

де, за означенням,

$$f^{[k]}(t) := \sum_{j=1}^{N} \int_\tau^t \left(\int_a^b H_j(\xi,s) f^{[k-1]}(\omega_j(\xi,s)) ds \right) d\xi, \quad k = 1,2,\ldots,$$

і

$$f^{[0]}(t) := c + \int_\tau^t f(s) ds. \tag{12}$$

Більш того, зі справедливості для f *і* c *умови*

$$\sigma_\nu \int_\tau^t f_\nu(s)\, ds \geq -\sigma_\nu c_\nu \quad \textit{для всіх} \quad t \in [a,b], \quad \nu = 1,2,\ldots,n, \tag{13}$$

випливає, що єдиний розв'язок (11) задачі (1), (2) задовольняє нерівність

$$\sigma_\nu u_\nu(t) \geq 0, \quad \nu = 1,2,\ldots,n. \tag{14}$$

Зауваження 1. Знак нерівності у (5), (8) та в усіх інших співвідношеннях між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно.

Зауваження 2. Той факт, що припущення (13) забезпечує властивість (14) єдиного розв'язку задачі (1), (2), природно називати монотонною залежністю розв'язку від адитивних збурень рівняння та початкової умови. Співвідношення (13) виконується, зокрема, у випадку, коли $\sigma_k c_k \geq 0$ та $\sigma_k f_k(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0$ для кожного $k = 1,2,\ldots,n$ та майже всіх t з $[a,b]$.

Зауваження 3. Із зауважень 6 та 7 п. 4 випливає, що умова $0 \le \gamma < 1$ щодо константи γ, яка фігурує в нерівності (8), є суттєвою, і замість неї не можна припускати, що $0 \le \gamma \le 1$.

Перед доведенням наведеного твердження сформулюємо означення і встановимо лему.

Означення 1. *Оператор $l = (l_\nu)_{\nu=1}^n : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ назвемо $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивним, якщо зі справедливості для $u = (u_\nu)_{\nu=1}^n \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ умови*

$$\sigma_\nu u_\nu(t) \ge 0 \quad \textit{при всіх} \quad t \in [a,b], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

випливає, що при майже всіх t із $[a,b]$ та всіх $\nu = 1, 2, \ldots, n$ має місце нерівність

$$\sigma_\nu (l_\nu u)(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \ge 0.$$

Тут $l_k : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — компоненти оператора $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, тобто

$$lu = \operatorname{col}(l_1 u, l_2 u, \ldots, l_n u)$$

для кожного u з $C([a,b],\mathbb{R}^n)$. Зауважимо, що кожний лінійний оператор $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, який при деяких $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ має властивість $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивності, є обмеженим (див., наприклад, зауваження 1 в [2]).

Лема 1. *Якщо кожна з функцій $H_j : [a,b] \times [a,b] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, \ldots, N$, задовольняє нерівність (5), то при довільних вимірних функціях $\omega_j : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$, $j = 1, 2, \ldots, N$, лінійний оператор*

$$C([a,b],\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto (lu)(\cdot) := \sum_{j=1}^N \int_a^b H_j(\cdot, s) u(\omega_j(\cdot, s))\, ds \tag{16}$$

є $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивним у сенсі означення 1.

Доведення. Припустимо, що всі компоненти $(u_\nu)_{\nu=1}^n$ вектор-функції $u \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ задовольняють умову (14). Оскільки $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$, з (16) випливає тотожність

$$\Sigma(lu)(t) \operatorname{sign}(t - \tau) = \Sigma \sum_{j=1}^N \int_a^b H_j(t,s) u(\omega_j(t,s))\, ds \operatorname{sign}(t - \tau) =$$

$$= \Sigma \sum_{j=1}^N \int_a^b H_j(t,s) \Sigma\Sigma u(\omega_j(t,s)) ds \operatorname{sign}(t - \tau), \quad t \in [a,b]. \tag{17}$$

На підставі (14) маємо $\Sigma u(t) \ge 0$ при всіх $t \in [a,b]$, і, отже, беручи до уваги припущення (5), з (17) одержуємо, що при майже всіх $t \in [a,b]$

$$\Sigma \sum_{j=1}^{N} \int_a^b H_j(t,s) u(\omega_j(t,s)) ds \, \mathrm{sign}(t-\tau) \ge 0,$$

тобто оператор l, заданий формулою (16), є $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивним.

Лему доведено.

