УДК 517 . 9

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Н. І. Блащак

Тернопіл. техн. ун-т
Україна, 46001, Тернопіль, вул. Руська, 56

Sufficient conditions for existence of periodic solutions of a system of nonlinear partial differential-functional equations are obtained.

Одержано достатні умови існування періодичних розв'язків системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними.

Розглянемо систему нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$u_t(t,x) + \Lambda u_x(t,x) = Au(t,x) + f\left(t, x, u(t,x), u\left(q_1 t + h_1, r_1 x + s_1\right), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, u\left(q_k t + h_k, r_k x + s_k\right)\right), \tag{1}$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, λ_i, $a_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$, q_j, r_j, $j = 1, \ldots, k$, — довільні цілі числа (q_j, $r_j \neq 0$), h_j, s_j, $j = 1, \ldots, k$, — довільні дійсні числа, $t \in R$, $x \in R$, $f\colon R \times R \times R^{(k+1)n} \to R^n$ і $u(t,x)$ — невідома n-вимірна вектор-функція.

Питання існування неперервно диференційовних при $t \in R$, $x \in R$ розв'язків окремих класів систем вигляду (1) вивчались у роботах багатьох математиків (див., наприклад, [1–3] і наведену в них бібліографію). Зокрема, в [1] одержано достатні умови існування неперервно диференційовних обмежених при $t \in R$, $x \in R$ розв'язків одного класу систем рівнянь вигляду (1). У даній роботі ці дослідження продовжуються, і основною її метою є встановлення умов існування неперервно диференційовних періодичних розв'язків системи (1).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1)$\operatorname{Re} a_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\operatorname{Re} a_j < 0$, $j = p+1, \ldots, n$;

2) вектор-функція $f(t, x, u_0, \ldots, u_k)$ є неперервною за всіма своїми змінними, має неперервні і обмежені частинні похідні по $x, u_0, \ldots, u_k$ при $(t, x, u_0, \ldots, u_k) \in R \times R \times R^{(k+1)n}$, є T-періодичною по t і X-періодичною по x;

3) вектор-функція $f(t, x, u_0, \ldots, u_k)$ та її частинні похідні $\left|\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x^{i_1} \partial u_j^{i_2}}\, f(t, x, u_0, \ldots, u_k)\right|$, $i_1 + i_2 = 1$, $j = 0, \ldots, k$, задовольняють умови Ліпшиця з константою ℓ за аргументами $u_0, \ldots, u_k$.

Тоді при достатньо малому ℓ система рівнянь (1) має неперервно диференційовний при $(t,x) \in R^2$ розв'язок, який є T-періодичним по t і X-періодичним по x.

Доведення. Оскільки згідно з [1] неперервно диференційовний періодичний по t і x

розв'язок $W(t,x)$ системи рівнянь вигляду

$$u_i(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau) f_j\big(\tau, \lambda_j(\tau-t)u(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x),$$

$$u(q_1\tau + h_1, r_1(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_1), \ldots$$

$$\ldots, u(q_k\tau + h_k, r_k(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_k)\big)d\tau, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де матрична функція $G(t) = (G_{ij}(t))$ визначається співвідношеннями

$$G(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\,(e^{A_1 t}, 0) & \text{при} \quad t < 0, \\ \mathrm{diag}\,(0, e^{A_2 t}) & \text{при} \quad t > 0, \end{cases}$$

причому $A_1 = \mathrm{diag}\,(a_1, \ldots, a_p)$, $A_2 = \mathrm{diag}\,(a_{p+1}, \ldots, a_n)$, є також періодичним розв'язком початкової системи диференціально-функціональних рівнянь (1), то для доведення теореми достатньо довести існування такого розв'язку для системи (2).

Розв'язок системи (2) будемо будувати за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо формулами

$$u_i^0(t,x) = 0,$$

$$u_i^m(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau) f_j\big(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x, u^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x),$$

$$u^{m-1}(q_1\tau + h_1, r_1(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_1), \ldots$$

$$\ldots, u^{m-1}(q_k\tau + h_k, r_k(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_k)\big)d\tau, \tag{3}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Покажемо, що при всіх $m \geq 1$, $t \in R$, $x \in R$ виконуються оцінки

$$\left|u_i^m(t,x) - u_i^{m-1}(t,x)\right| \leq N\theta^{m-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

де $0 < \theta < 1$.

Згідно з умовою 2 теореми покладемо

$$\sup|f(t,x,0,\ldots,0)| = K \quad \text{при} \quad t \in R, \quad x \in R, \tag{5}$$

$$\sup\left|\frac{\partial^{i_1+i_2} f(t,x,u_0,\ldots,u_k)}{\partial x^{i_1} \partial u_j^{i_2}}\right| \leq \ell \quad \text{при} \quad t \in R,\ x \in R,\ u_j \in R, \tag{6}$$

$$j = 0, \ldots, k,$$

де $|f| = \max\limits_{1 \le i \le n} |f_i|$. Оскільки для функції $G(t)$ виконується оцінка [1]

$$|G(t)| \le Le^{-\alpha|t|} \quad \text{при всіх} \quad t \ne 0, \tag{7}$$

де L, α — додатні сталі, то, враховуючи (3) і (5), одержуємо

$$|u_i^1(t,x) - u_i^0(t,x)| = |u_i^1(t,x)| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max_i \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t-\tau)||f_j(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, 0, \ldots, 0)| d\tau \le$$

