

КОЛИВАННЯ ДВОШАРОВОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ПРУЖНИМИ ОСНОВАМИ*

Ю. М. Кононов, Ю. О. Джуха

Донец. нац. ун-т ім. Василя Стуса
вул. 600-річчя, 21, Вінниця 21021, Україна
e-mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
yu.djukha@donnu.edu.ua

We investigate the frequency equation of natural oscillations of a heavy ideal two-layer incompressible liquid in a rigid circular cylindrical reservoir with elastic bases in the form of fixed thin circular plates. Axially symmetric (longitudinal) and asymmetric (transverse) oscillations of the liquid and plates and different limiting cases (degeneration of plates into membranes, absolutely rigid plates, and the absence of upper plate) are considered. It is shown that the frequency spectrum of the coupled asymmetric oscillations of elastic bases and the two-layer ideal liquid consists of three sets of frequencies corresponding to oscillations of the upper and lower elastic bases and oscillations of the interior interface of liquids. The frequency spectrum of the coupled axially symmetric oscillations consists of the same three sets as for asymmetric oscillations and the additional frequency of oscillations of the liquid column as a whole. As an example, we analytically and numerically investigate the frequency spectrum of a homogeneous liquid with free surface and an elastic bottom in the form of a membrane.

Досліджено частотне рівняння власних коливань важкої ідеальної двошарової нестисливої рідини в жорсткому круговому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких кругових закріплених пластин. Розглянуто осесиметричні (поздовжні) та несиметричні (поперечні) коливання рідини та пластин і різні граничні випадки виродження пластин у мембрани, в абсолютно жорсткі пластини, а також випадок відсутності верхньої пластини. Показано, що частотний спектр сумісних несиметричних коливань пружних основ та двошарової ідеальної рідини складається з трьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ і коливанням внутрішньої поверхні розділу рідин, а частотний спектр сумісних симетричних коливань складається з тих самих трьох наборів частот, що й у випадку несиметричних коливань, та додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном у вигляді мембрани аналітично та чисельно досліджено частотний спектр.

Вступ. Задача про поперечні та поздовжні коливання ідеальної рідини в жорсткому резервуарі з пружними основами вивчена недостатньо. Велику кількість робіт присвячено поперечним (несиметричним) коливанням ідеальної рідини в резервуарі з абсолютно жорсткою нижньою основою (див., наприклад, [1–3]). У цьому випадку відбувається зсув центру мас механічної системи в поперечному напрямку. Практично немає робіт з дослідження поздовжніх (симетричних) коливань ідеальної рідини в резервуарі з абсолютно жорсткою нижньою основою. Можливо це пов'язано з тим, що в цьому випадку не відбувається зміщення центру мас системи і, як зазначалося в монографії [1], “в случае

* Виконано в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U002522).

недеформируемости стенок полости и несжимаемости жидкости пластина может иметь только антисимметричные формы, ортогональные к постоянной”. Дійсно, в ряді окремих випадків осесиметричні коливання відсутні, наприклад, у випадку невагомості та безмасової пластини [1]. У статті [4] досліджено вплив перевантаження на осесиметричні коливання кругової мембрани, розташованої на вільній поверхні рідини в жорсткому круговому циліндричному резервуарі. Осесиметричні коливання ідеальної рідини з вільною поверхнею в жорсткому круговому циліндричному резервуарі з пласкою пружною основою вперше розглянуто в статтях [5–7]. У роботі [8] цю задачу узагальнено на випадок циліндричного резервуара довільного поперечного перерізу, а в [9] — на випадок осесиметричних коливань двошарової ідеальної рідини з вільною поверхнею. Із застосуванням операторних методів у роботі [10] розглянуто аналогічну задачу для системи рідин, що не змішуються.