Зауваження 4. Умова аналогу леми 1, який використовується в деяких твердженнях з [3–6], що стосуються систем із перетвореним аргументом, містить неточність. Так, замість нерівності (33) в [4] слід припускати, що при майже всіх t та всіх ν виконується співвідношення, яке в наших позначеннях має вигляд

$$\Sigma P_\nu(t) \Sigma \mathrm{sign}\,(t-\tau) \ge 0,$$

де Σ — означена вище діагональна матриця (6). Решта умов та викладок у згаданих роботах при цьому залишаються без змін.

Для доведення теореми 1 нам знадобиться наступний результат (див. [4], наслідок 3).

Твердження 1. *Нехай* $l : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$ — $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-*позитивний лінійний оператор. Припустимо, що знайдуться абсолютно неперервна функція* $y_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *з властивостями*

$$y_0(\tau) = 0 \tag{18}$$

і

$$\Sigma y_0(t) > 0, \quad t \in [a,b] \setminus \{\tau\}, \tag{19}$$

а також натуральне m *та дійсне* ϱ, $\varrho > 1$, *такі, що для майже всіх* t *з проміжку* $[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\Sigma \left[y_0'(t) - \varrho \left(l y_{m-1} \right)(t) \right] \, \mathrm{sign}\,(t-\tau) \ge 0, \tag{20}$$

де, за означенням,

$$y_k(t) := \int_\tau^t (l y_{k-1})(s) \, ds, \quad t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{21}$$

Тоді неоднорідна задача Коші (2) для рівняння

$$u'(t) = (lu)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{22}$$

є однозначно розв'язною при довільних $c \in \mathbb{R}^n$ *та* $f \in L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$, *причому її розв'язок подається у вигляді рівномірно збіжного ряду*

$$u(t) = f^{[0]}(t) + \int_\tau^t (l f^{[0]})(s) \, ds + \int_\tau^t l \left(\int_\tau^{\cdot} (l f^{[0]})(\xi) d\xi \right)(s) \, ds + \ldots, \quad t \in [a,b], \tag{23}$$

де $f^{[0]}$ *визначено формулою (12). Крім цього, якщо* f *і* c *задовольняють умову (13), то єдиний розв'язок (23) задачі (22), (2) має властивість (14).*

Доведення теореми 1. Згідно з лемою 1, умова (5) забезпечує $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивність оператора (16), яким визначається рівняння (1). Припущення (8) забезпечує виконання умови (20) твердження 1, якщо в останньому означити оператор $l : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \to L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$ формулою (16), покласти $m = 1$, $\varrho = \gamma^{-1}$ (очевидно, можна вважати, що стала γ в умові (8) відмінна від нуля) та визначити функцію $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ за формулою

$$y_0(t) := |t - \tau|^q d, \quad t \in [a, b], \tag{24}$$

де d — вектор, що фігурує в умові теореми. При цьому, як видно з (24),

$$y_0'(t) = q|t - \tau|^{q-1} \mathrm{sign}(t - \tau)\, d, \quad t \in [a, b]. \tag{25}$$

Вектор d, за припущенням, має властивість (7), і тому функція (24) задовольняє умову (19). Отже, застосовуючи твердження 1, встановлюємо, що неоднорідна задача (1), (2), для всіх $f \in L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$ та $c \in \mathbb{R}^n$ має єдиний розв'язок u, причому зі співвідношення (13) випливає властивість (14) цього розв'язку. Рівність (11), очевидно, випливає з (23).

Теорему 1 доведено.

3. Умови розв'язності задачі Коші для скалярних інтегро-диференціальних рівнянь. Сформулюємо деякі умови розв'язності початкової задачі (1), (2) для випадку, коли (1) є одновимірним лінійним інтегро-диференціальним рівнянням вигляду

$$u'(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b h_\nu(t, s)\, u(\omega_\nu(t, s))\, ds + f(t), \quad t \in [a, b]. \tag{26}$$

Тут $-\infty < a < b < +\infty$; $N \in \mathbb{N}$; $f \in L_1([a, b], \mathbb{R})$; функції $\omega_\nu : [a, b]^2 \to [a, b]$ — вимірні, а $h_\nu : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$ — інтегровні на $[a, b]^2$.