$$\le K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau \le K\frac{2L}{\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отже, поклавши $N = K\dfrac{2L}{\alpha}$, одержимо, що оцінки (4) справджуються для $m = 1$. Міркуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (4) мають місце для деякого $m \ge 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від m до $m+1$. Справді, на підставі (3), (7) і умови 3 теореми маємо

$$|u_i^{m+1}(t,x) - u_i^m(t,x)| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t-\tau)| \ell \sum_{p=0}^{k} |u^m(q_p\tau + h_p, r_p(\lambda_j(\tau - t) + x) + s_p) -$$

$$- u^{m-1}(q_p\tau + h_p, r_p(\lambda_j(\tau - t) + x) + s_p)| d\tau \le$$

$$\le N\theta^{m-1}(k+1)\ell \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau \le$$

$$\le N\theta^{m-1}\frac{2L}{\alpha}(k+1)\ell,$$

де $q_0 = r_0 = 1$, $h_0 = s_0 = 0$.

Оскільки $\theta = \dfrac{2L}{\alpha}(k+1)\ell < 1$ при достатньо малому ℓ, то оцінки (4) виконуються для $m+1$ і, отже, для всіх $m \ge 1$.

Таким чином, всі наближення $u_i^m(t,x)$, $i = 1, \ldots, n$, $m = 0, 1, \ldots$, мають сенс, є неперервними T-періодичними по t і X-періодичними по x функціями (згідно з (3)) і для них справджуються оцінки (4). Звідси безпосередньо випливає, що послідовність вектор-функцій

$$u^m(t,x) = (u_1^m(t,x), \ldots, u_n^m(t,x)), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

рівномірно збігається при $t \in R$, $x \in R$ до деякої неперервної T-періодичної по t, X-періодичної по x вектор-функції $W(t,x) = (W_1(t,x), \ldots, W_n(t,x))$.

Доведемо тепер, що знайдені функції $W_i(t,x)$ мають неперервні перші похідні по t і x. Зауважимо, що з умови 3 теореми випливає, що всі наближення, побудовані при доведенні існування розв'язку, мають неперервні похідні по t і x. Тому, диференціюючи по t і x співвідношення (2), одержуємо

$$\frac{\partial u_i^m(t,x)}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau)\Bigg(\frac{\partial f_j(\tau,t,x)}{\partial x} + \sum_{p=0}^{k} r_p \frac{\partial f_j(\tau,t,x)}{\partial u_p}\times$$
$$\times \frac{\partial u^{m-1}(q_p\tau + h_p, r_p(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_p)}{\partial x}\Bigg)d\tau, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_i^m(t,x)}{\partial t} = f_i\Big(t,x,u^{m-1}(t,x),u^{m-1}(q_1t+h_1,r_1x+s_1),\ldots$$
$$\ldots,u^{m-1}(q_kt+h_k,r_kx+s_k)\Big)+a_iu_i^m(t,x)+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau)\Bigg(-\lambda_j\frac{\partial f_j(\tau,t,x)}{\partial x} - \lambda_j\sum_{p=0}^{k} r_p \frac{\partial f_j(\tau,t,x)}{\partial u_p}\times$$
$$\times \frac{\partial u^{m-1}(q_p\tau + h_p, r_p(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_p)}{\partial x}\Bigg)d\tau, \tag{9}$$

де

$$(\tau,t,x) = \Bigg(\tau,\lambda_j(\tau-t)+x,u^{m-1}(\tau,\lambda_j(\tau-t)+x),u^{m-1}(q_1\tau+$$
$$+h_1,r_1(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_1),\ldots,u^{m-1}(q_k\tau+h_k,r_k(\lambda_j(\tau-t)+x)+s_k)\Bigg).$$

Із (8) і (9) видно, що для доведення існування і неперервності перших похідних по t, x достатньо довести, що послідовності

$$\frac{\partial u_i^m(t,x)}{\partial x}, \quad i=1,\ldots,n, \quad m=0,1,\ldots,$$

рівномірно збігаються при $t\in R$, $x\in R$.

Аналогічно тому, як було доведено оцінки (4), враховуючи (4)–(7), (8), можна показати, що при всіх $m\ge 1$, $t\in R$, $x\in R$ виконуються оцінки

$$\left|\frac{\partial u_i^m(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial u_i^{m-1}(t,x)}{\partial x}\right| \le \widetilde{N}\widetilde{\theta}^{m-1}, \quad i=1,\ldots,n, \tag{10}$$

де $\widetilde{N} > \dfrac{2L}{\alpha}\ell$ — достатньо велика додатна стала, а $\widetilde{\theta}$ — деяка додатна стала (залежить від α, L, N, $\widetilde{N}$, K, ℓ) така, що при достатньо малому ℓ виконується умова $\widetilde{\theta}<1$.

Із (10) випливає, що послідовності

$$\frac{\partial u_i^m(t,x)}{\partial x}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad m = 0,1,\ldots,$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, $x \in R$ до неперервних функцій

$$\frac{\partial W_i(t,x)}{\partial x}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Теорему доведено.

1. *Блащак Н. І., Пелюх Г. П.* Про обмежені на R^2 розв'язки одного класу систем нелінійних рівнянь з частинними похідними і лінійними відхиленнями аргументів // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — С. 29 – 33.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
3. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 221 – 247.

Одержано 29.04.2005