1. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 5–8.
2. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там же. – 2002. – No 7. – С. 35–42.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.02.2007

УДК 517.988

© **2007**

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Приближенный анализ одной пространственной, конвективной задачи теплопроводности

The problem of three-dimensional stationary convection in the liquid phase is investigated. A method of studying this problem by means of the expansion in a small Reynolds number is proposed. In this case, the zero and first expansion terms are defined by the Ritz method. A formula of the dependence of the free-boundary equation on the Reynolds number is obtained.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — заданная область в R^3, граница которой состоит из двух связных компонент Γ^+ и Γ^-, причем замкнутая поверхность Γ^+ ограничивает непустую область, замыкание которой лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-. Поверхности $\Gamma^{\pm}$ предполагаются принадлежащими классу $C^{3+\alpha}$ и не имеющими самопересечений. Задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе состоит в нахождении скорости жидкости $\vec{V}(x)) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$, давления $p(x)$, распределения температур $u^{\pm}(x)$ и свободной поверхности Γ по следующим условиям:

$$\lambda(\vec{V}\nabla)u^+(x) = \kappa\nabla^2 u^+(x), \qquad x \in \Omega^+, \qquad \nabla^2 u^-(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1}$$

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x) + \nabla p(x) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x) + \vec{f}(u^+), \quad x \in \Omega^+, \quad \operatorname{div}\vec{V}(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{2}$$

$$\vec{V}|_{x\in\Gamma\cup\Gamma^+} = 0, \tag{3}$$

$$u^{\pm}(x)|_{x\in\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x), \tag{4}$$

$$u^+ = u^- = 1, \qquad x \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u^-}{\partial\vec{n}}\right|_{\Gamma} - \kappa\left.\frac{\partial u^+}{\partial\vec{n}}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{6}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\Omega^{\pm}$ — области жидкой и твердой фазы, на которые разбивает область Ω свободная граница раздела фаз Γ, причем $\partial\Omega^{\pm} = \Gamma\bigcup\Gamma^{\pm}$, т. е. Γ лежит между Γ^+ и Γ^-, ограничивая область, содержащую Γ^+, и Γ предполагается не имеющая самопересечений и лежащая внутри области Ω; $\vec{n}$ — единичная нормаль к Γ, направленная в сторону Ω^+; $B^{\pm}(x)$ — заданные функции на $\Gamma^{\pm}$, принадлежащие классу $C^{3+\alpha}(\Gamma^{\pm})$ и удовлетворяющие условию $\pm(B^{\pm}(x)-1)|_{x\in\Gamma^+} \geqslant \varepsilon_0 > 0$. В задаче (1)–(6) параметры κ, Re, λ, ε_0 предполагаются положительными постоянными, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\vec{f}(u)$ — принадлежащей классу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u)$ — ограниченной в R^1. Укажем, что при малых числах Рейнольдса задача (1)–(6) разрешима в классе гладких функций, при этом $u^{\pm} \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega^{\pm}})$, $\vec{V}(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega^{\pm}})$, а граница Γ принадлежит классу $C^{3+\alpha}$ [1]. Заметим также, что замена $\widetilde{u}^+(x) = \kappa u^+(x)$ при $x \in \Omega^+$ и $\widetilde{u}^-(x) = u^-(x) + \kappa - 1$ при $x \in \Omega^+$ позволяет условие (6) представить в виде $\partial\widetilde{u}^-/\partial\vec{n} - \partial\widetilde{u}^+/\partial\vec{n} = 0$ на Γ. В дальнейшем будем пользоваться такой записью условия (6).

Настоящая работа посвящена приближенному анализу задачи (1)–(6), в основу которого положено разложение решения в ряд, по степеням малых чисел Рейнольдса Re, при этом исследуется влияние конвекции на фронт кристаллизации.

Ранее метод Ритца использовался при исследовании задач типа Стефана в теплофизике [2, 3], а затем в гидродинамике — для задач типа Бернулли [4].

2. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра Re. Пусть Ω_0^{+} — области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0. Для точек поверхности введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3. Пусть $\vec{n}_0(\omega)$ — нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+. Известно, что свободная граница Γ представима в виде $\Gamma = \{x = x(\omega) + \vec{n}_0(\omega)\rho(\omega)\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega)$ класса $C^{3+\alpha}(\Gamma_0)$ [1].