Теорема 2. *Припустимо, що кожна з функцій $h_\nu : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}^1$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, у рівнянні (26) задовольняє умову*

$$h_\nu(t, s)\, \mathrm{sign}\,(t - \tau) \geq 0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in [a, b] \quad \text{та} \quad s \in [a, b] \tag{27}$$

і, крім цього, при деякому $q \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\operatorname{ess} \sup_{t \in [a,b] \setminus \{\tau\}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b \frac{|h_j(t, \eta)|}{|t - \tau|^{q-1}} \int_\tau^{\omega_j(t,\eta)} \int_a^b h_\nu(\xi, s) |\omega_\nu(\xi, s) - \tau|^q\, ds\, d\xi\, d\eta < q. \tag{28}$$

Тоді задача Коші (26), (2) має єдиний розв'язок для довільних $f \in L_1([a, b], \mathbb{R})$ та $c \in \in \mathbb{R}$. Крім того, якщо

$$\int_\tau^t f(s)\, ds \geq -c \quad \text{для всіх} \quad t \in [a, b], \tag{29}$$

то єдиний розв'язок задачі (26), (2) є невід'ємним.

Доведення. Покладемо в твердженні 1 $n = 1$, $m = 2$, означимо оператор $l : C([a, b], \mathbb{R}) \to L_1([a, b], \mathbb{R})$ формулою

$$C([a,b],\mathbb{R}) \ni u \longmapsto lu := \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu(\cdot)\, u(\omega_\nu(\cdot)) \tag{30}$$

та розглянемо абсолютно неперервну функцію

$$y_0(t) := |t-\tau|^q, \quad t \in [a,b]. \tag{31}$$

Функція (31), очевидно, задовольняє умови (18) і (19) з $\Sigma = \sigma_1 = 1$. Крім того, з (30) та (31) видно, що в даному випадку для функції y_1, означеної формулою (21) при $k = 1$, мають місце рівності

$$y_1(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \int_\tau^t \int_a^b h_\nu(\xi,s)\ |\omega_\nu(\xi,s)-\tau|^q\ ds\, d\xi \tag{32}$$

та

$$\begin{aligned}(ly_1)(t) &= \sum_{j=1}^{N} \int_a^b h_j(t,\eta)\, y_1(\omega_j(t,\eta))\, d\eta = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_a^b h_j(t,\eta) \left[\sum_{\nu=1}^{N} \int_\tau^{\omega_j(t,\eta)} h_\nu(\xi,s)\, |\omega_\nu(\xi,s)-\tau|^q ds\, d\xi\right] d\eta\end{aligned} \tag{33}$$

відповідно при всіх та майже всіх t з $[a, b]$.

Припущення (28) гарантує існування такої сталої $\gamma \in [0, 1)$, що при майже всіх $t \in [a, b]$ справджується співвідношення

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b |h_j(t,\eta)| \int_\tau^{\omega_j(t,\eta)} \int_a^b h_\nu(\xi,s)\, |\omega_\nu(\xi,s)-\tau|^q\, ds\, d\xi\, d\eta \le \gamma q |t-\tau|^{q-1},$$

яке внаслідок (27) рівносильне нерівності

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b h_j(t,\eta) \operatorname{sign}(t-\tau) \int_\tau^{\omega_j(t,\eta)} \int_a^b h_\nu(\xi,s)\, |\omega_\nu(\xi,s)-\tau|^q\, ds\, d\xi\, d\eta \le \gamma q |t-\tau|^{q-1}. \tag{34}$$

Тому з огляду на (32), (33) маємо

$$(ly_1)\,(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \le \gamma q\, |t-\tau|^{q-1} \tag{35}$$

при майже всіх $t \in [a,b]$. Оскільки похідна функції (31) обчислюється за формулою (25) з $d = 1$, співвідношення (35) означає, що

$$\left[\gamma\, y_0'(t) - (ly_1)\,(t)\right] \operatorname{sign}\,(t-\tau) \geq 0 \tag{36}$$

при майже всіх t з $[a,b]$, тобто має місце (20) з $\Sigma = 1$ та $\varrho = \gamma^{-1}$ (очевидно, достатньо припускати, що $0 < \gamma < 1$, оскільки при $\gamma = 0$ властивість (34) гарантує виконання умови (20) для довільного $\varrho > 1$).

Нарешті, на підставі леми 1 умова (27) забезпечує $(1;\tau)$-позитивність оператора (30), яким визначається рівняння (26). Отже, для отримання потрібного результату достатньо скористатись твердженням 1.

Теорему 2 доведено.

4. Початкова задача для скалярного рівняння з одним відхиленням аргументу. Наведемо умови існування і єдиності розв'язку неоднорідної задачі Коші (2) для скалярного інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$u'(t) = \int\limits_a^b h(t,s)\, u(\omega(t,s))\, ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{37}$$

в якому $\omega : [a,b]^2 \to [a,b]$ — вимірна, а $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ та $h : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ — інтегровні функції.

