УДК 517.9

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЕЛІПТИЧНИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З КОНІЧНОЮ ТОЧКОЮ

О. В. Коваленко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: kov@univ.kiev.ua

Solvability of the Dirichlet problem for the quasilinear elliptic nondivergent equation of the second order in the bounded domain with the conical point is proved.

Доведено розв'язність задачі Діріхле для квазілінійного еліптичного нерозбіжного рівняння другого порядку в обмеженій області з канонічною точкою.

1. Вступ. У даній роботі досліджується питання існування розв'язків задачі Діріхле для квазілінійних еліптичних недивергентних рівнянь другого порядку в області, межа якої містить конічну точку, причому розглядається випадок, коли коефіцієнти при старших похідних не залежать від градієнта невідомої функції. Розв'язність задачі досліджується у вагових соболєвських просторах функцій, що мають достатню кількість похідних, при умові, що коефіцієнти рівняння є достатньо гладкими.

У роботі [1] отримано розв'язність такої задачі у випадку залежності коефіцієнтів при старших похідних від похідних невідомої функції, але при додатковому припущенні на область, а саме: існує таке додатне число d, що

$$G \cap B_d(0) \subset \{x_n \geqslant 0\}.$$

У даній роботі задача розглядається для більш широкого класу областей, і ця умова може не виконуватися.

2. Позначення та основні поняття. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ — обмежена область із межею ∂G, яка гладка скрізь, крім початку координат $\mathcal{O} \in \partial G$. Крім того, нехай в околі $\mathcal{O}$ межа ∂G збігається з поверхнею конуса G_0 з вершиною в точці $\mathcal{O}$.

Введемо такі позначення: $G_a^b = G \cap \{x : a < |x| < b\}$, $\lambda = \lambda(G)$ — найменше додатне власне число задачі

$$\triangle_\omega \varphi + \lambda(\lambda + n - 2)\varphi = 0, \quad \omega \in \Omega \subset S^{n-1},$$

$$\varphi(\omega) = 0, \quad \omega \in \partial\Omega,$$

де $\triangle_\omega$ — оператор Лапласа – Бельтрамі на одиничній сфері, а Ω — область, що вирізається конусом на одиничній сфері, з гладкою межею $\partial\Omega$.

Будемо використовувати такі функціональні простори: $V^k_{p,\beta}(G)$ — ваговий соболєвський простір із нормою $\|u\| = \Big(\int\limits_G \sum\limits_{|\alpha|\le k} r^{p\left(\frac{\beta}{2}-k+|\alpha|\right)} |\mathcal{D}^\alpha u|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$, $W^k(G)$ — простір k разів слабко диференційовних функцій в G, $L_{p,k}(G)$ — ваговий простір із нормою

$$\|u\| = \left(\int\limits_G |x|^k |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$C_k^t(\overline{G})$ — ваговий функціональний простір із нормою

$$\|u\| = \max_{x\in\overline{G}} \sum_{|\alpha|\leqslant t} r^{k-t+|\alpha|} |\mathcal{D}^\alpha u|.$$

Через $W_q^2(G\backslash\mathcal{O})$ позначимо множину функцій, для яких скінченними є інтеграли

$$\int\limits_{\{|x|\geqslant\varepsilon\}\bigcap G} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant 2} |\mathcal{D}^\alpha u|^q\right) dx < \infty \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

3. Апріорні оцінки розв'язків лінійних задач. Розглянемо задачу Діріхле для лінійного еліптичного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x),\ x \in G, \quad u\Big|_{\partial G} = 0. \tag{1}$$

Припустимо, що коефіцієнти рівняння задовольняють наступні умови:

а) умову рівномірної еліптичності з деякими константами $\nu, \mu > 0$:

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2 \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

б) коефіцієнти a_{ij}, a_i, a належать $W_q^t(G)$, $t \geqslant 1$, де $q > n$ при $t = 1$ і $q \geqslant n$ при $t \geqslant 2$.

