УДК 517 . 928

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Р. І. Петришин, П. М. Дудницький

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: rompetr@math.chnu.cv.ua

We prove new error estimates for an averaging method applied to oscillating systems with slowly changing frequencies and having impulsive effects at fixed times. The main assumption relates to the resonance harmonics as opposed to the assumptions on all harmonics of the right-hand side of the system.

Доведено нові оцінки похибки методу усереднення для коливних систем з повільно змінними частотами та імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Основне припущення при цьому накладається не на всі гармоніки правої частини системи, а лише на резонансні.

1. Вступ. Розглянемо нелінійну коливну систему звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1] у фіксовані моменти часу t_ν, $\nu \geq 1$, вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(x,\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta x|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p_\nu(x,\varphi), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q_\nu(x,\varphi). \tag{1}$$

Тут $x \in D \subset R^n, \varphi \in R^m, \tau = \varepsilon t \in [0,L], \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр, $\overline{\tau}_\nu = \tau_{\nu+1} - \tau_\nu \geq \theta_1$ при $\nu \geq 0$, $t_0 = 0$, $\tau_\nu = \varepsilon t_\nu$, L і θ_1 — додатні числа, D — обмежена область, R^s при $s = n$, m — s-вимірний дійсний евклідів простір.

Будемо вважати, що дійсні функції a, b, p_ν, q_ν є неперервними по $(x,\varphi,\tau) \in D \times R^m \times \times [0,L]$, обмежені числом σ_1 і задовольняють умову Ліпшиця по x, φ зі сталою Ліпшиця σ_1, а ω, $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial\tau}$ — неперервні по $(x,\tau) \in D \times [0,L]$.

Нехай a і p_ν, $\nu \geq 1$, належать класу майже періодичних по кожній із координат φ_j, $j = \overline{1,m}$, вектора φ рівномірно відносно $x \in D$, $\tau \in [0,L]$, $\nu \geq 1$ функцій, які розкладаються в ряди Фур'є

$$a(x,\varphi,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x,\tau) e^{i(\lambda_k,\varphi)}, \quad p_\nu(x,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{\nu,k}(x) e^{i(\lambda_k,\varphi)}, \tag{2}$$

де i — уявна одиниця, $\lambda_k = (\lambda_k^{(1)}, \ldots, \lambda_k^{(m)})$ — векторний показник Фур'є, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k \neq 0$ при $|k| \geq 1$, (λ_k,φ) — скалярний добуток у R^m векторів λ_k і φ. Далі під нормою вектора будемо розуміти евклідову норму, а норма матриці узгоджена з евклідовою нормою вектора.

Припустимо, що ряди

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|a_k(x)\|, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|p_{\nu,k}(x)\| \tag{3}$$

збігаються рівномірно на множині $x \in D, \tau \in [0, L], \nu \geq 1$, а також існують границі

$$\lim_{\nu\to\infty} \bar{t}_\nu = \theta > 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} p_\nu(x, \varphi) = p(x, \varphi), \tag{4}$$

причому друга з них рівномірно по $x \in D, \varphi \in R^m$.

Згідно із зробленими вище припущеннями $p(x, \varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по x, φ зі сталою Ліпшиця σ_1, майже періодична по φ_j, $j = \overline{1, m}$, рівномірно відносно x,

$$p(x, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(x) e^{i(\lambda_k, \varphi)}, \tag{5}$$

а ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \|p_k(x)\|$ збігається рівномірно в області D.

Побудуємо усереднену за всіма швидкими змінними $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ систему диференціальних рівнянь для повільних змінних

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{a}(\overline{x}, \tau) + \frac{1}{\theta}\overline{p}(\overline{x}), \tag{6}$$

де

$$(\overline{a}(\overline{x}, \tau); \overline{p}(\overline{x})) = \lim_{T\to\infty} T^{-m} \int_0^T \ldots \int_0^T (a(\overline{x}, \varphi, \tau); p(\overline{x}, \varphi)) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m = (a_0(\overline{x}, \tau); p_0(\overline{x})).$$

Зазначимо, що на відміну від (1) система (6) є гладкою і не підлягає імпульсній дії. Такий підхід побудови гладкої усередненої системи вперше запропонував А. М. Самойленко для системи стандартного вигляду з усередненням по часовій змінній [2].

Ставиться задача отримати ефективну оцінку різниці $x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau)$ для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де $x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)$ і $\overline{x}(\tau)$ — розв'язки систем відповідно (1) і (6), для яких $x(0, \varepsilon) = \overline{x}(0)$, а $\varphi(0, \varepsilon)$ є довільним. У роботах [3, 4] обґрунтовано метод усереднення у випадку $\omega(x, \tau) \equiv \omega(\tau)$, а в статті [5] одержано достатні умови для доведення оцінки вигляду $\|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| \leq c\varepsilon^\alpha$ з деякими додатними сталими c і α, причому ці умови виражаються через всі гармоніки функцій $a(x, \varphi, \tau)$ і $p(x, \varphi)$. У даній роботі встановимо оцінки похибки методу усереднення при істотних припущеннях не на всі, а лише на резонансні гармоніки цих функцій. Зазначимо, що в системі з імпульсною дією (1) резонанс має місце тоді, коли вираз $(\lambda_k, \omega(x, \tau)) + \dfrac{2\pi}{\theta}$, де $k \neq 0$, s — ціле число, дорівнює нулю або близький до нього. Слід зауважити, що при обґрунтуванні методу усереднення для багаточастотних систем без імпульсної дії на суттєвий вплив лише резонансних гармонік вперше вказав М. М. Хапаєв [6].

2. Допоміжні твердження. Позначимо через $\overline{D}_\rho$ замикання множини точок, які належать D разом із своїм ρ-околом, і виберемо $\rho > 0$ настільки малим, щоб $\overline{D}_\rho \neq \emptyset$. Нехай $h_\mu(z)$, $0 < \mu < \dfrac{\pi}{\theta}$, є парною як функція z і визначається формулою [7]

$$h_\mu(z) = \begin{cases} 1, & z \in \left[0, \dfrac{1}{2}\mu\right], \\ 16\mu^{-4}z^2(\mu - z)^2, & z \in \left(\dfrac{1}{2}\mu, \mu\right), \\ 0, & z \geq \mu, \end{cases}$$

а $H_\mu(z)$ — періодична з періодом $\dfrac{2\pi}{\theta}$ функція, яка збігається з $h_\mu(z)$ при $z \in \left[-\dfrac{\pi}{\theta}, \dfrac{\pi}{\theta},\right]$. Очевидно, що функції $h_\mu(z)$ і $H_\mu(z)$ — неперервно диференційовні по $z \in R$ і задовольняють нерівності

$$0 \leq h_\mu(z) \leq 1, \quad 0 \leq H_\mu(z) \leq 1, \quad \left|\frac{d}{dz} \leq h_\mu(z)\right| \leq \frac{32}{\mu},$$
$$\left|\frac{d}{dz} \leq H_\mu(z)\right| \leq \frac{32}{\mu}, \quad z \in R. \tag{7}$$

Побудуємо функції

$$\delta_1(x, \varphi, \tau, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x, \tau) h_\mu((\lambda_k, \omega(x, \tau))) e^{i(\lambda_k, \varphi)},$$

$$\delta_2(x, \varphi, \tau, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(x) H_\mu((\lambda_k, \omega(x, \tau))) e^{i(\lambda_k, \varphi)}$$

і припустимо, що виконується нерівність

$$f_k(x, \varphi, \tau, s, \mu_1) \equiv \left((\lambda_k, \omega(x, \tau)) - \frac{2\pi}{\theta}s\right)^2 + \left(\lambda_k, \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega(x, \tau)}{\partial x}\delta_1(x, \varphi, \tau, \mu)\right) \times$$
$$\times \left(\lambda_k, \frac{\partial\omega(x, \tau)}{\partial x}\delta_2(x, \varphi, \tau, \mu_1)\right) \geq \gamma_N^2 \tag{8}$$

для всіх натуральних N, $x \in D$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in [0, L]$, $s \in Z$, $1 \leq |k| \leq N$ і деякого $\mu_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{\theta}\right)$, де $\gamma_N < \dfrac{2\pi}{\theta}$ — додатне число, залежне від N, Z — множина всіх цілих чисел.