Наслідок 1. *Припустимо, що функція $h : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ у рівнянні (37) задовольняє умову*

$$h(t,s)\operatorname{sign}\,(t-\tau) \geq 0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \quad \text{та} \quad s \quad \text{з} \quad [a,b] \tag{38}$$

та, крім цього, при деякому $q \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} |t-\tau|^{-q+1} \int\limits_a^b |h(t,\eta)| \int\limits_\tau^{\omega(t,\eta)} \int\limits_a^b h(\xi,s)\, |\omega(\xi,s)-\tau|\, ds\, d\xi\, d\eta < q. \tag{39}$$

Тоді задача Коші (37), (2) є однозначно розв'язною для довільних $f \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ та $c \in \mathbb{R}$. Крім того, якщо f та c задовольняють умову (29), то єдиний розв'язок задачі (37), (2) є невід'ємним.

Для доведення наслідку 1 достатньо покласти $N = 1$, $h_1 = h$, $\omega_1 = \omega$ та скористатися теоремою 2. З наслідку 1, зокрема, випливає, що твердження про однозначну розв'язність задачі (37), (2) та монотонну залежність її розв'язку від адитивних збурень рівняння та початкової умови мають місце, зокрема, при виконанні припущення (38) та нерівності

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |h(t,\eta)| \int\limits_\tau^{\omega(t,\eta)} \int\limits_a^b h(\xi,s)\, |\omega(\xi,s)-\tau|\, ds\, d\xi\, d\eta < 1. \tag{40}$$

Зауваження 5. Замість нерівності (40) не можна припускати виконання відповідної нестрогої нерівності

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |h(t,\eta)| \int\limits_\tau^{\omega(t,\eta)} \int\limits_a^b h(\xi,s)\,|\omega(\xi,s)-\tau|\,ds\,d\xi\,d\eta \le 1, \tag{41}$$

оскільки умова (41), на відміну від (40), не гарантує однозначної розв'язності задачі (37), (2) при довільних $f \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ і $c \in \mathbb{R}$. Наприклад, однорідна початкова задача (4) для скалярного рівняння (3) при $\lambda = 1$, тобто рівняння

$$u'(t) = u(1), \quad t \in [0,1], \tag{42}$$

має однопараметричну сім'ю розв'язків $u(t) = \xi t$, $t \in [0,1]$, $\xi \in (-\infty,\infty)$, однак умова (41) в цьому випадку виконується у вигляді рівності.

Із зауваження 5 очевидно, що і умову (39) в наслідку 1 не можна послабити до нестрогої нерівності

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} |t-\tau|^{-q+1} \int_a^b |h(t,\eta)| \int\limits_\tau^{\omega(t,\eta)} \int\limits_a^b h(\xi,s)\,|\omega(\xi,s)-\tau|\,ds\,d\xi\,d\eta \le q.$$

Теорема 3. *Нехай функція $h : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ у рівнянні (37) задовольняє умову (38) і, крім цього, існують такі сталі $\gamma \in (0,1)$, $\beta \in [0,+\infty)$ та $q \in \mathbb{N}$, для яких при майже всіх t з $[a,b]$ виконується нерівність*

$$\int\limits_a^b |h(t,\eta)| \left[\frac{\beta}{\gamma} \int\limits_\tau^{\omega(t,\eta)} \int\limits_a^b h(\xi,s)\,|\omega(\xi,s)-\tau|^q\,ds\,d\xi + \right.$$
$$\left. + (1-\beta)\,|\omega(t,\eta)-\tau|^q \right] d\eta \le \gamma q |t-\tau|^{q-1}. \tag{43}$$

Тоді задача Коші (37), (2) є однозначно розв'язною для довільних $f \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ та $c \in \mathbb{R}$, а її розв'язок подається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$u(t) = c + \int\limits_\tau^t f(s_0)\,ds_0 + \int\limits_a^b h(t,s_1) \left(c + \int\limits_\tau^{\omega(t,s_1)} f(s_0)\,ds_0 \right) ds_1 + \ldots, \quad t \in [a,b]. \tag{44}$$

Крім того, якщо f та c задовольняють умову (29), то єдиний розв'язок задачі (37), (2) є невід'ємним.

Доведення сформульованої теореми спирається на наступне твердження (див. [4], наслідок 2).