Лема 1. *Нехай* $u \in W^{t+2}(G)\bigcap W_q^2(G\backslash\mathcal{O})\bigcap L_{q,\frac{q\delta}{2}}(G)$ *— розв'язок задачі (1) і виконано припущення а), б); крім того,* $f \in V_{q,2t+4+\delta}^t(G)$. *Тоді виконується нерівність*

$$\|u\|_{V_{q,2t+4+\delta}^{t+2}(G)} \leqslant C\left(\|f\|_{V_{q,2t+4+\delta}^t(G)} + \|u\|_{L_{q,\frac{q\delta}{2}}(G)}\right).$$

Доведення. Розглянемо дві множини: $G_\rho^{4\rho}$ і $G_{2\rho}^{3\rho}$, $\rho > 0$, і виконаємо перетворення координат $x = \rho x'$. Тоді функція $v(x') = u(\rho x')$ задовольняє в G_1^4 рівняння

$$a_{ij}(\rho x')\frac{\partial^2 v}{\partial x_i' \partial x_j'} + \rho a_i(\rho x')\frac{\partial v}{\partial x_i'} + \rho^2 a(\rho x')v = \rho^2 f(\rho x').$$

Із теорії еліптичних задач у гладких областях [2] випливає

$$\|v\|^q_{W_q^{t+2}(G_2^3)} \leqslant C_1\left(\|\rho^2 f(\rho x')\|^q_{W_q^t(G_1^4)} + \|v\|^q_{L_2(G_1^4)}\right).$$

Повернувшись до координат x, отримаємо

$$\int\limits_{G_{2\rho}^{3\rho}} \sum_{|\beta|\leqslant t+2} \rho^{q|\beta|} \left|\mathcal{D}^{\beta}u\right|^{q} dx \leqslant C_1 \left(\int\limits_{G_{\rho}^{4\rho}} \sum_{|\beta|\leqslant t} \rho^{q(2+|\beta|)} \left|\mathcal{D}^{\beta}f\right|^{q} dx + \int\limits_{G_{\rho}^{4\rho}} |u|^{q} dx \right).$$

Домножимо обидві частини рівняння на $\rho^{-q(t+2)+q(t+2+\frac{\delta}{2})}$ і врахуємо, що на $G_{\rho}^{4\rho}$ $\rho \sim |x|$. Тоді

$$\int\limits_{G_{2\rho}^{3\rho}} \sum_{|\beta|\leq t+2} r^{q(\frac{2t+4+\delta}{2}-(t+2)+|\beta|)} \left|\mathcal{D}^{\beta}u\right|^{q} dx \leq$$

$$\leq C_2 \left(\int\limits_{G_{\rho}^{4\rho}} \sum_{|\beta|\leq t} r^{q(\frac{2t+4+\delta}{2}-t+|\beta|)} \left|\mathcal{D}^{\beta}f\right|^{q} dx + \int\limits_{G_{\rho}^{4\rho}} r^{\frac{q\delta}{2}} |u|^{q} dx \right). \tag{2}$$

Тепер підсумуємо нерівності (2) при $\rho = \dfrac{3}{2}, \dfrac{3\varepsilon}{4}, \ldots, \dfrac{3^{N-1}\varepsilon}{2^{N-1}}$. Отримаємо

$$\int\limits_{G_{\varepsilon}} \sum_{|\beta|\leq t+2} r^{q(\frac{2t+4+\delta}{2}-(t+2)+|\beta|)} \left|\mathcal{D}^{\beta}u\right|^{q} dx \leq$$

$$\leq C_3 \left(\int\limits_{G_{\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{|\beta|\leqslant t} r^{q(\frac{2t+4+\delta}{2}-t+|\beta|)} \left|\mathcal{D}^{\beta}f\right|^{q} dx + \int\limits_{G_{\frac{\varepsilon}{2}}} r^{\frac{q\delta}{2}} |u|^{q} dx \right) \leq$$

$$\leq C_3 \left(\|f\|^{q}_{V^{t}_{q,\,2t+4+\delta}(G)} + \|u\|^{q}_{L_{q,\frac{q\delta}{2}}(G)} \right).$$

Скориставшись теоремою Фату і перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо твердження леми.

Таким же чином можна довести аналогічне твердження для рівняння з неперервними коефіцієнтами.