Нехай $\overline{x}(\tau)$ — деякий розв'язок усередненої системи (6), який визначений і належить D при $\tau \in [0, L]$. Оскільки D — відкрита множина, то існує таке число $\rho > 0$, що $\overline{x}(\tau) \in \in \overline{D}_{2\rho}$ для всіх $\tau \in [0, L]$. Розглянемо далі розв'язок $x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)$ системи (1), для якого $x(0, \varepsilon) = \overline{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon)$ — довільне, і позначимо через $[0, L_1] \subset [0, L]$, $L_1 = L_1(\varepsilon)$, максимальний відрізок, що визначається умовою $x(\tau, \varepsilon) \in \overline{D}_\rho \ \forall\tau \in [0, L_1]$. Існування розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією забезпечує належність правих частин рівнянь в (1) класу Ліпшиця [1], а його єдиність — достатня малість числа ε_0.

Для кожних k, $1 \le |k| \le N$, і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ дослідимо поведінку функції $(\lambda_k, \omega(x(\tau, \varepsilon), \tau))$ при $\tau \in [0, L_1]$. Оскільки

$$\Delta\omega(x,\tau)|_{\tau=\tau_\nu} = (\omega(x + \varepsilon p_\nu(x,\varphi),\tau) - \omega(x,\tau))|_{\tau=\tau_\nu} =$$
$$= \left(\varepsilon \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x} p_\nu(x,\varphi) + \varepsilon\widetilde{p}_\nu(x,\varphi,\tau,\varepsilon)\right)\Big|_{\tau=\tau_\nu},$$

де

$$\widetilde{p}_\nu(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial\omega(x + \varepsilon p_\nu(x,\varphi)l,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x}\right) dl \; p_\nu(x,\varphi),$$

$x = x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau,\varepsilon)$ і $\|p_\nu(x,\varphi)\| \le \sigma_1$, то на підставі рівномірної неперервності функції $\dfrac{\partial\omega(x,\tau)}{dx}$ на множині $\overline{D}_\rho \times [0,L]$ для довільного $\mu_2 > 0$ існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_2) > 0$, що

$$\|\widetilde{p}_\nu(x,\varphi,\tau,\varepsilon)\| < \mu_2 \;\; \forall (x,\varphi,\tau,\varepsilon) \in \overline{D}_\rho \times R^m \times [0,L] \times (0,\varepsilon_0], \quad \nu \ge 1.$$

Тоді при $0 \le \tau_0 < \tau \le L_1$ маємо рівність

$$(\lambda_k,\omega) = (\lambda_k,\omega)|_{\tau=\tau_0} + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial\tau} + \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}\delta_1\right) d\tau + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}(p - \delta_2) d\tau +$$
$$+ \varepsilon \sum_{\tau_0 \le \tau_\nu < \tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}\delta_2\Big|_{\tau=\tau_\nu} + \varepsilon \sum_{\tau_0 \le \tau_\nu < \tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}(p - \delta_2)\Big|_{\tau=\tau_\nu} +$$
$$+ \varepsilon \sum_{\tau_0 \le \tau_\nu < \tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}(p_\nu - p)\Big|_{\tau=\tau_\nu} + \varepsilon^2 \sum_{\tau_0 \le \tau_\nu < \tau} (\lambda_k, \widetilde{p}_\nu)\Big|_{\tau=\tau_\nu}, \tag{9}$$

в якій $\omega = \omega(x,\tau)$, $a = a(x,\varphi,\tau)$, $p_\nu = p_\nu(x,\varphi,\tau)$, $\widetilde{p}_\nu = \widetilde{p}_\nu(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$, $\delta_j = \delta_j(x,\varphi,\tau,\mu_1)$ при $j = 1,2$, $x = x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$.

Нехай μ_3 — довільне додатне число. Виберемо настільки велике натуральне $\nu_0 = \nu_0(\mu_3)$, що

$$\|p_\nu(x,\varphi) - p(x,\varphi)\| \le \mu_3 \quad \forall (x,\varphi) \in D \times R^m, \; \nu \ge \nu_0(\mu_3).$$

Звідси дістанемо нерівності

$$\left\|\varepsilon \sum_{\tau_0 \le \tau_\nu < \tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}(p_\nu - p)\Big|_{\tau=\tau_\nu}\right\| \le 2\sigma_1^2\|\lambda_k\|\varepsilon\nu_0(\mu_3) + \sigma_1\theta_1^{-1}\|\lambda_k\|\mu_3(\tau - \tau_0 + \varepsilon\theta_1),$$
$$\left\|\varepsilon^2 \sum_{\tau_0 \le \tau_\nu < \tau} (\lambda_k, \widetilde{p}_\nu)\Big|_{\tau=\tau_\nu}\right\| \le \theta_1^{-1}\|\lambda_k\|\varepsilon\mu_2(\tau - \tau_0 + \varepsilon\theta_1). \tag{10}$$

Виберемо далі натуральне $N_1 = N_1(N)$ настільки великим, щоб

$$\sum_{|k|=N_1+1}^{\infty} \|a_k(x,\tau)\| \leq \frac{c\gamma_N^2}{2\sigma_1 r_N^2}, \quad \sum_{|k|=N_1+1}^{\infty} \|p_k(x)\| \leq \frac{c\gamma_N^2}{2\sigma_1 r_N^2}, \; x \in D, \tau \in [0, L], \tag{11}$$

де $r_N = \max\limits_{1\leq|k|\leq N} \|\lambda_k\|$, а c — стала, незалежна від N, яку означимо нижче.

Розглянемо рівності

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}(a-\delta_1)d\tau = \sum_{|s|=1}^{\infty} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} g_s(x,\varphi,\tau)d\tau,$$

$$\varepsilon \sum_{\tau_0\leq\tau_\nu<\tau} \frac{\partial(\lambda_k,\omega)}{\partial x}(p-\delta_2)\Big|_{\tau=\tau_\nu} = \sum_{|s|=1}^{\infty} \varepsilon \sum_{\tau_0\leq\tau_\nu<\tau} G_s(x,\varphi,\tau)|_{\tau=\tau_\nu},$$

в яких

$$g_s(x,\varphi,\tau) = \frac{\partial(\lambda_k,\omega(x,\tau))}{\partial x} a_s(x,\tau)[1 - h_{\mu_1}((\lambda_s,\omega(x,\tau)))]e^{i(\lambda_s,\varphi)},$$

$$G_s(x,\varphi,\tau) = \frac{\partial(\lambda_k,\omega(x,\tau))}{\partial x} p_s(x)[1 - H_{\mu_1}((\lambda_s,\omega(x,\tau)))]e^{i(\lambda_s,\varphi)}.$$

На підставі (11) маємо

$$\left\|\sum_{|s|=N_1+1}^{\infty} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} g_s(x,\varphi,\tau)d\tau\right\| \leq \frac{c\gamma_N^2}{2r_N}(\tau-\tau_0),$$

$$\left\|\sum_{|s|=N_1+1}^{\infty} \varepsilon \sum_{\tau_0\leq\tau_\nu<\tau} G_s(x,\varphi,\tau)|_{\tau=\tau_\nu}\right\| \leq \frac{c\gamma_N^2}{2r_N}\varepsilon \sum_{\tau_0\leq\tau_\nu<\tau} 1 \leq \frac{c\gamma_N^2}{2\theta_1 r_N}(\tau-\tau_0+\varepsilon\theta_1). \tag{12}$$

Залишилось оцінити

$$I = \sum_{|s|=1}^{N_1} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} g_s(x,\varphi,\tau)d\tau, \quad S = \sum_{|s|=1}^{N_1} \varepsilon \sum_{\tau_0\leq\tau_\nu<\tau} G_s(x,\varphi,\tau)|_{\tau=\tau_\nu}. \tag{13}$$

Спочатку розглянемо суму I. Для її оцінки виберемо досить мале додатне число l, яке буде означене нижче, і подамо відрізок $[\tau_0, \tau]$ у вигляді

$$[\tau_0, \tau] = \bigcup_{r=0}^{r_0} T_r,$$

де $T_r = [\tau_0 + lr, \tau_0 + l(r+1)]$ при $r < r_0$ і $T_{r_0} = [\tau_0 + lr, \tau]$, де r_0 — ціла частина числа $(\tau - \tau_0)l^{-1}$. Зафіксуємо деяке r, $0 \le r \le r_0$. Тоді, поклавши $\widetilde{\tau}^0 = \tau_0 + lr$, $x^0 = x(\widetilde{\tau}^0, \varepsilon)$, $\theta^0 = \theta(\widetilde{\tau}^0, \varepsilon)$, $\theta(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau, \varepsilon) - \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^\tau \omega(x(t,\varepsilon), t)dt$, одержимо

$$\left\|\sum_{|s|=1}^{N_1}\int_{T_r} g_s(x,\varphi,\tau)d\tau\right\| \le \sum_{|s|=1}^{N_1}\left\|g_s(x^0,\theta^0,\widetilde{\tau}^0)\right\|\left|\int_{T_r}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau(\lambda_s, \omega(x(t,\varepsilon),t))dt\right\}d\tau\right| +$$

$$+\sum_{|s|=1}^{N_1}\int_{T_r}\left\|g_s\left(x, \theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(x(t,\varepsilon),t)dt, \tau\right) -\right.$$

$$\left. - g_s\left(x^0, \theta^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(x(t,\varepsilon),t)dt, \widetilde{\tau}^0\right)\right\|d\tau. \tag{14}$$