У статті [11] проведено експериментальні дослідження динамічних процесів у жорсткій циліндричній посудині з пружним дном, частково заповненій рідиною. Найбільш повну постановку задачі про поздовжні коливання ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пласкими пружними основами наведено в роботі [12]. З позиції функціонального аналізу розв’язність задачі про коливання ідеальної рідини в жорсткому резервуарі з пружними основами показано в монографії [13]. Також у зазначеній роботі наведено асимптотичні формули для власних частот. У статтях [14, 15] проведено дослідження сумісних осесиметричних коливань пружних основ та ідеальної рідини в круговому та коаксіальному циліндричних резервуарах, у [16] цю задачу узагальнено на випадок двошарової рідини. В роботах [17–20] у лінійній постановці розглядаються осесиметричні коливання двошарової ідеальної рідини в круговому циліндричному резервуарі стосовно проблеми капілярних фазороздільників. Існує велика кількість робіт, у яких у лінійній та нелінійній постановках досліджено коливання вільної поверхні ідеальної рідини в круговому резервуарі з пружним дном (див., наприклад, [21–24]). Поздовжні (симетричні) та поперечні (несиметричні) коливання пластини або мембрани на вільній поверхні ідеальної рідини в круговому резервуарі з абсолютно жорсткою нижньою основою докладно досліджено в [25]. Несиметричні коливання кругової пластини на поверхні рідини розглянуто в [26]. Дуже цікавою та близькою за темою до нашої статті є робота [27], у якій досліджуються коливання однорідної ідеальної рідини в циліндричному резервуарі з однаковими пружними основами у вигляді кругових пластин. У ній запропоновано аналітичний метод, заснований на розкладанні в ряд Фур’є–Бесселя та методі Релея–Рітца. Зазначимо, що аналітично структура спектру в зазначених роботах зазвичай не досліджується.

1. Постановка задачі. Розглянемо сумісні коливання пружних основ і важкої двошарової ідеальної нестисливої рідини з густинами ρ_1 і ρ_2 , що повністю заповнює відповідно до глибин h_1 і h_2 прямий круговий циліндричний резервуар радіуса a з жорсткою боковою поверхнею. Основи резервуара зображають собою закріплені кругові ізотропні пластини зі згинальними жорсткостями D_i , на які впливають розтягуючі зусилля T_i в серединній площині $i = 1, 2$. Індекс $i = 1$ відповідає верхній основі та верхній рідині з густиною ρ_1 , а $i = 2$ — нижній основі та нижній рідині з густиною ρ_2 . Циліндричну систему координат $O r \theta z$ розмістимо так, щоб площина $O r \theta$ знаходилася на поверхні розділу рідин, а вісь $O z$ була спрямована за віссю циліндра протилежно до вектора прискорення сили тяжіння \vec{g} (рис. 1). Задачу будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи рух рідини потенціальним, а сумісні коливання пластин і рідини — безвідривними. Рівняння руху механічної

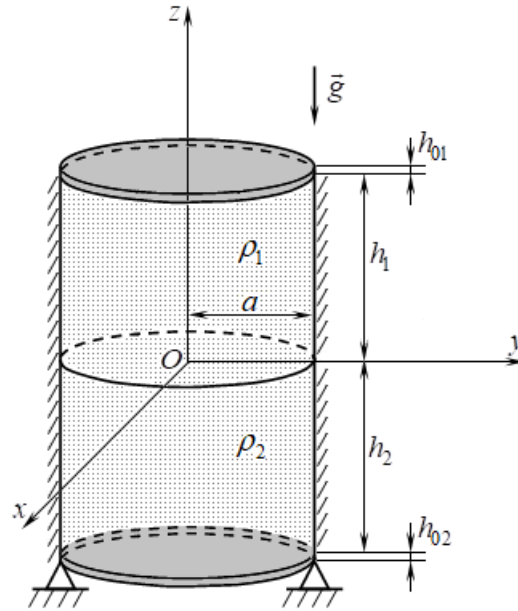


Рис. 1. Постановка задачі.