Лема 2. *Нехай* $u \in W^2(G) \bigcap W_q^2(G\backslash\mathcal{O}) \bigcap L_{q,\frac{q\delta}{2}}(G)$, $q \geq 1$, *— розв'язок задачі (1) і виконується припущення а); коефіцієнти рівняння* $a_{ij}(x), a_i(x), a(x)$ *є неперервними функціями в* $\overline{G}$. *Крім того,* f *належить простору* $V^0_{q,4+\delta}(G)$. *Тоді* $u \in V^2_{q,4+\delta}(G)$ *і виконується нерівність*

$$\|u\|_{V^2_{q,4+\delta}(G)} \leq C \left(\|f\|_{V^0_{q,4+\delta}(G)} + \|u\|_{L_{q,\frac{q\delta}{2}}(G)} \right).$$

4. Апріорні оцінки розв'язку квазілінійної задачі. Будемо досліджувати задачу Діріхле для квазілінійного рівняння, що має вигляд

$$a_{ij}(x,u(x))\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + a(x,u(x),u_x(x)) = 0, \quad x \in G, \tag{3}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial G. \tag{4}$$

Під розв'язком цієї задачі будемо розуміти функцію з простору $V^k_{2,\beta}(G)$, де $k > 2 + \dfrac{n}{2}$, $2k - n - 2\lambda < \beta < 2k - n$, $\beta > -2$. Сформулюємо умови на коефіцієнти, які будемо використовувати далі:

а) $a_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} — символ Кронекера;

б) існують невід'ємні монотонно зростаючі неперервні за Діні в нулі функції $A_{ij}(t)$, i, $j = \overline{1,n}$, які визначені при $t \geqslant 0$ і $\lim\limits_{t\to 0+} A_{ij}(t) = 0$ такі, що

$$|a_{ij}(x,\zeta) - a_{ij}(0,0)| \le A_{ij}(|x|) \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R};$$

в) існують додатні константи ν, μ, що не залежать від u, такі, що:

$$\nu\xi^2 \le a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2 \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

г) функції $a_{ij}(x,\zeta)$, $a(x,\zeta)$ є неперервно диференційовними по всіх своїх аргументах $k-2$ разів, причому існують додатні константи C_4, C_5 такі, що для будь-яких γ, η $|\gamma|+|\eta| \le$ $\le k-2$,

$$\left|\mathcal{D}^\gamma_x \mathcal{D}^\eta_\zeta a_{ij}(x,\zeta)\right| \le C_4\, r^{\vartheta_1|\eta|+\vartheta_4}, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$\left|\mathcal{D}^\gamma_x \mathcal{D}^\eta_\zeta a(x,\zeta)\right| \le C_5\, r^{\vartheta_2|\eta|+\vartheta_3}. \tag{6}$$

Зауваження 1. Позначимо $f(x) := -a(x,u(x),u_x(x))$, $a^{ij}(x) := a_{ij}(x,u(x))$. Тоді кожен розв'язок задачі (3), (4) можна розглядати як розв'язок лінійної задачі

$$a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f(x), \quad x \in G,$$

$$u = 0, \quad x \in \partial G.$$

Зауваження 2. За умови, що $\vartheta_3 > -1$, функція f належить простору $L_n(G)$. Крім того, з умови $k > 2 + \dfrac{n}{2}$ випливає, що $V^k_{2,\beta}(G) \subset W^2_{n,\mathrm{loc}}(G)$, а вкладення $V^k_{2,\beta}(G) \subset C(\overline{G})$ є справедливим за умови $\beta < 2k - n$. Таким чином, враховуючи зауваження 1, з принципу максимуму А. Д. Александрова [3, с. 209] випливає, що при виконанні умови (6) з $\vartheta_3 > -1$ вірною є оцінка

$$\sup_{x\in\overline{G}} |u(x)| \le C_6,$$

де C_6 не залежить від u.

Враховуючи зауваження 2, як наслідок з теореми 3 [4] можна одержати наступне твердження.

Лема 3. *Нехай* $u(x)$ — *розв'язок задачі (3), (4) і виконуються умови а) – в), а умова г) лише для коефіцієнта* $a(x,\zeta)$ *з* $\vartheta_3 > \max\{-1, \lambda - 2\}$. *Крім того, коефіцієнти* a_{ij} *є неперервними на* $\overline{G} \times \mathbb{R}$. *Тоді існує* $d > 0$ *таке, що виконується оцінка*

$$|u(x)| \le C_7 |x|^\lambda \quad \forall x \in G_0^d,$$

де C_7 *не залежить від* u.

Для доведення леми потрібно перевірити умови теореми 3 з [4] і зауважити, що стала C з цієї теореми не залежить від u, а залежить лише від величини $\sup\limits_{\overline{G}} |u|$, яку ми можемо оцінити згідно з зауваженням 2.

Використовуючи зауваження 2, лему 3, а також вагові оцінки розв'язків лінійних задач, можна довести обмеженість розв'язку за ваговою нормою.