Твердження 2. *Нехай* $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ — $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;\tau)$-*позитивний лінійний оператор. Припустимо, що знайдуться такі абсолютно неперервна функція* $y_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *з властивостями (18), (19) та константи* $m \in \mathbb{N}$, $\varrho \in (1,+\infty)$ *і* $\beta \in [0,+\infty)$, *при яких для майже всіх* t *з проміжку* $[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\Sigma \left[\varrho^{-m} y_0'(t) + (\beta-1)(ly_{m-1})(t) - \varrho\beta(ly_m)(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0. \tag{45}$$

Тоді щодо задачі (22), (2) має місце твердження 1.

Доведення теореми 3. Скористаймось твердженням 2, в якому покладемо $m = 1$ та означимо функцію y_0 за формулою (31). Очевидно, що функція (31) абсолютно неперервна та задовольняє умови (18), (19).

Визначимо лінійний оператор $l : C([a,b],\mathbb{R}) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$ формулою

$$C([a,b],\mathbb{R}) \ni u \longmapsto lu := \int_a^b h(\cdot,s)u(\omega(\cdot,s))\,ds. \tag{46}$$

З огляду на (21), (31) та (46) мають місце рівності

$$y_1(t) = \int_\tau^t \int_a^b h(\xi,s)\ |\omega(\xi,s)-\tau|^q\ ds\,d\xi \tag{47}$$

та

$$(ly_1)(t) = \int_a^b h(t,\eta)\,y_1(\omega(t,\eta))\,d\eta =$$

$$= \int_a^b h(t,\eta) \int_\tau^{\omega(t,\eta)} \int_a^b h(\xi,s)\ |\omega(\xi,s)-\tau|^q\ ds\,d\xi d\eta, \tag{48}$$

відповідно при всіх та майже всіх $t \in [a,b]$.

Оскільки y_0' обчислюється за формулою (25) при $d = 1$, з припущення (43) та рівностей (47), (48) для майже всіх t з $[a,b]$ дістаємо

$$\gamma q\,|t-\tau|^{q-1} \geq \left[\frac{\beta}{\gamma}\int_a^b h(t,\eta) \int_\tau^{\omega(t,\eta)} \int_a^b h(\xi,s)\ |\omega(\xi,s)-\tau|^q\,ds\,d\xi\,d\eta - \right.$$

$$\left. - (\beta-1)\int_a^b h(t,\eta)\ |\omega(t,\eta)-\tau|^q\,d\eta\right] \operatorname{sign}(t-\tau) =$$

$$= \left[\beta\gamma^{-1}(ly_1)(t) - (\beta-1)(ly_0)(t)\right] \operatorname{sign}(t-\tau),$$

тобто при $\varrho := 1/\gamma$ майже скрізь на $[a,b]$ виконується умова (45). На підставі леми 1 умова (38) забезпечує $(1;\tau)$-позитивність оператора (46), і, отже, потрібний результат дістаємо застосуванням твердження 2.

Теорему 3 доведено.

При $\beta = 1$ результат теореми 3 зводиться до наслідку 1. Покладаючи в цій теоремі β рівним 0, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 2. *Припустимо, що для функції $h : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ у рівнянні (37) виконується умова (38) і, крім цього, при деякому $q \in \mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{|t-\tau|^{q-1}} \int_a^b h(t,s)\,|\omega(t,s)-\tau|^q\,ds < q. \tag{49}$$

Тоді щодо задачі Коші (37), (2) справедливою є теорема 3.

Зауваження 6. Наслідок 2 випливає також з теореми 1 при $n = 1$.

Наслідок 2 забезпечує однозначну розв'язність задачі (37), (2) та монотонну залежність розв'язку цієї задачі від її адитивних збурень, зокрема, якщо виконано умову (38) та нерівність

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int_a^b |h(t,s)|\,|\omega(t,s)-\tau|\;ds < 1. \tag{50}$$

Зауваження 7. Приклад задачі (42), (4) показує, що замість строгих нерівностей (49) та (50) не можна припускати виконання відповідних нестрогих нерівностей

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{|t-\tau|^{q-1}} \int_a^b h(t,s)\,|\omega(t,s)-\tau|^q\;ds \le q$$

та

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int_a^b |h(t,s)|\,|\omega(t,s)-\tau|\;ds \le 1,$$

оскільки при виконанні останніх умов висновок щодо однозначної розв'язності задачі (37), (2), взагалі кажучи, не має місця.