Згідно із зробленими вище припущеннями функція $\dfrac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x}$ рівномірно неперервна на множині $\overline{D}_\rho \times [0, L]$, а функція $a_s(x,\tau)$ одностайно по s рівномірно неперервна на цій же множині. Оскільки $x(\tau,\varepsilon)$ і $\theta(\tau,\varepsilon)$ за час $\tau \in T_r$ змінюються на величину, що не перевищує $\sigma_2 l$, де σ_2 — стала, незалежна від ε, l і r, то для довільного $\mu_4 > 0$ існує таке $l = l(\mu_4) > 0$, що

$$\|a_s(x,\tau) - a_s(x^0, \widetilde{\tau}^0)\| < \mu_4, \quad \left\|\frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial\omega(x^0,\widetilde{\tau}^0)}{\partial x}\right\| < \mu_4 \tag{15}$$

для всіх $(x,\tau) \in \overline{D}_\rho \times [0,L]$, $(x^0, \widetilde{\tau}^0) \in \overline{D}_\rho \times [0,L]$ при $\|x - x^0\| < \sigma_2 l$ і $|\tau - \widetilde{\tau}^0| < l$. Тому

$$\sum_{|s|=1}^{N_1}\int_{T_r}\left\|g_s\Big(x,\varphi,\tau\Big) - g_s\left(x^0, \theta^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(x(t,\varepsilon),t)dt, \widetilde{\tau}^0\right)\right\|d\tau \le$$

$$\le \sigma_3 r_N (1 + r_{N_1}) N_1 l\left(\mu_4 + \frac{l}{\mu_1}\right), \tag{16}$$

де $\sigma_3 = 2\sigma_1[2 + 32\sigma_1^2(1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2](1 + \theta^{-1}\pi)$.

Нехай $|(\lambda_s, \omega(x^0, \widetilde{\tau}^0))| \le \dfrac{1}{2}\mu_1$. Тоді $g_s(x^0, \theta^0, \widetilde{\tau}^0) = 0$ за означенням функції $h_{\mu_1}(z)$. Припустимо тепер, що $|(\lambda_s, \omega(x^0, \widetilde{\tau}^0))| > \dfrac{1}{2}\mu_1$. З рівності

$$(\lambda_s, \omega(x,\tau)) = (\lambda_s, \omega(x^0, \widetilde{\tau}^0)) + \int_{\widetilde{\tau}^0}^\tau\left[\frac{\partial(\lambda_s, \omega(x,\tau))}{\partial\tau} + \frac{\partial(\lambda_s, \omega(x,\tau))}{\partial x}a(x,\varphi,\tau)\right]d\tau +$$

$$+\sum_{\widetilde{\tau}^0 \le \tau_\nu < \tau}\Delta(\lambda_s, \omega(x,\tau))|_{\tau=\tau_\nu}$$

і нерівностей

$$\|\Delta\omega(x,\tau)|_{\tau=\tau_\nu}\| \le \sigma_1\|\Delta x|_{\tau=\tau_\nu}\| \le \sigma_1^2\varepsilon, \quad \tau_{\nu+1}-\tau_\nu \ge \varepsilon\theta_1$$

дістанемо нерівність

$$|(\lambda_s,\omega(x,\tau)) - (\lambda_s,\omega(x^0,\widetilde{\tau}^0))| \le \sigma_4 r_{N_1} l \tag{17}$$

при $\varepsilon \le l$ і $\tau \in T_r$, де $\sigma_4 = \sigma_1[1+\sigma_1+\sigma_1\theta_1^{-1}(1+\theta_1)]$. Отже, якщо $|(\lambda_s,\omega(x^0,\widetilde{\tau}^0))| > \dfrac{1}{2}\mu_1$, то

$$|(\lambda_s,\omega(x(\tau,\varepsilon),\tau))| \ge \frac{1}{4}\mu_1, \quad \tau\in T_r, \varepsilon\in(0,\varepsilon_0], \tag{18}$$

при умові $r_{N_1} l < (4\sigma_4)^{-1}\mu_1$.

Позначимо для зручності через $\tau_1,\ldots,\tau_n$ точки імпульсної дії, які належать відрізку $T_r \equiv [\widetilde{\tau}^0, \underset{\sim}{\tau}^0]$,

$$\Omega_s(\tau,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau z_s(\tau,\varepsilon,0)d\tau\right\}, \quad z_s(\tau,\varepsilon,s_0) = (\lambda_s,\omega(x(\tau,\varepsilon),\tau)) - \frac{2\pi}{\theta}s_0,$$

s_0 — ціле число. Тоді, інтегруючи частинами, одержуємо

$$\int\limits_{T_r}\Omega_s(\tau,\varepsilon)d\tau = \frac{\varepsilon}{i}\left(\frac{\Omega_s(\tau,\varepsilon)}{z_s(\tau,\varepsilon,0)}\Big|_{\widetilde{\tau}^0}^{\tau_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Omega_s(\tau,\varepsilon)}{z_s(\tau,\varepsilon,0)}\Big|_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} + \frac{\Omega_s(\tau,\varepsilon)}{z_s(\tau,\varepsilon,0)}\Big|_{\tau_n}^{\underset{\sim}{\tau}^0} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{T_r}\frac{\Omega_s(\tau,\varepsilon)\frac{dz_s(\tau,\varepsilon,0)}{d\tau}}{z_s^2(\tau,\varepsilon,0)}d\tau\right). \tag{19}$$

Враховуючи нерівності (18) та

$$\left|\frac{1}{z_s(\tau_k,\varepsilon,0)} - \frac{1}{z_s(\tau_k+0,\varepsilon,0)}\right| \le \frac{16\sigma_1^2\varepsilon r_{N_1}}{\mu_1^2},$$

з (19) отримуємо оцінку

$$\left|\int\limits_{T_r}\Omega_s(\tau,\varepsilon)d\tau\right| \le \sigma_5(1+r_{N_1})\frac{\varepsilon}{\mu_1}\left(1+\frac{l}{\mu_1}\right), \tag{20}$$

в якій $\sigma_5 = 16[1+\sigma_1^2\theta_1^{-1}(1+\theta_1)+\sigma_1(1+\sigma_1)]$.

Об'єднуючи нерівності (14), (16), (20) і враховуючи, що $r_0 \le (\tau-\tau_0)l^{-1}$, остаточно маємо

$$\|I\| \le (2\sigma_1^2\sigma_5+\sigma_3)r_N(1+r_{N_1})N_1\left(\mu_4+\frac{l}{\mu_1}+\frac{\varepsilon}{\mu_1 l}+\frac{\varepsilon}{\mu_1^2}\right)(\tau-\tau_0+l). \tag{21}$$

Перейдемо далі до оцінки суми S. Як і у випадку дослідження I, дістанемо нерівність

$$\left\|\sum_{|s|=1}^{N_1}\varepsilon\sum_{\widetilde{\tau}^0\le\tau_\nu<\underset{\sim}{\tau}^0}G_s(x,\varphi,\tau)|_{\tau=\tau_\nu}\right\|\le\sum_{|s|=1}^{N_1}\varepsilon\sum_{\widetilde{\tau}^0\le\tau_\nu<\underset{\sim}{\tau}^0}\Bigg\|G_s(x,\varphi,\tau)|_{\tau=\tau_\nu}-$$
$$-G_s\left(x^0,\theta^0+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_\nu}\omega(x(t,\varepsilon),t)dt,\widetilde{\tau}^0\right)\Bigg\|+$$
$$+\left\|G_s(x^0,\theta^0,\widetilde{\tau}^0)\right\|\left|\varepsilon\sum_{\widetilde{\tau}^0\le\tau_\nu<\underset{\sim}{\tau}^0}\Omega_s(\tau_\nu,\varepsilon)\right|. \qquad (22)$$

Оскільки $p_s(x)$ задовольняє умову Ліпшиця по x зі сталою Ліпшиця σ_1, то

$$\sum_{|s|=1}^{N_1}\varepsilon\sum_{\widetilde{\tau}^0\le\tau_\nu<\underset{\sim}{\tau}^0}\left\|G_s(x,\varphi,\tau)|_{\tau=\tau_\nu}-G_s\left(x^0,\theta^0+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_\nu}\omega(x(t,\varepsilon),t)dt,\widetilde{\tau}^0\right)\right\|\le$$
$$\le\sigma_6 r_N\left(1+r_{N_1}\right)N_1 l\left(\mu_4+\frac{l}{\mu_1}\right), \qquad (23)$$

де $\sigma_6=2[1+2\sigma_1\sigma_2\pi\theta_1^{-1}+32\sigma_1^2(1+\sigma_2)](1+\theta_1)$.