Теорема 1. *Нехай* $u(x)$ — *розв'язок задачі (3), (4) і виконуються умови а) – г). При цьому на параметри* $\vartheta_i, i = 1, 2, 3, 4$, *накладаються такі обмеження:*

1) $\vartheta_1 > -\lambda - 1 + \left[\dfrac{k}{2}\right], -1 < \vartheta_4 \leqslant 0, \vartheta_1 + \vartheta_4 > -\lambda - 3 + k$;

2) $\vartheta_2 > -\lambda - 1 + \left[\dfrac{k+1}{2}\right], \vartheta_3 > \max\{-1, \lambda - 2\}$ (*позначення* $[\cdot]$ *означає цілу частину числа*);

3) $\vartheta_2 + \vartheta_3 \geqslant -1, \vartheta_2 + \vartheta_3 > -\lambda - \dfrac{\beta}{2} + k - 2$.

Тоді виконується оцінка

$$\|u\|_{V_{2,\beta}^k} \le C_8,$$

де C_8 *не залежить від* u.

Доведення. Перевіримо виконання умов леми 2. Вкладення $V_{2,\beta}^k(G) \subset C(\overline{G})$ і умова $a_{ij} \in C(\overline{G})$ гарантують неперервність коефіцієнтів a^{ij} в $\overline{G}$. Далі будемо вважати, що $q > n$ і є достатньо близьким до n. Із вкладення соболєвських просторів $W_2^k \subset W_q^2$ випливає, що $u \in W_q^2(G \backslash \mathcal{O})$. Аналогічно, параметр δ будемо вибирати достатньо близьким до числа $-\lambda - 1$ за умови $\delta > -\lambda - 1$. Тепер за допомогою леми 3, врахувавши зауваження 2 і те, що при такому виборі q, δ виконується $q\left(\lambda + \dfrac{\delta}{2}\right) + n > 0$, доведемо, що u належить $L_{q,\frac{q\delta}{2}}(G)$:

$$\int\limits_G r^{\frac{q\delta}{2}} |u|^q dx \le \int\limits_{G_0^d} r^{\frac{q\delta}{2}} C_7^q r^{\lambda q} dx + \int\limits_{G_d} r^{\frac{q\delta}{2}} |u|^q dx \le C_9.$$

З умови г) і нерівності $q\left(2 + \dfrac{\delta}{2} + \vartheta_3\right) + n > 0$ випливає

$$\int\limits_G r^{q\frac{4+\delta}{2}} |a(x,u,u_x)|^q dx \le C_{10} \int\limits_G r^{q\left(2+\frac{\delta}{2}+\vartheta_3\right)} dx \le C_{11}, \quad f \in V_{q,4+\delta}^0(G).$$

Зазначимо, що сталі C_{10}, C_{11} не залежать від u. Таким чином, виконуються всі умови леми 2, з якої випливає

$$\|u\|_{V^2_{q,4+\delta}}(G) \leq C_{12}, \tag{7}$$

де C_{12} не залежить від u.

Далі застосуємо метод математичної індукції. Припустимо, що оцінка

$$\|u\|_{V^{t+1}_{q,2t+2+\delta}(G)} \leq C_{13} \tag{8}$$

є вірною при деякому t, $1 \leq t \leq k-3$. Оскільки виконується обмежене вкладення $V^{t+1}_{q,2t+2+\delta}(G)$ у ваговий простір $C^t_{t+1+\frac{\delta}{2}}(\overline{G})$ [5] (лема 3), то існує стала C_{14} така, що

$$\forall\, \alpha, |\alpha| \leq t : \sup_{\overline{G}} |\mathcal{D}^\alpha u| \leq C_{14} r^{-1-\frac{\delta}{2}-|\alpha|}. \tag{9}$$

Доведемо за допомогою леми 1 оцінку

$$\|u\|_{V^{t+2}_{q,2t+4+\delta}(G)} \leq C_{15}. \tag{10}$$

Покажемо, що $a^{ij} \in W^t_q(G)$. Зважаючи на формулу диференціювання складеної функції і (5), маємо

$$\int\limits_G \sum_{|\alpha|\leq t} |\mathcal{D}^\alpha a^{ij}|^q dx \leq \mathrm{const} \sum \int\limits_G r^{\vartheta_4 q} \left|r^{\vartheta_1}\mathcal{D}^{m_1}u\right|^q \ldots \left|r^{\vartheta_1}\mathcal{D}^{m_{\hat{\imath}}}u\right|^q dx.$$