Предположим, что неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда

$$u^{\pm}(x; \mathrm{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^{\kappa} u_{\kappa}^{\pm}(x), \;\; V_i(x; \mathrm{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^{\kappa} V_{i\kappa}(x), \;\; p(x; \mathrm{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^{\kappa} p_{\kappa}(x), \quad (7)$$

$i = 1, 2, 3$ и будем считать, что

$$\rho(\omega; \mathrm{Re}) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^{\kappa} \rho_{\kappa}(\omega). \quad (8)$$

Подставляя эти разложения в соотношения (1)–(6), получаем бесконечное число задач. Выпишем вначале нулевое приближение. Прежде всего, заметим, что из условий (2) и (3) следует $\vec{V}_0 = (V_{10}, V_{20}, V_{30}) \equiv 0$ в Ω_0^+. Выпишем теперь условия, определяющие $u_0^{\pm}$:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u_0^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0^{\pm}, \qquad u_0(x)|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x), \qquad u_0^{\pm}|_{\Gamma_0} = 1, \\ &\frac{\partial u_0^-}{\partial \vec{n}_0}|_{\Gamma_0} - \frac{\partial u_0^+}{\partial \vec{n}_0}|_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, на Γ_0 будут выполняться два условия: $u_0^+ = u_0^- = 1$, $|\nabla u_0^+| = |\nabla u_0^-|$. Поэтому можно построить функцию $u_0(x)$ по формуле

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0^+, \\ u_0^-(x), & x \in \Omega_0^-, \end{cases} \quad (10)$$

которая является решением следующей задачи:

$$\nabla^2 u_0 = 0, \qquad x \in \Omega; \qquad u_0|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x). \quad (11)$$

Следовательно, Γ_0 есть поверхность уровня гармонической в Ω функции $u_0(x)$, т. е.

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega \colon u_0(x) = 1\}.$$

3. Первое приближение. Выпишем теперь ту краевую задачу, которая отвечает множителю Re в первой степени. Из условий (1)–(6) и из разложений (7), (8) для функций $\vec{V}_1(x) = (V_{11}(x), V_{21}(x), V_{31}(x))$, $u_1^{\pm}(x)$ и $\rho_1(\omega)$ вытекает следующая задача:

$$\nabla p_0(x) = \nabla^2 \vec{V}_1(x) + \vec{f}(u_0^+), \qquad \operatorname{div} \vec{V}_1(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0^+; \qquad \vec{V}_1(x)|_{\partial\Omega_0^+} = 0, \tag{12}$$

$$\lambda(\vec{V}_1 \nabla) u_0^+(x) = \nabla^2 u_1^+(x), \quad x \in \Omega_0^+, \quad \nabla^2 u_1^-(x) = 0, \quad x \in \Omega_0^-, \quad u_1^{\pm}(x)|_{\Gamma^{\pm}} = 0, \tag{13}$$

$$[|\nabla u_0(x(\omega))| \rho_1(\omega) + u_1(x(\omega))]|_{\Gamma_0} = 0. \tag{14}$$

Далее, если предположить, что поверхность Γ_0 не имеет особых точек, тогда в каждой точке $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Gamma_0$ хотя бы один из определителей второго порядка функциональной матрицы $A = (\partial x_i / \partial \omega_k)$, $x_i = x_i(\omega_1, \omega_2)$, $i = 1, 2, 3$; $\kappa = 1, 2$ всегда отличен от нуля. Пусть для определенности это будет определитель

$$\Delta = \frac{\partial x_1}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \omega_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \omega_2} \neq 0$$