Нам залишилось оцінити суму

$$\sum_{|s|=1}^{N_1}\left\|G_s(x^0,\theta^0,\widetilde{\tau}^0)\right\|\left|\varepsilon\sum_{\widetilde{\tau}^0\le\tau_\nu<\underset{\sim}{\tau}^0}\Omega_s(\tau_\nu,\varepsilon)\right|.$$

Якщо $|z_s(\widetilde{\tau}^0,\varepsilon,s_0)|\le\dfrac{1}{2}\mu_1$ при деякому цілому s_0, то на підставі означення функції $H_{\mu_1}(z)$ маємо $G_s(x^0,\theta^0,\widetilde{\tau}^0)=0$. Тому вважатимемо, що

$$\frac{1}{2}\mu_1<|z_s(\widetilde{\tau}^0,\varepsilon,s_0)|\le\frac{\pi}{\theta},$$

де s_0 — найближче ціле число до числа $\dfrac{\theta}{2\pi}(\lambda_s,\omega(x^0,\widetilde{\tau}^0))$. Використовуючи нерівність (17) і припущення $\mu_1<\dfrac{\pi}{\theta}$, одержуємо нерівність

$$\frac{1}{4}\mu_1<|z_s(\tau,\varepsilon,s_0)|<\frac{2\pi}{\theta}-\frac{1}{4}\mu_1$$

для всіх $\tau\in[\widetilde{\tau}^0,\underset{\sim}{\tau}^0]=T_r$ при умові $r_{N_1}l<\mu_1(4\sigma_4)^{-1}$.

За означенням збіжності послідовності $\{\bar{t}_j\}$ для довільного $\xi>0$ існує таке $j_0(\xi)$, що

$$|\bar{t}_j-\varepsilon\theta|\le\varepsilon\xi,\quad|\overline{\tau}_j-\overline{\tau}_{j_1}|\le2\varepsilon\xi \qquad (24)$$

при $j \geq j_0(\xi)$ і $j_1 \geq j_0(\xi)$, де $\overline{\tau}_j = \varepsilon \bar{t}_j$. Тоді, як і в роботі [8], встановлюємо нерівність

$$\left| \varepsilon \sum_{\widetilde{\tau}^0 \leq \tau_\nu < \underset{\sim}{\tau}^0} \Omega_s(\tau_\nu, \varepsilon) \right| \leq \sigma_7 (1 + r_{N_1}) \left(\varepsilon j_0(\xi) + \frac{\varepsilon}{\mu_1} + \frac{\varepsilon + \xi}{\mu_1^2} l \right) \tag{25}$$

з деякою незалежною від N, ε, l і μ_1 сталою σ_7 при виконанні обмеження

$$\xi r_{N_1} < \frac{\theta}{8\sigma_1} \mu_1.$$

З нерівностей (22), (23) і (25) дістаємо оцінку

$$\|S\| \leq (\sigma_1^2 + 2\sigma_6\sigma_7) r_N (1 + r_{N_1}) N_1 \left(\mu_4 + \frac{l}{\mu_1} + \frac{\varepsilon j_0(\xi)}{l} + \frac{\varepsilon}{\mu_1 l} + \frac{\varepsilon + \xi}{\mu_1^2} \right) (\tau - \tau_0 + l). \tag{26}$$

Припустимо тепер, що

$$|z_k(\tau_0, \varepsilon, s_0)| \leq \frac{1}{2} \gamma_N$$

$\Big(s_0$ — найближче ціле число до числа $\dfrac{\theta}{2\pi}(\lambda_k, \omega(x(\tau_0, \varepsilon), \tau_0)),\ |s_0| \leq \dfrac{\theta\sigma_1}{2\pi}\|\lambda_k\| + 1\Big)$. Тоді з нерівності (17), взятої при $\tau_0 = \widetilde{\tau}^0$, $l = \sigma_8 \gamma_N r_N^{-1} = h(N)$, де $\sigma_8 = (\sqrt{2} - 1)(2\sigma_4)^{-1}$, одержуємо оцінку

$$|z_k(\tau, \varepsilon, s_0)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma_N, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_0 + h(N)] \equiv T. \tag{27}$$

На підставі нерівностей (8) і (27) отримуємо нерівність

$$\left(\lambda_k, \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta_1 \right) \left(\lambda_k, \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta_2 \right) \geq \frac{1}{2} \gamma_N^2 \tag{28}$$

для всіх $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + h(N)]$, де $\omega = \omega(x, \tau)$, $\delta_j = \delta_j(x, \varphi, \tau, \mu_1)$ при $j = 1, 2$, $x = x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon)$. Оскільки $\dfrac{\partial \omega}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$, δ_1 і δ_2 обмежені на множині $\overline{D}_\rho \times R^m \times [0, L]$, а $\|\overline{\lambda}_k\| = 1$, де $\overline{\lambda}_k = \lambda_k \|\lambda_k\|^{-1}$, то, використовуючи нерівність (28), встановлюємо існування такої додатної сталої σ_9, незалежної від k, N, ε і τ^*, що в кожній точці $\tau^* \in T$ виконуються нерівності

$$\left(\overline{\lambda}_k, \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta_1 \right) \Big|_{\tau = \tau^*} \geq \sigma_9 \frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|^2}, \quad \left(\overline{\lambda}_k, \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta_2 \right) \Big|_{\tau = \tau^*} \geq \sigma_9 \frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|^2} \tag{29}$$

або

$$\left(\overline{\lambda}_k, \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta_1 \right) \Big|_{\tau = \tau^*} \leq -\sigma_9 \frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|^2}, \quad \left(\overline{\lambda}_k, \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta_2 \right) \Big|_{\tau = \tau^*} \leq -\sigma_9 \frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|^2}. \tag{30}$$

У зв'язку з тим, що при кожному $\mu_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{\theta}\right)$ функції $\dfrac{\partial\omega}{\partial\tau}(x,\tau)$, $\dfrac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x}$, $\delta_j(x,\varphi,\tau,\mu_1)$ при $j = 1, 2$ рівномірно неперервні на множині $\overline{D}_\rho \times R^m \times [0, L]$ і

$$\|\Delta x|_{\tau=\tau_\nu}\| \le \varepsilon\sigma_1, \quad \|\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu}\| \le \varepsilon\sigma_1,$$

при $\varepsilon \le \varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, \mu_1)$ — досить мале додатне число, з нерівностей (29) і (30) випливає, що

$$\left(\overline{\lambda}_k, \frac{\partial\omega(x(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega(x(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x}\delta_1(x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon),\tau,\mu_1)\right),$$

$$\left(\overline{\lambda}_k, \frac{\partial\omega(x(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x}\delta_2(x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon),\tau,\mu_1)\right)$$

як функції τ зберігають знак на відрізку T.

Таким чином, нехай, наприклад,

$$\left(\lambda_k, \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta_1\right) \ge \sigma_9\frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|}, \quad \left(\lambda_k, \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta_2\right) \ge \sigma_9\frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|}, \quad \tau \in T. \tag{31}$$

Позначимо

$$v = \inf_{\tau\in T}|z_k(\tau,\varepsilon,s_0)|.$$

Якщо v досягається в деяких точках відрізка T, то позначимо через $\widetilde{\tau}_0$ одну з них. Якщо ж $|z_k(\tau,\varepsilon,s_0)| > v$ при $\tau \in T$, то позначимо через $\widetilde{\tau}_0$ одну з тих точок τ_ν, $\nu \ge 1$, $\tau_\nu \in T$, для якої правостороння границя $\lim\limits_{\tau\to\tau_\nu+0}|z_k(\tau,\varepsilon,s_0)|$ є найменшою.