У кожному доданку цієї суми може бути не більше одного множника з похідною від u порядку вищого за $\left[\dfrac{t}{2}\right]$. Спочатку оцінимо множники з похідними до порядку $\left[\dfrac{t}{2}\right]$ включно за нерівністю (9). Оскільки $\dfrac{\delta}{2} \leq \vartheta_1 - 1 - \left[\dfrac{k-3}{2}\right]$, то виконується нерівність $\left|r^{\vartheta_1}\mathcal{D}^{m_i}u\right| \leq$ $\leq \mathrm{const}$. Потім доданки, які містять множник із похідною вищого порядку, оцінимо за нерівністю (8), використавши обмеження 1 на параметри ϑ_1, ϑ_4. Таким чином, $a^{ij} \in W^t_q(G)$, причому a^{ij} обмежені за нормою сталою, яка не залежить від u.

Доведемо тепер, що $f \in V^t_{q,2t+4+\delta}(G)$. Із формули диференціювання складеної функції і (6) маємо

$$\|f\|^q_{V^t_{q,2t+4+\delta}(G)} = \int\limits_G \sum_{|\alpha|\leq t} r^{q\left(2+\frac{\delta}{2}+|\alpha|\right)} |\mathcal{D}^\alpha a(x,u,u_x)|^q dx \leq$$

$$\leq \mathrm{const} \sum \int\limits_G r^{q\left(2+\frac{\delta}{2}+|\alpha|\right)} r^{\vartheta_3 q} \left|r^{\vartheta_2}\mathcal{D}^{m_1}u\right|^q \ldots \left|r^{\vartheta_2}\mathcal{D}^{m_{\hat{\imath}}}u\right|^q dx.$$

Оскільки $a(x,u,u_x)$ залежить також від градієнта, то в кожному доданку цієї суми може бути не більше одного множника з похідною від u порядку вищого за $\left[\dfrac{t+1}{2}\right]$.

Спочатку оцінимо множники з похідними до порядку $\left[\dfrac{t+1}{2}\right]$ включно за нерівністю (9). З умов на параметр ϑ_2 випливає, що виконується нерівність $\left|r^{\vartheta_2}\mathcal{D}^{m_i}u\right| \le \mathrm{const}$. Потім доданки, які містять множник із похідною вищого порядку, оцінимо за нерівністю (8), врахувавши обмеження 3 на параметри ϑ_2, ϑ_3 і те, що $m_i \le |\alpha|+1$. Якщо доданок не містить похідних вищих порядків, то його можна оцінити, оскільки q, δ такі, що $q\left(2+\dfrac{\delta}{2}+\vartheta_3\right)+n>0$.

Таким чином, функція $f \in V^t_{q,2t+4+\delta}(G)$, причому вона обмежена за нормою сталою, яка не залежить від u. Всі умови леми 1 виконано, отже, виконується оцінка (10). Тоді за індукцією з оцінки (7) випливає оцінка

$$\|u\|_{V^{k-1}_{q,2k-2+\delta}(G)} \le \mathrm{const}.$$

Таким же чином можна довести, що $a^{ij} \in W_2^{k-2}(G)$, а $f \in V^{k-2}_{2,\beta}(G)$. Тоді з [5] (лема 2) випливає

$$\|u\|_{V^k_{2,\beta}} \le C_8,$$

де C_8 не залежить від u.

Зауваження 3. Можна довести оцінку, аналогічну встановленій у теоремі 1, для розв'язків з простору $V^k_{p,\beta}$, де $2 \le p \le n$. Для цього потрібно замість леми 2 з [5] на останньому кроці доведення ще раз використати лему 1.

5. Розв'язність квазілінійних задач в областях із конічною точкою. Позначимо через X підпростір простору $V^k_{2,\beta}(G)$, де $k > 2+n$, $2k-n-2\lambda < \beta < 2k-n$, $\beta > -2$, який складається з функцій, що дорівнюють нулю на межі області. Введемо функцію

$$F_t(x,u,u_x,u_{xx}) = ta_{ij}(x,u)u_{x_ix_j} + ta(x,u_x,u_{xx}) + (1-t)\triangle u, \quad t \in [0;1].$$

Із теореми 1 випливає існування додатної сталої K'' такої, що для $t \in [0;1]$ і $u \in V^k_{2,\beta}(G)$ з

$$F_t(x,u,u_x,u_{xx}) = 0, \quad x \in G, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G,$$

випливає оцінка

$$\|u\|_{V^k_{2,\beta}} \le K''.$$

Застосовуючи принцип максимуму А. Д. Александрова, можна отримати наступне твердження.