Теорема 4. *Припустимо, що в рівнянні (37) функція $h : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ задовольняє умову (38) і, крім цього, можна вказати такі числа $\varrho \in (1,+\infty)$ та $q \in \mathbb{N}$, для яких при майже всіх t з $[a,b]$ має місце співвідношення*

$$\int_a^b |h(t,\xi)| \left[|\omega(t,\xi)-\tau|^q + \varrho \int_\tau^{\omega(t,\xi)} \int_a^b h(s,\eta)\,|\omega(s,\eta)-\tau|^q\;d\eta\,ds \right] d\xi \le \frac{2q}{\varrho}\,|t-\tau|^{q-1}. \tag{51}$$

Тоді щодо неоднорідної задачі Коші (37), (2) справедливою є теорема 3.

Для доведення теореми 4 скористаймось наступним твердженням (див. [3], наслідок 2.12).

Твердження 3. *Нехай оператор l в системі (22) є $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивним з деякими $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ та існують такі сталі $\varrho \in (1, +\infty)$, $\alpha \in (0, \varrho)$ і абсолютно неперервні функції $z_0, z_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, що*

$$z_k(\tau) = 0, \tag{52}$$

$$\Sigma z_k(t) > 0 \quad \textit{для всіх} \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\}, \qquad k = 0, 1, \tag{53}$$

і, крім цього, для майже всіх t з $[a, b]$ справджується нерівність

$$\Sigma \left[z_0'(t) + z_1'(t) - (\varrho - \alpha)\,(l z_0)\,(t) - \alpha\,(l z_1)\,(t) - \varrho\,(l z_2)\,(t) \right] \operatorname{sign}\,(t - \tau) \geq 0, \tag{54}$$

де

$$z_2(t) := (\varrho - \alpha) \int\limits_{\tau}^{t} (l z_1)(s)\, ds + \alpha \int\limits_{\tau}^{t} (l z_0)(s)\, ds. \tag{55}$$

Тоді для задачі (22), (2) має місце твердження 1.

Доведення теореми 4. Покладемо $n = 1$, $\sigma_1 = 1$ та

$$z_0(t) = |t - \tau|^q, \quad z_1(t) = |t - \tau|^q, \quad t \in [a, b]. \tag{56}$$

Означені таким чином функції z_0 та z_1, очевидно, абсолютно неперервні і задовольняють умови (52), (53). Задамо оператор l формулою (46). Тоді відповідна функція (55) має вигляд

$$z_2(t) = \varrho \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{a}^{b} h(s, \eta)\, |\omega(s, \eta) - \tau|^q \, d\eta \, ds, \quad t \in [a, b].$$

Тому з припущення (51) випливає, що для майже всіх t з $[a, b]$

$$\int\limits_{a}^{b} |h(t, \xi)| \left[|\omega(t, \xi) - \tau|^q + z_2(\omega(t, \xi)) \right] \, d\xi \leq \frac{2q}{\varrho}\, |t - \tau|^{q-1},$$

або, що те ж саме (завдяки умові (38)),

$$\left[\int\limits_{a}^{b} h(t, \xi)\, |\omega(t, \xi) - \tau|^q \; d\xi + (l z_2)\,(t) \right] \operatorname{sign}\,(t - \tau) \leq \frac{2q}{\varrho}\, |t - \tau|^{q-1}. \tag{57}$$

Однак внаслідок (56) співвідношення (57) означає, що

$$\varrho \left[(l z_0)\,(t) + (l z_2)\,(t) \right] \operatorname{sign}\,(t - \tau) \leq 2 z_0'(t) \operatorname{sign}\,(t - \tau), \quad t \in [a, b],$$

і, отже, в даному випадку при $\Sigma = 1$ і довільному $\alpha \in (0, \varrho)$ справджується умова (54). Оскільки, за лемою 1, умова (38) забезпечує $(1;\tau)$-позитивність оператора (46), для отримання потрібного результату залишається застосувати твердження 3.

Теорему доведено.

Наслідок 3. *Припустимо, що в рівнянні (37) функція $h : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ задовольняє умову (38) і, крім цього, можна вказати таке число $\varrho \in (1,+\infty)$, для якого має місце співвідношення*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |h(t,\xi)| \left[|\omega(t,\xi)-\tau| + \varrho \int\limits_\tau^{\omega(t,\xi)} \int\limits_a^b h(s,\eta)\,|\omega(s,\eta)-\tau|\; ds\, d\eta \right] d\xi \le \frac{2}{\varrho}. \tag{58}$$

Тоді щодо неоднорідної задачі Коші (37), (2) справедливою є теорема 3.

Останнє сформульоване твердження випливає з теореми 4 при $q = 1$.