в некоторой точке $\omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*) \in \Gamma_0$. Тогда Γ_0 в окрестности этой точки допускает явное задание $z = z(x_1, x_2; \mathrm{Re})$ и, аналогично (8), имеем $z(x_1, x_2; \mathrm{Re}) = \sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^{\kappa} z_{\kappa}(x_1, x_2)$. Теперь из условия Стефана (6) следует, что в окрестности точки $x(\omega^*) \in \Gamma_0$ должно выполняться условие

$$\begin{aligned}
z_1(x_1, x_2) \Bigg[\bigg(& \frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x_3^2} \bigg) - \\
& - \bigg(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x_3^2} \bigg) \Bigg] + \\
& + \Bigg[\bigg(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} \bigg) - \\
& - \bigg(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \bigg) \Bigg] = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Задача (12)–(14), во-первых, линейна, во-вторых, ее нужно решать в известных областях $\Omega_0^{\pm}$. После того как функции $u_0^{\pm}(x)$ и $\vec{V}_1(x)$ определены соответственно в областях $\Omega_0^{\pm}$ и Ω_0^+, из соотношений (13), (14) находим функции $u_1^{\pm}(x)$, заданные в тех же областях $\Omega_0^{\pm}$ и $\rho_1(\omega(x))$. Далее справедливы равенства

$$u_1^+ = u_1^-, \qquad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}, \qquad x \in \Gamma_0. \tag{16}$$

Таким образом, теперь можно построить функцию $u_1(x)$ по формуле

$$u_1(x) = \begin{cases} u_1^+(x), & x \in \Omega_0^+, \\ u_1^-(x), & x \in \Omega_0^-, \end{cases} \tag{17}$$

которая является решением следующей задачи:

$$\nabla^2 u_1(x) = F(x), \qquad x \in \Omega; \qquad u_1(x)|_{\Gamma^{\pm}} = 0, \tag{18}$$

где $F(x) = \lambda(\vec{V}_1 \nabla) u_0^+$ при $x \in \Omega_0^+$ и $F(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega_0^-$. Итак, доказана лемма.

Лемма. *Пусть функции* $u_0(x)$ *и* $u_1(x)$ *являются решениями соответственно задач* (11) *и* (18). *Тогда приближения* $u_0^{\pm}(x)$ *и* $u_1^{\pm}(x)$ *можно задать формулами* (10) *и* (17). *При этом* Γ_0 *представляет собой поверхность класса* C^{∞} *(в предположении звездности поверхностей* $\Gamma^{\pm}$*), не имеющую самопересечений и расположенную относительно* Γ^+ *и* Γ^- *аналогично поверхности* Γ *в задаче* (1)–(6).

4. Второе приближение. Рассмотрим теперь второе приближение $(\vec{V}_2, u_2^{\pm}, \rho_2)$ задачи (1)–(6) для малых чисел Рейнольдса. Имеем

$$\begin{gathered}(\vec{V}_2\nabla)\vec{V}_1 + \nabla p_1 = \nabla^2\vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+)u_1^+, \qquad \operatorname{div}\vec{V}_2 = 0, \qquad x \in \Omega_0^+; \qquad \vec{V}_2|_{\partial\Omega_0^+} = 0,\\ \lambda(\vec{V}_1\nabla)u_1^+ + \lambda(\vec{V}_2\nabla)u_0^+ = \nabla^2 u_2^+, \quad x \in \Omega_0^+; \quad \nabla^2 u_2^- = 0, \quad x \in \Omega_0^-, \quad u_2^{\pm}(x)|_{\Gamma^{\pm}} = 0;\\ \left[|\nabla u_0(x)|\rho_2(\omega) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial\vec{n}_0}\cdot\rho_1(\omega) + \frac{1}{2}\frac{d^2u_0}{dt^2}(x(\omega) + t\vec{n}_0(\omega)\rho_1(\omega))|_{t=0} + u_2(x)\right]\Bigg|_{\Gamma_0} = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Кроме того, в окрестности точки $x(\omega^*) \in \Gamma_0$ справедливо представление

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u^{\pm}}{\partial x_\kappa}\right)^2\Bigg|_{\Gamma} &= \left(\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa}\right)^2 + 2\operatorname{Re}\left[z_1(x_1,x_2)\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa\partial x_3} + \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial x_\kappa}\right] +\\ &+ (\mathrm{Re})^2\left[\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa\partial x_3} + \left(\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial x_\kappa}\right)^2 + 2z_2(x_1,x_2)\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa\partial x_3} + 2z_1(x_1,x_2)\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial^2 u_1^{\pm}}{\partial x_\kappa\partial x_3} +\right.\\ &\left.+ 2\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial x_\kappa} + 2z_1(x_1,x_2)\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial x_\kappa\partial x_3}\right] + o((\mathrm{Re})^2), \qquad \kappa = 1,2,3.\end{aligned}$$