Лема 4. *Для довільної функції $v \in X$ існує стала K', яка може залежати від v, така, що задача*

$$L_t(v)u + K'u = 0, \quad x \in G, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G,$$

де

$$L_t(v)u := \sum_{|\beta|\le 2} F_{t,\beta}(x,v,v_x,v_{xx})\mathcal{D}^\beta u(x), \quad F_{t,\beta}(x,\xi) = \frac{\partial F_t(x,\xi)}{\partial \xi_\beta},$$

має лише нульовий розв'язок.

Сформулюємо тепер теорему про розв'язність задачі (3), (4).

Теорема 2. *Нехай функції $a_{ij}(x,\zeta)$, $a(x,\zeta)$ є неперервно диференційовними по всіх своїх аргументах $k-1$ разів; виконано умови на коефіцієнти а) – в), а умови (5), (6) виконуються для похідних, для яких $|\gamma|+|\eta| \le k-1$. При цьому параметри $\vartheta_i, i=1,2,3,4$, є сталими, що залежать від λ, k, β, n, зокрема, вони задовольняють умови теореми 1. Тоді задача (3), (4) має принаймні один розв'язок у просторі X.*

Доведення цієї теореми є технічно складним і громіздким, тому наведемо тільки схему доведення. Ідея доведення полягає в зведенні диференціального рівняння до операторного. Введемо сім'ю операторів $A_t : X \to X^*$, $t \in [0;1]$, які визначаються за формулою

$$\langle A_t u, \varphi\rangle = \big(F_t(x,u,u_x,u_{xx}), L_t(u)\varphi + K'\varphi\big)_{V^{k-2}_{2,\beta}(G)}, \ \varphi \in X,$$

де $(\cdot,\cdot)_{V^{k-2}_{2,\beta}(G)}$ — скалярний добуток у просторі $V^{k-2}_{2,\beta}(G)$:

$$(u,v)_{V^{k-2}_{2,\beta}(G)} = \int\limits_G \sum_{|\beta|\le k-2} r^{\beta-2(k-2-|\alpha|)}\mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\alpha v dx.$$

Можна показати, що задача (3), (4) еквівалентна рівнянню $A_1 u = 0$. При кожному $t \in [0;1]$ оператор A_t є обмеженим, неперервним. Крім того, A_1 задовольняє умову $\alpha(X)$ з [2], тобто для довільної послідовності $\{u_m\} \subset X$, що задовольняє умови

$$u_m \rightharpoonup u_0 \in X, \quad \overline{\lim}_{m\to\infty}\langle A_1 u_m, u_m - u_0\rangle \leqslant 0,$$

виконується $u_m \to u_0$.

Для доведення розв'язності скористаємося теоремою 7.1 [2, с. 79]. В якості області D з теореми 7.1 візьмемо кулю радіуса $R = K'' + 1$. Очевидно, що $A_0(-u) = -A_0(u)$, тоді $\mathrm{Deg}(A_0, \overline{B}_R, 0)$ — непарне число [2, с. 65]. Можна також довести, що сім'я операторів A_t задовольняє умову $\alpha_0^{(t)}(\partial D)$. Вибір радіуса R гарантує виконання нерівності $A_t u \neq 0$ при $t \in [0;1]$, $u \in \partial B_R$.

Тоді розв'язність задачі (3), (4) є наслідком теореми 7.1.

6. Висновки. Отже, в даній роботі отримано апріорні оцінки розв'язків лінійних та квазілінійних еліптичних задач. За допомогою цих оцінок, використовуючи теорію ступеня відображень, отримано розв'язність квазілінійної задачі. Цікавим є питання узагальнення такого результату на випадок, коли коефіцієнти при старших похідних залежать від градієнта невідомої функції.

1. *Джафаров Р. М.* Нелинейная задача Дирихле в областях с угловыми и коническими точками: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Донецк, 1999. — 148 с.
2. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990. — 448 с.
3. *Гилбарг Д., Трудингер Н. С.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 464 с.
4. *Борсук М. В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Мат. сб. — 1991. — **182**, № 10. — С. 1446 – 1462.
5. *Джафаров Р. М.* Априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой // Допов. НАН України. — 1999. — № 6. — С. 12 – 18.

Одержано 28.03.2005