Зауваження 8. Умова (58) є непокращуваною в тому сенсі, що її заміна в наслідку 3 слабкішим припущенням про існування константи $\varrho \in (1,+\infty)$ з властивістю

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |h(t,\xi)| \left[|\omega(t,\xi)-\tau| + \varrho \int\limits_\tau^{\omega(t,\xi)} \int\limits_a^b h(s,\eta)\,|\omega(s,\eta)-\tau|\, ds\, d\eta \right] d\xi \le \frac{2+\varepsilon}{\varrho}, \tag{59}$$

де ε — додатна стала, призводить до того, що твердження згаданого наслідку втрачає силу.

Дійсно, розглянемо задачу (42), (4), яка, очевидно, має вигляд (37), (2) при $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $f \equiv 0$, $r \equiv 1$, $\omega \equiv 1$. Легко перевірити, що в цьому випадку маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |h(t,\xi)| \left[|\omega(t,\xi)-\tau| + \varrho \int\limits_\tau^{\omega(t,\xi)} \int\limits_a^b h(s,\eta)\,|\omega(s,\eta)-\tau|\, ds\, d\eta \right] d\xi = 1+\varrho,$$

і, отже, припущення про існування константи $\varrho \in (1,+\infty)$ з властивістю (59) рівносильне розв'язності квадратичної нерівності

$$1+\varrho \le \frac{2+\varepsilon}{\varrho} \tag{60}$$

на відкритому півінтервалі $(1,+\infty)$. Оскільки ε відмінне від нуля, множина чисел $\varrho \in$ $\in (1,+\infty)$, які задовольняють нерівність (60), є непорожньою, а це означає, що для задачі (42), (4) виконано умови послабленої версії наслідку 3, в якій замість (58) припускається виконання (59) (якби ε дорівнювало нулю, то нерівності (60) та $\varrho > 1$ були б несумісними). Однак, як зазначено у зауваженні 5, задача (42), (2) не є однозначно розв'язною.

Із зауваження 8 також випливає, що величину $2q\varrho^{-1}$, яка фігурує в правій частині нерівності (51), в теоремі 4 не можна замінити величиною $(2q+\varepsilon)\,\varrho^{-1}$ при жодному додатному ε.

5. Розв'язність задачі Коші для двовимірних інтегро-диференціальних рівнянь. Розглянемо задачу Коші вигляду

$$u_1'(t) = \int_a^b h_{11}(t,s)u_1(\omega_{11}(t,s))\,ds + \int_a^b h_{12}(t,s)u_2(\omega_{12}(t,s))\,ds + f_1(t), \tag{61}$$

$$u_2'(t) = \int_a^b h_{21}(t,s)u_1(\omega_{21}(t,s))\,ds + \int_a^b h_{22}(t,s)u_2(\omega_{22}(t,s))\,ds + f_2(t), \tag{62}$$

$$u_1(\tau) = c_1, \tag{63}$$

$$u_2(\tau) = c_2, \tag{64}$$

де t змінюється у проміжку $[a,b]$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, функції $h_{ij} : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ та $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, i, $j = 1,2$, є інтегровними, а $\omega_{ij} : [a,b]^2 \to [a,b]$, i, $j = 1,2$, — вимірними.

Наслідок 4. *Нехай при деяких $\{\sigma_1, \sigma_2\} \in \{-1, 1\}$ для майже всіх t та s з $[a,b]$ функції $h_{ij} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, i, $j = 1,2$, задовольняють нерівності*

$$h_{11}(t,s)\,\mathrm{sign}\,(t-\tau) \geq 0, \tag{65}$$

$$\sigma_1\sigma_2 h_{12}(t,s)\,\mathrm{sign}\,(t-\tau) \geq 0, \tag{66}$$

$$\sigma_1\sigma_2 h_{21}(t,s)\,\mathrm{sign}(t-\tau) \geq 0, \tag{67}$$

$$h_{22}(t,s)\,\mathrm{sign}\,(t-\tau) \geq 0. \tag{68}$$

Крім цього, припустимо, що

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |\omega_{11}(t,s)-\tau|\,|h_{11}(t,s)|\,ds + \int_a^b |\omega_{12}(t,s)-\tau|\,|h_{12}(t,s)|\,ds \right) < 1 \tag{69}$$

та

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |\omega_{21}(t,s)-\tau|\,|h_{21}(t,s)|\,ds + \int_a^b |\omega_{22}(t,s)-\tau|\,|h_{22}(t,s)|\,ds \right) < 1. \tag{70}$$