Отсюда, аналогично тому как это сделано в лемме для приближения $u_1^{\pm}(x)$, следует, что можно ввести в рассмотрение функцию $u_2(x)$ по формуле $u_2(x) = u_2^+(x)$ при $x \in \Omega_0^+$ и $u_2(x) = u_2^-(x)$ при $x \in \Omega_0^-$. Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Пусть функции* $u_0(x)$, $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *— решения соответственно задач* (11), (18) *и* (19). *Тогда при малых числах Рейнольдса справедлива формула*

$$\begin{aligned}x &= x(\omega) - \vec{n}_0(\omega)\frac{\operatorname{Re}u_1(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|} - \frac{(\mathrm{Re})^2\vec{n}_0(\omega)}{|\nabla u_0(x(\omega))|}\left[\rho_1(\omega)\frac{\partial u_1(x(\omega))}{\partial\vec{n}_0} + \frac{1}{2}\frac{d^2u_0}{dt^2}(x(\omega) +\right.\\ &\left.+ t\vec{n}_0(\omega)\rho_1(\omega))|_{t=0} + u_2(x(\omega))\right] + 0((\mathrm{Re})^2),\\ \rho_1(\omega) &= -\frac{u_1(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|}, \qquad \omega \in \Gamma_0.\end{aligned} \tag{20}$$

Формула (20) позволяет исследовать зависимость Γ от чисел Re.

Замечание. Функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданные в $\overline{\Omega}$, можно построить методом Ритца, используя затем теоремы Харрик [5, 6] и рассуждения, предложенные в [7, с. 126], можно доказать также сходимость соответствующих приближений Ритца к точным решениям в $W_2^1(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega})$ [8].

1. *Дегтярев С. П.* Классическая разрешимость многомерной стационарной задачи Стефана с конвекцией // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 3. – С. 10–13.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.

3. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
4. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–488.
5. *Харик И. Ю.* О проблеме аппроксимации функций, связанной с исследованием сходимости вариационных процессов // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 2. – С. 157–160.
6. *Харик И. Ю.* О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида // Мат. сб. – 1955. – **37**, № 2. – С. 353–384.
7. *Ильин В. П.* Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1959. – **53**. – С. 64–127.
8. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1385–1394.

Институт проблем искусственного интеллекта
НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 18.12.2006

УДК 517.956.4

© **2007**

О. В. Шиян

О динамике бегущих волн в системе уравнений Ван-дер-Поля с малой диффузией

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

The dynamics of traveling waves for a system of parabolic equations of the van-der-Pol type with small diffusion on a circle with radius r is studied. The existence, interaction, asymptotic form, and stability of these waves are analyzed. It is proved that the number of stable traveling waves increases with the radius r, and it is shown that the interaction of the waves satisfies the 1 : 2 *principle.*

Рассмотрим систему параболических уравнений ван-дер-полевского типа:

$$\begin{aligned} &\dot{u} - v = \delta(d_u \Delta u + d_{uv} \Delta v), \\ &\dot{v} + u = 2\delta(1 - u^2)v + \delta(d_{vu} \Delta u + d_v \Delta v) \end{aligned} \tag{1}$$

с периодическими граничными условиями

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi r), \qquad v(t, x) = v(t, x + 2\pi r). \tag{2}$$

Здесь точка означает дифференцирование по переменной t; $0 < \delta \ll 1$ — коэффициент трения; d_u, d_{uv}, d_{vu}, d_v — коэффициенты диффузии; Δ — одномерный оператор Лапласа; $r > 0$. Далее предполагается, что $4d_u d_v \geqslant (d_{uv} + d_{vu})^2$. В этом случае система (1)–(2) является системой параболических уравнений типа реакции-диффузии [1].

Система (1)–(2) является простейшей математической моделью автоволновой среды и изучалась в ряде работ (см. [2–4] и цитированную в них литературу).