З рівності (9) і нерівностей (10), (12), (21), (26), (31) дістанемо оцінку

$$|z_k(\tau,\varepsilon,s_0) - z_k(\widetilde{\tau}_0,\varepsilon,s_0)| \ge \left[\frac{\sigma_9\gamma_N^2}{6\theta_2 r_N}(2+3\theta_2) - \frac{c\gamma_N^2}{2\theta_1 r_N}(1+\theta_1) - \sigma_{10}(N)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\varepsilon\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \frac{l}{\mu_1} + \frac{\varepsilon}{l\mu_1} + \frac{\varepsilon+\xi}{\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{l}(\nu_0(\mu_3) + j_0(\xi))\right)\right](|\tau - \widetilde{\tau}_0| + l) \tag{32}$$

при $|\tau - \widetilde{\tau}_0| \ge l$, $\tau \in T$ і $\varepsilon \le l\max\{\theta_1^{-1}; \theta_2^{-1}\}$ зі сталою

$$\sigma_{10}(N) = [\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6 + (1+\sigma_1)\theta_1^{-1} + 2\sigma_1^2(\sigma_5+\sigma_7)]r_N(1 + r_{N_1})N_1,$$

де $N_1 = N_1(N)$, а додатне число θ_2 визначається нерівністю $t_{\nu+1} - t_\nu \le \theta_2$ для всіх $\nu \ge 1$. Покладемо

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_9}{18\theta_2}(2+3\theta_2), \quad c = \frac{2\theta_1}{1+\theta_1}\sigma_{11}, \quad \sigma_{12}(N) = \sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N\sigma_{10}(N)}.$$

Тоді оцінка (32) приводить до нерівності

$$|z_k(\tau,\varepsilon,s_0) - z_k(\widetilde{\tau}_0,\varepsilon,s_0)| \ge \sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N}(|\tau - \widetilde{\tau}_0| + l), \quad \tau \in T \setminus [\widetilde{\tau}_0 - l, \widetilde{\tau}_0 + l] \tag{33}$$

за умови

$$\varepsilon\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \frac{l}{\mu_1} + \frac{\varepsilon}{l\mu_1} + \frac{\varepsilon+\xi}{\mu_1^2} + \frac{\nu_0(\mu_3)+j_0(\xi)}{l}\varepsilon \le \sigma_{12}(N). \tag{34}$$

Нехай $\mu_2 = 1$. Для кожного натурального N виберемо додатні $\mu_3 = \mu_3(N)$, $\mu_4 = \mu_4(N)$ і $\xi = \xi(N)$ настільки малими, щоб при $l = l(\mu_4) > 0$ виконувались нерівності

$$\max\left\{\mu_3; \mu_4; \frac{l}{\mu_1}; \frac{\xi}{\mu_1^2}\right\} \le \frac{1}{8}\sigma_{12}(N), \quad l r_{N_1} < \frac{\mu_1}{4\sigma_4}, \quad \xi r_{N_1} < \frac{\theta\mu_1}{8\sigma_1},$$

а додатне ε_0 будемо вважати настільки малим, що

$$\max\left\{\varepsilon_0; \frac{\varepsilon_0}{l\mu_1}; \frac{\varepsilon_0}{\mu_1^2}; \frac{\nu_0(\mu_3)+j_0(\xi)}{l}\varepsilon_0\right\} \le \frac{1}{8}\sigma_{12}(N),$$

$$\varepsilon_0 \le l \min\left\{\theta_1^{-1}; \theta_2^{-1}; 1\right\}$$

і виконуються нерівності (31) при $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, \mu_1)$. Викладене вище забезпечує виконання оцінки (34). Зазначимо, що вигляд оцінки (33) не зміниться, якщо замість нерівностей (31) розглянути нерівності

$$\left(\lambda_k, \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta_1\right) \le -\sigma_9 \frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|}, \quad \left(\lambda_k, \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta_2\right) \le -\sigma_9 \frac{\gamma_N^2}{\|\lambda_k\|}, \quad \tau \in T.$$

Враховуючи, що

$$\|\Delta z_k(\tau, \varepsilon, s_0)|_{\tau=\tau_\nu}\| \le \sigma_1^2 \|\lambda_k\| \varepsilon,$$

з оцінки (33) при $\varepsilon \le \sigma_1^{-2}\sigma_{11} r_N^{-2} \gamma_N^2 l$ легко одержати оцінку

$$|z_k(\tau, \varepsilon, s_0)| \ge \frac{1}{2}\sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N}(|\tau - \widetilde{\tau}_0| + l), \quad \tau \in T - [\widetilde{\tau}_0 - l, \widetilde{\tau}_0 + l]. \tag{35}$$

Таким чином, справедливою є наступна лема.

Лема 1. *Нехай виконуються припущення (2), (4), (8) і ряди (3) збігаються рівномірно. Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ на кожному відрізку $[\tau_0, \tau_0 + h(N)] \bigcap [0, L_1]$, $h(N) = \sigma_8 \gamma_N r_N^{-1}$, можна виділити відрізок довжини не більшої за $2l$, поза яким справедливою є оцінка (35) зі сталою σ_{11}, незалежною від ε, N, k і l.*

Розглянемо далі інтеграл

$$I_1 = \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega_k(t, \varepsilon) dt, \quad \tau \in T,$$

і розіб'ємо його на суму інтегралів по відрізках $[\tau_0, \widetilde{\tau}_0 - l]$, $[\widetilde{\tau}_0 - l, \widetilde{\tau}_0 + l]$ і $[\widetilde{\tau}_0 + l, \tau]$. Очевидно, що

$$\left|\int_{\widetilde{\tau}_0 - l}^{\widetilde{\tau}_0 + l} \Omega_k(t, \varepsilon) dt\right| \le 2l.$$

Якщо записати рівність вигляду (19) у випадку $T_r = [\widetilde{\tau}_0 + l, \tau]$ і скористатись оцінкою (35), то отримаємо нерівності

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1}{z_k(\tau_\nu, \varepsilon, 0)} - \frac{1}{z_k(\tau_\nu + 0, \varepsilon, 0)} \right| \leq \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_{11}} \right)^2 \frac{r_N^3}{\gamma_N^4} \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(l + \varepsilon\theta_1\nu)^2} <$$

$$< \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_{11}} \right)^2 \frac{r_N^3}{\gamma_N^4} \varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(l + \varepsilon\theta_1 t)^2} = \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_{11}} \right)^2 \frac{r_N^3}{\gamma_N^4 \theta_1 l},$$

$$\int\limits_{\widetilde{\tau}_0 + l}^{\tau} \frac{dt}{z_k^2(t, \varepsilon, 0)} \leq \frac{2}{\sigma_{11}^2} \frac{r_N^2}{\gamma_N^4 l}.$$

Аналогічні оцінки справджуються і у випадку $T_r = [\tau_0, \widetilde{\tau}_0 - l]$. Тому

$$|I_1| \leq \sigma_{13} \left(l + \frac{\varepsilon}{l} \frac{r_N}{\gamma_N^2} + \frac{\varepsilon}{l} \frac{r_N^3}{\gamma_N^4} \right), \quad \tau \in T, \tag{36}$$

де σ_{13} — стала, незалежна від k, N, l і ε.

Оцінимо тепер суму

$$S_1 = \varepsilon \sum_{\tau_0 \leq \tau_\nu < \tau} \Omega_k(\tau_\nu, \varepsilon), \quad \tau \in T.$$

Зазначимо, що при $\varepsilon \leq l$

$$\left| \varepsilon \sum_{\widetilde{\tau}_0 - l \leq \tau_\nu < \widetilde{\tau}_0 + l} \Omega_k(\tau_\nu, \varepsilon) \right| \leq \varepsilon \left(\frac{2l}{\varepsilon\theta_1} + 1 \right) \leq \frac{2 + \theta_1}{\theta_1} l.$$

Якщо на відрізку $[\widetilde{\tau}_0 + l, \tau]$ містяться часові моменти $\tau_1, \ldots, \tau_{j_0}, \ldots, \tau_n$ імпульсної дії, то для суми

$$S_1' = \varepsilon \sum_{\widetilde{\tau}_0 + l \leq \tau_\nu < \tau} \Omega_k(\tau_\nu, \varepsilon)$$

маємо оцінку [8]

$$|S_1'| \leq \varepsilon \left| \Omega_k(\tau_n, \varepsilon) + \frac{\Omega_k(\tau_n, \varepsilon)}{\widetilde{\Omega}_k(n, \varepsilon) - 1} - \frac{\Omega_k(\tau_{j_0}, \varepsilon)}{\widetilde{\Omega}_k(j_0, \varepsilon) - 1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=j_0+1}^{n-1} \Omega_k(\tau_\nu, \varepsilon) \frac{\widetilde{\Omega}_k(\nu, \varepsilon) - \widetilde{\Omega}_k(\nu - 1, \varepsilon)}{(\widetilde{\Omega}_k(\nu, \varepsilon) - 1)(\widetilde{\Omega}_k(\nu - 1, \varepsilon) - 1)} \right| + \varepsilon \sum_{\nu=1}^{j_0} 1,$$

в якій $j_0 = j_0(\xi)$ визначається нерівностями (24),

$$\widetilde{\Omega}_k(\nu, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} z_k(\tau, \varepsilon, 0) d\tau \right\}.$$

Будемо вважати, що

$$\left(\frac{\gamma_N}{r_N}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sigma_8\sigma_{11}}, \quad \frac{\gamma_N^3}{r_N^2} \leq \frac{2(2-\sqrt{3})\pi}{\theta\sigma_8\sigma_{11}}.$$

Цих нерівностей можна досягти за рахунок вибору малим $\gamma_N > 0$ або великим r_N. Тоді на підставі рівності $h(N) = \sigma_8\gamma_N r_N^{-1}$ і нерівності (35) одержимо оцінки

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N}(\tau - \widetilde{\tau}_0 + l) \leq |z_k(\tau,\varepsilon,s_0)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_N, \quad \tau \in [\widetilde{\tau}_0 + l, \tau_0 + h(N)], \tag{37}$$

при $l \leq \sigma_8\gamma_N r_N^{-1}$.