системи, що розглядається, мають вигляд [16]

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho_1 g W_1 = \rho_1 \left(Q_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=h_1} - g h_1 \right) - g k_{01}, \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho_2 g W_2 = -\rho_2 \left(Q_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{z=-h_2} + g h_2 \right) - g k_{02}, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi_i = 0$$

з урахуванням наступних граничних умов:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{\gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\rho_1 \left(Q_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} - g \zeta \right) = \rho_2 \left(Q_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} - g \zeta \right), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

$$W_i \Big|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial r} \Big|_{\gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{S} \int_S W_1 dS = \frac{1}{S} \int_S \zeta dS = \frac{1}{S} \int_S W_2 dS. \quad (5)$$

Тут $k_{0i} = \rho_{0i} h_{0i}$; W_i , ρ_{0i} і h_{0i} — відповідно прогин, густина та товщина i -ї пластини; Φ_i — потенціал швидкостей i -ї рідини; $z = \zeta(r, \theta, t)$ — поверхня розділу рідин (внутрішня

поверхня); Q_i — довільні функції часу; Δ_2 і $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — відповідно двовимірний та тривимірний оператори Лапласа; S — кругова область, а γ — її контур $r = a$.

2. Метод розв'язування. Функції Φ_i , ζ зобразимо у вигляді узагальнених рядів Фур'є за власними функціями $\psi_{nm}(r, \theta)$ [14, 16]:

$$\Phi_i(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [a_{0i}(t) + a_{1i}(t)z] \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{inm}(t) e^{k_{nm}z} + B_{inm}(t) e^{-k_{nm}z}] \psi_{nm}(r, \theta) \right\}, \quad (6)$$

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\zeta_0(t) \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{nm}(t) \psi_{nm}(r, \theta) \right], \quad (7)$$

де δ_{m0} — символ Кронекера, а функції $\psi_{nm}(r, \theta)$ разом із довільною константою утворюють на S повну та ортогональну з вагою r систему функцій і мають вигляд

$$\psi_{nm}(r, \theta) = Y_{nm}(k_{nm}r) \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases}.$$

Тут

$$Y_{nm}(k_{nm}r) = \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(k_{nm}a)}, \quad k_{nm} = \frac{\xi_{nm}}{a},$$

ξ_{nm} — n -й корінь рівняння $J'_m(\xi_{nm}) = 0$, а J_m — функції Бесселя першого роду.

Підставивши вирази (6), (7) в граничні умови (3), (5) і скориставшись ортогональністю функцій $\psi_{nm}(r, \theta)$, отримаємо

$$\begin{aligned} A_{1nm} &= \frac{\dot{W}_{1nm} - \dot{\zeta}_{nm} e^{-\kappa_{1nm}}}{2k_{nm} \sinh \kappa_{1nm}}, & B_{1nm} &= \frac{\dot{W}_{1nm} - \dot{\zeta}_{nm} e^{\kappa_{1nm}}}{2k_{nm} \sinh \kappa_{1nm}}, \\ A_{2nm} &= -\frac{\dot{W}_{2nm} - \dot{\zeta}_{nm} e^{\kappa_{2nm}}}{2k_{nm} \sinh \kappa_{2nm}}, & B_{2nm} &= -\frac{\dot{W}_{2nm} - \dot{\zeta}_{nm} e^{-\kappa_{2nm}}}{2k_{nm} \sinh \kappa_{2nm}}, \quad \kappa_{inm} = k_{nm} h_i, \\ a_{11} &= a_{12} = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20} = \dot{\zeta}_0, & \rho_1 (Q_1 - \dot{a}_{01} - g\zeta_0) &= \rho_2 (Q_2 - \dot{a}_{02} - g\zeta_0), \\ W_{inm} &= \frac{1}{N_{nm}^2} \int_S W_i \psi_{nm} dS, & \zeta_{nm} &= \frac{1}{N_{nm}^2} \int_S \zeta \psi_{nm} dS, & W_{i0} &= \frac{1}{S} \int_S W_i dS, \\ \zeta_0 &= \frac{1}{S} \int_S \zeta dS, & N_{nm}^2 &= \int_S \psi_{nm}^2 dS = \frac{\pi a^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\xi_{nm}^2} \right) \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рівняння (1), (2) та рівняння поверхні розділу рідин (внутрішньої поверхні) матимуть вигляд