Тоді задача Коші (61) – (64) має єдиний розв'язок при довільних $\{f_1, f_2\} \subset L_1([a,b],\mathbb{R})$ *і дійсних* c_1, c_2. *Більш того, якщо при всіх* $t \in [a,b]$ *виконуються співвідношення*

$$\sigma_1 \left(\int\limits_{\tau}^{t} f_1(s)\,ds + c_1 \right) \geq 0, \tag{71}$$

$$\sigma_2 \left(\int\limits_{\tau}^{t} f_2(s)\,ds + c_2 \right) \geq 0, \tag{72}$$

то компоненти єдиного розв'язку (u_1, u_2) *задачі (61) – (64) при кожному* t *з* $[a,b]$ *задовольняють нерівності*

$$\sigma_1 u_1(t) \geq 0,$$

$$\sigma_2 u_2(t) \geq 0.$$

Доведення. Означимо матричнозначні функції $H_j : [a,b]^2 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $1 \leq j \leq 4$, поклавши при майже всіх t і s з $[a,b]$ та всіх j, $1 \leq j \leq 4$,

$$H_1(t,s) = \begin{pmatrix} h_{11}(t,s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}(t,s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

$$H_3(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{21}(t,s) & 0 \end{pmatrix}, \quad H_4(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}(t,s) \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Крім того, при всіх j, $1 \leq j \leq 4$, покладемо

$$\omega_1 = \omega_{11}, \quad \omega_2 = \omega_{12}, \tag{75}$$

$$\omega_3 = \omega_{21}, \quad \omega_4 = \omega_{22}. \tag{76}$$

Згідно з лемою 1, умови (65) – (68) забезпечують $(\sigma_1, \sigma_2; \tau)$-позитивність лінійного оператора $l : C([a,b],\mathbb{R}^2) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^2)$, заданого співвідношенням

$$C([a,b],\mathbb{R}^2) \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \int\limits_a^b h_{11}(\cdot,s)u_1(\omega_{11}(\cdot,s))\,ds + \int\limits_a^b h_{12}(\cdot,s)u_2(\omega_{12}(\cdot,s))\,ds \\ \int\limits_a^b h_{21}(\cdot,s)u_1(\omega_{21}(\cdot,s))\,ds + \int\limits_a^b h_{22}(\cdot,s)u_2(\omega_{22}(\cdot,s))\,ds \end{pmatrix}.$$

З огляду на (73), (74) та (75), (76) це означає, що $(\sigma_1, \sigma_2; \tau)$-позитивним є оператор (16). Для означених таким чином функцій $H_j : [a,b]^2 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ та $\omega_j : [a,b]^2 \to [a,b]$, $1 \leq j \leq 4$, задача (61) – (64), очевидно, має вигляд (1), (2) при $n = 2$ та $N = 4$.

На підставі припущень (65)–(68) з умов (69), (70) випливає існування константи $\gamma \in$ $\in [0, 1)$, для якої при майже всіх $t \in [a, b]$ виконуються нерівності

$$\left[\int_a^b |\omega_{11}(t,s) - \tau|\, h_{11}(t,s)\, ds + \sigma_1\sigma_{12} \int_a^b |\omega_{12}(t,s) - \tau|\, h_{12}(t,s)\, ds\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \le \gamma \qquad (77)$$

та

$$\left[\sigma_1\sigma_{12} \int_a^b |\omega_{21}(t,s) - \tau|\, h_{21}(t,s)\, ds + \int_a^b |\omega_{22}(t,s) - \tau|\, h_{22}(t,s)\, ds\right] \operatorname{sign}(t-\tau) \le \gamma. \qquad (78)$$

Співвідношення (77), (78) забезпечують виконання умови (8) з $N = 4$, $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $q = 1$ та

$$d = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, застосування теореми 1 приводить до потрібного висновку.

Наслідок доведено.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Ронто А. Н.* Точные условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка, задаваемых $(\vec{\sigma}, \tau)$-положительными операторами // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 11. — С. 1541–1568.
3. *Dilnaya N., Ronto A.* Multistage iterations and solvability of linear Cauchy problems // Miskolc Math. Notes. — 2003. — **4**, №. 2. — P. 89–102.
4. *Дильная Н. З., Ронто А. Н.* Некоторые новые условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 7. — С. 867–884 .
5. *Дильная Н. З., Ронто А. Н.* Разрешимость задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений с $(\vec{\sigma}, \tau)$-положительными правыми частями // Допов. НАН України. — 2004. — № 2. — С. 29–35.
6. *Dilna N.* On the solvability of the Cauchy problem for linear integral-differential gathers // Miskolc Math. Notes. — 2004. — **5**, № 2. — P. 161–171.

Одержано 25.05.2005,
після доопрацювання — 08.07.2005