Оскільки

$$|\widetilde{\Omega}_k(\nu,\varepsilon) - 1| = \left|2\sin\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} z_k(\tau,\varepsilon,0)d\tau\right| = \left|2\sin\left(\frac{1}{2}\bar{t}_\nu z_k(\tau_\nu^*,\varepsilon,0) - \pi s_0\right)\right|,$$

$$\frac{1}{2}\bar{t}_\nu z_k(\tau_\nu^*,\varepsilon,0) - \pi s_0 = \frac{\theta}{2}z_k(\tau_\nu^*,\varepsilon,s_0) + \frac{1}{2}\eta_\nu z_k(\tau_\nu^*,\varepsilon,0),$$

де $\eta_\nu = \bar{t}_\nu - \theta$, $|\eta_\nu| < \xi$ при $\nu \geq j_0(\xi)$, τ_ν^* — деяка точка відрізка $[\tau_\nu, \tau_{\nu+1}]$, то з нерівностей (37) випливають нерівності

$$\frac{\theta}{8}\sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N}(\tau - \widetilde{\tau}_0 + l) \leq \left|\frac{1}{2}\bar{t}_\nu z_k(\tau_\nu^*,\varepsilon,0) - \pi s_0\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \leq \pi - \frac{\theta}{8}\sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N}(\tau - \widetilde{\tau}_0 + l),$$

$$\tau \in [\widetilde{\tau}_0 + l, \tau_0 + h(N)],$$

при

$$\xi \leq \min\left\{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sigma_1 r_N}; \frac{\theta\sigma_{11}}{4\sigma_1}\left(\frac{\gamma_N}{r_N}\right)^2 l\right\}.$$

Тому

$$|\widetilde{\Omega}_k(\nu,\varepsilon) - 1| \geq \frac{\theta}{4}\sigma_{11}\frac{\gamma_N^2}{r_N}(\tau_\nu - \widetilde{\tau}_0 + l).$$

Аналогічно

$$|\widetilde{\Omega}_k(\nu,\varepsilon) - \Omega_k(\nu-1,\varepsilon)| \leq \sigma_1[1 + 2\theta_2(\sigma_1 + (1+\sigma_1)2\theta_2)]r_N(\varepsilon + \xi).$$

Отже,

$$S_1' \leq \widetilde{\sigma}_{14}\left(\varepsilon j_0(\xi) + \frac{\varepsilon}{l}\frac{r_N}{\gamma_N^2} + \frac{\varepsilon+\xi}{l}\frac{r_N^3}{\gamma_N^4}\right),$$

де $\widetilde{\sigma}_{14}$ — деяка стала. Такого ж вигляду оцінку задовольняє також сума

$$S_1'' = \varepsilon\sum_{\tau_0 \leq \tau_\nu < \widetilde{\tau}_0 - l}\Omega_k(\tau_\nu,\varepsilon).$$

Таким чином, існує стала σ_{14} така, що

$$|S_1| \leq \sigma_{14}\left(l + \varepsilon j_0(\xi) + \frac{\varepsilon}{l}\frac{r_{_N}}{\gamma_{_N}^2} + \frac{\varepsilon+\xi}{l}\frac{r_{_N}^3}{\gamma_{_N}^4}\right) \tag{38}$$

для всіх $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + h(N)]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Викладене вище дозволяє сформулювати наступне твердження.

Лема 2. *Якщо виконуються припущення леми 1, то інтеграл I_1 і сума S_1 задовольняють відповідно нерівності (36) і (38) при умовах*

$$\varepsilon \leq l, \quad l \leq \sigma_8\frac{\gamma_{_N}}{r_{_N}}, \quad \xi r_{_N} \leq \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sigma_1}, \quad \frac{\xi}{l}\left(\frac{r_{_N}}{\gamma_{_N}}\right)^2 \leq \frac{\theta\sigma_{11}}{4\sigma_1}.$$

3. Основні теореми. Перейдемо до обґрунтування методу усереднення. Із систем (1) і (6) випливає нерівність

$$\begin{aligned} u(\tau,\varepsilon) \leq \sigma_1\left(\int_0^\tau u(t,\varepsilon)dt + \varepsilon\sum_{0<\tau_\nu<\tau} u(\tau_\nu,\varepsilon)\right) + \left\|\int_0^\tau \widetilde{a}(\overline{x}(t),\varphi(t,\varepsilon),t)dt\right\| + \\ + \left\|\varepsilon\sum_{0<\tau_\nu<\tau}\widetilde{p}(\overline{x}(\tau_\nu),\varphi(\tau_\nu,\varepsilon))\right\| + \left\|\varepsilon\sum_{0<\tau_\nu<\tau}\overline{p}(\overline{x}(\tau_\nu)) - \frac{1}{\theta}\int_0^\tau\overline{p}(\overline{x}(t))dt\right\| + \\ + 2\sigma_1\nu_0(\mu_3)\varepsilon + \mu_3(1+L\theta_1^{-1}), \end{aligned} \tag{39}$$

де $\tau \in [0, L_1]$, $\widetilde{a}(x,\varphi,\tau) = a(x,\varphi,\tau) - \overline{a}(x,\tau)$, $\widetilde{p}(x,\varphi) = p(x,\varphi) - \overline{p}(x)$, $u(\tau,\varepsilon) = \|x(\tau,\varepsilon) - -\overline{x}(\tau)\|$.

Враховуючи, що

$$\frac{1}{\theta}\int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}\overline{p}(\overline{x}(t))dt - \varepsilon\overline{p}(\overline{x}(\tau_\nu)) = \frac{\varepsilon(\bar{t}_\nu-\theta)}{\theta}\overline{p}(\overline{x}(\tau_\nu)) + \frac{1}{\theta}\int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}[\overline{p}(\overline{x}(t)) - \overline{p}(\overline{x}(\tau_\nu))]dt,$$

$$\|\overline{x}(\tau) - \overline{x}(\tau_\nu)\| \leq \varepsilon\sigma_1(1+\theta^{-1})\theta_2, \quad \tau \in [\tau_\nu, \tau_{\nu+1}],$$

на підставі (24) маємо нерівність

$$\left\|\varepsilon\sum_{0<\tau_\nu<\tau}\overline{p}(\overline{x}(\tau_\nu)) - \frac{1}{\theta}\int_0^\tau\overline{p}(\overline{x}(t))dt\right\| \leq \sigma_{15}(\varepsilon j_0(\xi)+\xi), \quad \tau \in [0, L_1], \tag{40}$$

зі сталою σ_{15}, незалежною від ε і ξ.

Подамо далі відрізок $[0,\tau]$ у вигляді

$$[0,\tau] = \bigcup_{r=1}^{r_0+1} A_r, \quad A_r = [\alpha_r, \beta_r],$$

де $\alpha_r = (r-1)l_1$ і $\beta_r = rl_1$ при $r = \overline{1, r_0}$ та $\alpha_{r_0+1} = r_0 l_1$ і $\beta_{r_0+1} = \tau$, r_0 — ціла частина числа τl_1^{-1}, а l_1 — досить мале додатне число, яке буде означене нижче.

Розглянемо рівність

$$\int\limits_{\alpha_r}^{\beta_r} \widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t)dt = \int\limits_{\alpha_r}^{\beta_r} \left[\widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t) - a\left(\overline{x}_0, \theta_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \omega(x(\tau,\varepsilon), \tau)d\tau, t_0 \right) \right] dt +$$

$$+ \sum_{|k|=1}^{\infty} a_k(\overline{x}_0, t_0) e^{i(\lambda_k, \theta_0)} \int\limits_{\alpha_r}^{\beta_r} \Omega_k(t,\varepsilon)dt,$$

в якій $t_0 = \alpha_r, \overline{x}_0 = \overline{x}(t_0), \theta_0 = \theta(t_0, \varepsilon)$.