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho_1 g W_1 = -gk_{01} + \rho_1 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[Q_1 - \dot{a}_{01} - h_1 (\ddot{\zeta}_0 + g) \right] \delta_{m0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{1nm} \cosh \kappa_{1nm} - \ddot{\zeta}_{nm}}{k_{nm} \sinh \kappa_{1nm}} \psi_{nm} \right\}, \quad (8)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho_2 g W_2 = -gk_{02} - \rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[Q_2 - \dot{a}_{02} + h_2 (\ddot{\zeta}_0 + g) \right] \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{2nm} \cosh \kappa_{2nm} - \ddot{\zeta}_{nm}}{k_{nm} \sinh \kappa_{2nm}} \psi_{nm} \right\}, \quad (9)$$

$$\ddot{\zeta}_{nm} + \sigma_{nm}^2 \zeta_{nm} - \frac{1}{a_{nm}} (b_{1nm} \ddot{W}_{1nm} + b_{2nm} \ddot{W}_{2nm}) = 0.$$

Тут $\sigma_{nm}^2 = \frac{gk_{nm}\Delta\rho}{a_{nm}}$ — квадрат частоти коливань внутрішньої поверхні при жорстких основах, $a_{nm} = \rho_1 \coth \kappa_{1nm} + \rho_2 \coth \kappa_{2nm}$, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $b_{inm} = \frac{\rho_i}{\sinh \kappa_{inm}}$.

3. Виведення статичної крайової задачі та частотного рівняння сумісних коливань пружних основ та рідини. Розглянемо задачу про власні сумісні коливання пружних пластин і рідини. Для цього зобразимо прогини пластин у вигляді суми статичного та динамічного прогинів і покладемо $W_i(r, \theta, t) = e^{i\omega t} w_i(r, \theta) + W_i^{st}(r)$, $\rho_1 (Q_1 - \dot{a}_{01}) = Qe^{i\omega t} + g(\rho_1 h_1 + k_{01}) + C$, $\zeta_0(t) = we^{i\omega t}$. Після відділення кутової координати рівняння (8), (9) та граничні умови (4), (5) матимуть вигляд

$$D_i \Delta_{2m}^2 w_{im} - T_i \Delta_{2m} w_{im} - \left[k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho_i g \right] w_{im} = \rho_i \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{inm} Y_{nm}(k_{nm} r) + \left\{ (-1)^{i+1} Q + [\rho_i h_i \omega^2 + (\delta_{i1} - 1) g \Delta\rho] w \right\} \delta_{m0}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$w_{im}|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{dw_{im}}{dr} \right|_{\gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$w = \frac{2}{a^2} \int_0^a r w_{10} dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a r w_{20} dr, \quad (12)$$

де $W_i^{st}(r)$ — статичний прогин пластин, $\Delta_{2m} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}$,

$$\tilde{w}_{1nm} = \frac{w_{1nm} (\cosh \kappa_{1nm} - \omega^2 \tilde{b}_{1nm}) - \omega^2 \tilde{b}_{2nm} w_{2nm}}{k_{nm} \sinh \kappa_{1nm}},$$

$$\tilde{w}_{2nm} = \frac{w_{2nm} (\cosh \kappa_{2nm} - \omega^2 \tilde{b}_{2nm}) - \omega^2 \tilde{b}_{1nm} w_{1nm}}{k_{nm} \sinh \kappa_{2nm}}, \quad \tilde{b}_{inm} = \frac{b_{inm}}{a_{nm} (\omega^2 - \sigma_{nm}^2)},$$

$$w_{inm} = \frac{\pi (1 + \delta_{m0})}{N_{nm}^2} \int_0^a r w_{im} Y_{nm} dr, \quad (13)$$

Розв'язання статичної задачі зводиться до наступної крайової задачі:

$$D_1 \Delta_2^2 W_1^{st} - T_1 \Delta_2 W_1^{st} + \rho_1 g W_1^{st} = C - g (\rho_1 h_1 + k_{01}),$$

$$D_2 \Delta_2^2 W_2^{st} - T_2 \Delta_2 W_2^{st} - \rho_2 g W_2^{st} = -C - g (\rho_2 h_2 + k_{02}),$$

$$W_i^{st}|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_i^{st}}{\partial r} \right|_{\gamma} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_0^a r W_1^{st} dr = \int_0^a r W_2^{st} dr, \quad (14)$$

де невідомі функції W_i^{st} та константа C . Через фізичну симетрію в крайовій задачі (14) слід покласти $m = 0$.

Для несиметричних ($m \neq 0$) коливань через наявність $\sin(m\theta)$ та $\cos(m\theta)$ рівняння (5) будуть виконані, а для осесиметричних ($m = 0$) треба враховувати рівняння (12).

Таким чином, слід відзначити суттєву різницю між осесиметричними (поздовжніми) та несиметричними (поперечними) коливаннями пластин і рідини. У випадку поздовжніх коливань виникає необхідність у обчисленні констант w і Q через виникнення поздовжніх коливань стовпа рідини як одного цілого. У випадку поперечних коливань необхідність у обчисленні цих констант відпадає.

Розв'язок кожного рівняння (10) будемо шукати у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного [1, 8, 14, 16]:

$$w_{im} = \sum_{k=1}^2 w_{ikm}^0 A_{ik}^0 + \rho_i \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{inm}}{d_{inm}} Y_{nm} +$$

$$+ \tilde{k}_{0i} \left\{ Q + (-1)^{i+1} [\rho_i h_i \omega^2 + (\delta_{i1} - 1) g \Delta \rho] w \right\} \delta_{m0}, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

де

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho_i g + (-1)^i k_{0i} \omega^2} \quad \left(\omega^2 \neq \frac{\rho_i g}{k_{0i}} \right),$$

$$d_{inm} = (D_i k_{nm}^2 + T_i) k_{nm}^2 - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho_i g] \neq 0,$$

A_{ik}^0 , $i, k = 1, 2$, w_{inm} , Q і w — невідомі константи.

Підставивши (15) в умову (13) і розв'язавши систему двох лінійних рівнянь відносно w_{1nm} і w_{2nm} , остаточно отримаємо

$$w_{1m} = \sum_{k=1}^2 \left[\left(w_{1km}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11nm} E_{1knm}^0 Y_{nm} \right) A_{1k}^0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{12nm} E_{2knm}^0 Y_{nm} \right) A_{2k}^0 \right] + \tilde{k}_{01} (Q + \rho_1 h_1 \omega^2 w) \delta_{m0}, \quad (16)$$

$$w_{2m} = \sum_{k=1}^2 \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{21nm} E_{1knm}^0 Y_{nm} \right) A_{1k}^0 + \left(w_{2km}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22nm} E_{2knm}^0 Y_{nm} \right) A_{2k}^0 \right] + \tilde{k}_{02} [Q - (\rho_2 h_2 \omega^2 - g \Delta \rho) w] \delta_{m0},$$

де

$$a_{11nm} = \omega^2 \frac{[(g k_{nm} \Delta \rho - a_{nm} \omega^2) a_{1nm} + \omega^2 b_{1nm}^2] (k_{nm} d_{2nm} - a_{2nm} \omega^2) - \omega^4 b_{2nm}^2 a_{1nm}}{\Delta_{nm}},$$

$$a_{12nm} = \omega^4 \frac{k_{nm} d_{2nm} b_{1nm} b_{2nm}}{\Delta_{nm}}, \quad a_{21nm} = \omega^4 \frac{k_{nm} d_{1nm} b_{1nm} b_{2nm}}{\Delta_{nm}},$$

$$a_{22nm} = \omega^2 \frac{[(g k_{nm} \Delta \rho - a_{nm} \omega^2) a_{2nm} + \omega^2 b_{2nm}^2] (k_{nm} d_{1nm} - a_{1nm} \omega^2) - \omega^4 b_{1nm}^2 a_{2nm}}{\Delta_{nm}}, \quad (17)$$