Задамо довільне досить мале $\mu_5 > 0$ і виберемо $N = N(\mu_5)$ настільки великим, щоб

$$\sum_{|k|=N+1}^{\infty} \|a_k(x,\tau)\| \leq \mu_5, \qquad \sum_{|k|=N+1}^{\infty} \|p_k(x)\| \leq \mu_5 \quad \forall (x,\tau) \in \overline{D}_\rho \times [0, L]. \tag{41}$$

Оскільки функція $\widetilde{a}(x, \varphi, \tau)$ є рівномірно неперервною на множині $\overline{D}_\rho \times R^m \times \times [0, L]$, то

$$\left\| \widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t) - \widetilde{a}\left(\overline{x}_0, \theta_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \omega(x(\tau,\varepsilon), \tau)d\tau, t_0 \right) \right\| \leq$$

$$\leq 2\sigma_1(\|\overline{x}(t) - \overline{x}_0\| + \|\theta(t,\varepsilon) - \theta_0\|) +$$

$$+ \|\widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t) - \widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t_0)\| \leq \sigma_{16} l_1 + \mu_6,$$

де σ_{16} — стала, а $\mu_6 = \mu_6(l_1)$ вибирається з умови

$$\|\widetilde{a}(x, \varphi, t) - \widetilde{a}(x, \varphi, t_0)\| < \mu_6 \tag{42}$$

для всіх $x \in \overline{D}_\rho, \varphi \in R^m, t \in [0, L], t_0 \in [0, L]$ при $|t - t_0| \leq l_1$. Таким чином, при $l_1 = h(N)$ на підставі оцінок (36), (41) і (42) одержимо нерівність

$$\left\| \int\limits_{\alpha_r}^{\beta_r} \widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t)dt \right\| \leq (\sigma_{16} l_1 + \mu_5 + \mu_6)(\beta_r - \alpha_r) + \sigma_{17}(N) \left(l + \frac{\varepsilon}{l} \right)$$

зі сталою $\sigma_{17}(N) = 2\sigma_1 \sigma_{13} N \left(1 + r_{_N} \gamma_{_N}^{-2} + r_{_N}^3 \gamma_{_N}^{-4}\right)$.

Підсумовуючи по всіх r і враховуючи, що $r_0 + 1 \leq L l_1^{-1} + 1$, при $l_1 \leq L$ дістанемо оцінку

$$\left\| \int\limits_0^{\tau} \widetilde{a}(\overline{x}(t), \varphi(t,\varepsilon), t)dt \right\| \leq (\sigma_{16} l_1 + \mu_5 + \mu_6)L + 2L\sigma_{17}(N) \left(\frac{l}{l_1} + \frac{\varepsilon}{l\, l_1} \right). \tag{43}$$

Аналогічно оцінюємо третій доданок у правій частині нерівності (39). Запишемо рівність

$$\varepsilon \sum_{\alpha_r \le \tau_\nu < \beta_r} \widetilde{p}(\overline{x}(\tau_\nu), \varphi(\tau_\nu, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{\alpha_r \le \tau_\nu < \beta_r} \left[\widetilde{p}(\overline{x}(\tau_\nu), \varphi(\tau_\nu, \varepsilon) - \widetilde{p}\left(\overline{x}_0, \theta_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_\nu} \omega(x(\tau, \varepsilon), \tau) d\tau \right) \right] +$$

$$+ \sum_{|k|=1}^{\infty} p_k(\overline{x}_0) e^{i(\lambda_k, \theta_0)} \varepsilon \sum_{\alpha_r \le \tau_\nu < \beta_r} \Omega_k(\tau_{\nu,\varepsilon})$$

і скористаємося нерівностями (38) та

$$\left\| \widetilde{p}(\overline{x}(\tau_\nu), \varphi(\tau_\nu, \varepsilon)) - \widetilde{p}\left(\overline{x}_0, \theta_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_\nu} \omega(x(\tau, \varepsilon), \tau) d\tau \right) \right\| \le$$

$$\le 2\sigma_1 (\|\overline{x}(\tau_\nu) - \overline{x}_0\| + \|\theta(\tau_\nu, \varepsilon) - \theta_0\|) \le \sigma_{16} l_1.$$

Тоді отримаємо оцінку

$$\left\| \varepsilon \sum_{\alpha_r \le \tau_\nu < \beta_r} \widetilde{p}(\overline{x}(\tau_\nu), \varphi(\tau_\nu, \varepsilon)) \right\| \le \frac{2}{\theta_1}(1 + \sigma_{16}) l_1 (l_1 + \mu_5) +$$

$$+ \frac{\sigma_{14}}{\sigma_{13}} \sigma_{17}(N) \left(l + \varepsilon j_0(\xi) + \frac{\varepsilon + \xi}{l} \right)$$

при $\varepsilon_0 \theta_1 \le l_1$ або

$$\left\| \varepsilon \sum_{0 < \tau_\nu < \tau} \widetilde{p}(\overline{x}(\tau_\nu), \varphi(\tau_\nu, \varepsilon)) \right\| \le \frac{4L}{\theta_1}(1 + \sigma_{16})(l_1 + \mu_5) +$$

$$+ \frac{2}{\sigma_{13}} L \sigma_{14} \sigma_{17}(N) \left(\frac{l}{l_1} + \frac{\varepsilon j_0(\xi)}{l_1} + \frac{\varepsilon + \xi}{l\, l_1} \right). \tag{44}$$

Таким чином, на підставі (41) — (44) з (39) дістанемо нерівність

$$u(\tau, \varepsilon) \le \sigma_1 \left(\int_0^{\tau} u(t, \varepsilon) dt + \varepsilon \sum_{0 < \tau_\nu < \tau} u(\tau_\nu, \varepsilon) \right) +$$

$$+ \sigma_{18}(l_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6 + \varepsilon \nu_0(\mu_3)) + \sigma_{19}(N) \left(\frac{l}{l_1} + \frac{\varepsilon + \xi}{l\, l_1} + \frac{\varepsilon j_0(\xi)}{l_1} \right)$$

для всіх $\tau \in [0, L_1]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ зі сталими

$$\sigma_{18} = 2\sigma_1 + 1 + L\theta^{-1} + 2L\theta_1^{-1}(2 + \theta_1)(1 + \sigma_{16}),$$

$$\sigma_{19}(N) = L(\sigma_{15}2(1+\sigma_{13}^{-1}\sigma_{14})\sigma_{17}(N)).$$

Розв'язуючи останню інтегро-сумарну нерівність [1] і враховуючи, що $\tau_{\nu+1}-\tau_\nu \geq \varepsilon\theta_1$, при $\varepsilon_0\sigma_1 \leq 1$ отримуємо оцінку

$$u(\tau,\varepsilon) \leq \sigma_{20}(l_1+\mu_3+\mu_5+\mu_6+\varepsilon\nu_0(\mu_3)) + \sigma_{21}(N)\left(\frac{l}{l_1}+\frac{\varepsilon+\xi}{l\,l_1}+\frac{\varepsilon j_0(\xi)}{l_1}\right),$$

$$\tau \in [0,L_1], \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \tag{45}$$

де

$$\sigma_{20} = 2\sigma_{18}e^{\sigma_1(L+\theta_1^{-1})}, \quad \sigma_{21}(N) = 2\sigma_{19}(N)e^{\sigma_1(L+\theta_1^{-1})}.$$

Зафіксуємо довільне як завгодно мале додатне $\mu < \frac{1}{2}\rho$ і покладемо $\mu_5 = (9\sigma_{20})^{-1}\mu$. За даним μ_5 вибираємо натуральне N настільки великим, щоб при $N = N(\mu_5)$ виконувалися нерівності (41). Далі за знайденим N визначаємо число $\mu_4 > 0$, яке задовольняє нерівність $\mu_4 \leq 8^{-1}\sigma_{12}(N)$, і число l_1 з умов $l_1 \leq (9\sigma_{20})^{-1}\mu$ та $l_1 \leq \sigma_8\gamma_{N}r_{N}^{-1}$. Потім вибираємо додатне $l = l(\mu_4)$ настільки малим, що при $N_1 = N_1(N)$

$$l < \frac{\mu_1}{4\sigma_4 r_{N_1}}, \quad l \leq \frac{1}{8}\mu_1\sigma_{12}(N), \quad l \leq \sigma_8\frac{\gamma_N}{r_N}, \quad l \leq \frac{\mu l_1}{9\sigma_{21}(N)},$$

а також з умови виконання нерівностей (15).

Після цього вибираємо $\xi > 0$, яке задовольняє нерівності

$$\xi \leq \frac{\mu\, l\, l_1}{9\sigma_{21}(N)}, \xi \leq \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sigma_1 r_N}, \xi \leq \frac{\theta\sigma_{11}l}{4\sigma_1}\left(\frac{\gamma_N}{r_N}\right)^2, \xi < \frac{\theta\mu_1}{8\sigma_1 r_{N_1}}, \xi \leq \frac{1}{8}\mu_1^2\sigma_{12}(N),$$

і $\mu_3 > 0$ з умов $\mu_3 \leq (9\sigma_{20})^{-1}\mu$ та $\mu_3 \leq 8^{-1}\sigma_{12}(N)$. Далі визначаємо додатне $\mu_6 = \mu_6(l_1)$ так, що $\mu_6 \leq (9\sigma_{20})^{-1}\mu$ і виконується нерівність (42).

Нарешті, $\varepsilon_0 > 0$ вибираємо настільки малим, що

$$\varepsilon_0 \leq \min\left\{\frac{\mu}{9\sigma_{20}\nu_0(\mu_3)}; \frac{\mu\, l\, l_1}{9\sigma_{21}(N)}; \frac{\mu\, l_1}{9j_0(\xi)\sigma_{21}(N)}; \frac{1}{\sigma_1}; l; \frac{l}{\theta_1}; \frac{l}{\theta_2}\right\},$$

$$\max\left\{\varepsilon_0; \frac{\varepsilon_0}{l\,\mu_1}; \frac{\varepsilon_0}{\mu_1^2}; \frac{\nu_0(\mu_3)+j_0(\xi)}{l}\varepsilon_0\right\} \leq \frac{1}{8}\sigma_{12}(N)$$

і виконуються нерівності (31) при $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N,\mu_1)$.

Тоді з (45) одержуємо оцінку

$$u(\tau,\varepsilon) < \mu \quad \forall\tau \in [0,L_1], \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon]. \tag{46}$$

Оскільки $\overline{x}(\tau) \in \overline{D}_{2\rho}$ при $\tau \in [0,L]$ і $\mu < \frac{1}{2}\rho$, то оцінка (46) є справедливою для всіх $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай: 1) виконуються припущення (2), (4), (8); 2) ряди (3) збігаються рівномірно; 3) існує розв'язок* $\overline{x}(\tau)$ *усередненої системи (6), визначений при* $\tau \in [0, L]$. *Тоді для довільного як завгодно малого* $\mu > 0$ *можна вибрати таке* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > 0$, *що розв'язок* $x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)$ *системи (1), для якого* $x(0, \varepsilon) = \overline{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon)$ *— довільне, є визначеним для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ *і задовольняє нерівність*

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| < \mu, \quad \tau \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{47}$$

Припустимо, що:

а) $t_{\nu+1} - t_\nu = \theta, p_\nu(x, \varphi) \equiv p(x, \varphi)$ для всіх $\nu \geq 1, x \in D, \varphi \in R^m$;

б) $a(x, \varphi, \tau) = \sum\limits_{k=-N}^{N} a_k(x, \tau) e^{i(\lambda_k, \varphi)}, p(x, \varphi) = \sum\limits_{k=-N}^{N} p_k(x) e^{i(\lambda_k, \varphi)}$;

в) ω має неперервні частинні похідні першого порядку по x, τ в області $D \times [0, L]$, a та p задовольняють умову Ліпшиця по x і a задовольняє умову Гельдера по τ:

$$\|a(x, \varphi, \tau) - a(x, \varphi, \tau')\| \leq \sigma_1 |\tau - \tau'|^\alpha$$

при $x \in D, \varphi \in R^m, \tau \in [0, L], \tau' \in [0, L]$, де α — стала, $0 < \alpha \leq 1$;

г) $f_k(\overline{x}(\tau), \varphi, \tau, s, \mu_1) \geq \gamma_N^2 \ \forall \tau \in [0, L], \varphi \in R^m, s \in Z, 1 \leq |k| \leq N$.

Теорема 2. *Якщо* $\overline{x}(\tau) \in D$ *при* $\tau \in [0, L]$ *і виконуються умови а) – г), то існують такі числа* $\overline{\varepsilon} > 0$ *і* $\sigma_{22} > 0$, *що при* $\varepsilon_0 \leq \overline{\varepsilon}$ *повільна компонента* $x(\tau, \varepsilon)$ *кожного розв'язку* $x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)$ *(*$x(0, \varepsilon) = \overline{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon) \in R^m$*) системи (1) задовольняє нерівність*

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| < \sigma_{22} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \quad \forall \tau \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{48}$$

Доведення. На підставі того, що a, δ_1 і δ_2 — тригонометричні поліноми по $\varphi_j, j = \overline{1, m}$, і рівномірно неперервні на множині $\overline{D}_\rho \times R^m \times [0, L]$, існує таке число $d = d(N) > 0$, що

$$f_k(x, \varphi, \tau, s, \mu_1) \geq \frac{1}{2} \gamma_N^2$$

для всіх $x \in G, \varphi \in R^m, \tau \in [0, L], s \in Z$, де

$$G = \{x \,|\, x \in D, \|x - \overline{x}(\tau)\| \leq d \ \forall \tau \in [0, L]\}.$$

Іншими словами, у розглядуваному випадку виконується нерівність (8) для x із d-околу розв'язку усередненої системи, чого досить, щоб при $\mu < d$ справджувалась нерівність (47).

Якщо повторити далі схему доведення теореми 1, то дістанемо рівності

$$\xi = 0, \quad j_0(\xi) = 1, \quad \mu_3 = \mu_5 = 0, \quad \nu_0(\mu_3) = 1, \quad \mu_6 = \sigma_1 l_1^\alpha,$$

а оцінка (45) набере вигляду

$$u(\tau,\varepsilon) \le \sigma_{23}\left(l_1^2 + \frac{l}{l_1} + \frac{\varepsilon}{l\,l_1}\right). \tag{49}$$

Будемо вважати, що $l = g(\varepsilon)$ і $l_1 = g_1(\varepsilon)$, тоді найкращий порядок по ε останньої нерівності буде тоді, коли $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ і $g_1(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}$. У такому випадку з (49) одержуємо оцінку (48).

Теорему доведено.

Порядок по ε оцінки (48) можна покращити за рахунок збільшення порядку гладкості функцій a і p, а саме, якщо припустити, що a і p мають неперервні в області $D \times R^m \times [0, L]$ частинні похідні першого порядку по змінних x і τ. Покладаючи в процесі доведення теореми 1 $\alpha_r = (r-1)h(N)$, $\beta_r = rh(N)$ при $r = \overline{1, r_0}$ та $\alpha_{r_0+1} = r_0 h(N)$, $\beta_{r_0+1} = \tau$, де r_0 — ціла частина числа $\tau h^{-1}(N)$, і використовуючи оцінки осциляційних інтеграла та суми з роботи [5], одержуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 і функції a, p мають неперервні в області $D \times R^m \times [0, L]$ частинні похідні першого порядку по x і τ. Тоді оцінка (48) набирає вигляду*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| \le \sigma_{22}\sqrt{\varepsilon} \quad \forall(\tau,\varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]. \tag{50}$$

Нарешті дамо відповідь на питання: наскільки малим при $\varepsilon \to 0$ можна вибирати додатне число μ_1, яке визначає ширину резонансної зони, щоб залишалися вірними теореми 2 і 3 ? Ключовими для аналізу в цьому плані є оцінки (21), (26) і залежність $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, \mu_1)$ для переходу від нерівностей (29) до нерівностей (31). Легко переконатися, що вигляд оцінок (48) і (50) у теоремах 2 і 3 не зміниться, якщо покласти $\mu_1 = f(N)\sqrt{\varepsilon}$, де $f(N)$ — досить велике число, залежне від N, але незалежне від ε.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.
2. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. — 1971. — Вып. 9. — С. 101 – 117.
3. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Обґрунтування методу усереднення для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 55 – 65.
4. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 2001. — 131 с.
5. *Самойленко А. М., Петришин Р. І., Лакуста Л. М.* Оцінки похибки методу усереднення для імпульсних коливних систем // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 4. — С. 510 – 524.
6. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
7. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.
8. *Сопронюк Т. М.* Коливання імпульсних багаточастотних систем: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Чернівці, 2003. — 154 с.

Одержано 14.12.2004