$$\Delta_{nm} = (k_{nm} d_{1nm} - a_{1nm} \omega^2) (g k_{nm} \Delta \rho - a_{nm} \omega^2) (k_{nm} d_{2nm} - a_{2nm} \omega^2) - \omega^4 [b_{2nm}^2 (k_{nm} d_{1nm} - a_{1nm} \omega^2) + b_{1nm}^2 (k_{nm} d_{2nm} - a_{2nm} \omega^2)],$$

$$a_{1nm} = \rho_1 \coth \kappa_{1nm}, \quad a_{2nm} = \rho_2 \coth \kappa_{2nm},$$

$$a_{nm} = a_{1nm} + a_{2nm} = \rho_1 \coth \kappa_{1nm} + \rho_2 \coth \kappa_{2nm},$$

$$E_{iknm}^0 = \frac{\pi (1 + \delta_{m0})}{N_{nm}^2} \int_0^a r w_{ikm}^0 Y_{nm} dr. \quad (18)$$

Для перевірки отриманих співвідношень (17) розглянемо випадок однорідної рідини: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ($\Delta \rho = 0$) та $h_1 + h_2 = h$, $\kappa_{1nm} + \kappa_{2nm} = \kappa_{nm}$. При цьому

$$\Delta_{nm} = -a_{nm} \omega^2 \left[(k_{nm} d_{1nm} - \omega^2 \rho \coth \kappa_{nm}) (k_{nm} d_{2nm} - \omega^2 \rho \coth \kappa_{nm}) - \omega^4 \frac{\rho^2}{\sinh^2 \kappa_{nm}} \right],$$

$$a_{nm} = \rho \frac{\sinh(\kappa_{nm})}{\sinh(\kappa_{1nm}) \sinh(\kappa_{2nm})}.$$

Наприклад, при $T_2 = \infty$ коефіцієнт a_{11nm} матиме вигляд

$$a_{11nm} = \frac{\omega^2 \rho}{k_{nm} d_{1nm} \tanh(\kappa_{nm}) - \omega^2 \rho}$$

і збігатиметься з аналогічним співвідношенням з роботи [1].

4. Частотне рівняння сумісних несиметричних (поперечних) коливань двошарової рідини та пружних основ. З умов закріплення пластин (11) витікає частотне рівняння несиметричних $m \neq 0$ власних сумісних коливань двошарової рідини та пружних основ

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=1}^4 \right| = 0, \quad (19)$$

де

$$C_{1,k} = B_{1km} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11nm} E_{1knm}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11nm} E_{1knm}^0,$$

$$C_{1,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12nm} E_{2knm}^0, \quad C_{2,k} = C_{1km}^0, \quad C_{2,k+2} = 0, \quad C_{3,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{21nm} E_{1knm}^0,$$

$$C_{3,k+2} = B_{2km} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22nm} E_{2knm}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22nm} E_{2knm}^0,$$

$$C_{4,k} = 0, \quad C_{4,k+2} = C_{2km}^0, \quad k = 1, 2.$$

Тут

$$B_{ikm} = w_{ikm}^0 \Big|_{\gamma}, \quad C_{ikm}^0 = \frac{dw_{ikm}^0}{dr} \Big|_{\gamma}, \quad 1 + a_{iim} = \tilde{a}_{iim}.$$

Слід очікувати, що частотний спектр сумісних несиметричних коливань двошарової ідеальної рідини та пружних основ буде складатися з трьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ і коливанням внутрішньої поверхні розділу рідин. Для однорідної рідини $\rho_1 = \rho_2$ частотний спектр складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням пружних основ.

5. Частотне рівняння сумісних симетричних (поздовжніх) коливань двошарової рідини та пружних основ. Для отримання частотного рівняння симетричних коливань $m = 0$ рідини та пружних основ потрібно мати ще два рівняння для невідомих Q і w . Для цього, підставивши (16) в (12), отримуємо систему

$$\tilde{k}_{01} Q + \tilde{k}_1 w = - \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0,$$

$$\tilde{k}_{02} Q + \tilde{k}_2 w = - \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0,$$

з якої знайдемо Q і w :

$$Q = \frac{1}{\Delta} \left(-\tilde{k}_2 \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \tilde{k}_1 \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right),$$

$$w = \frac{1}{\Delta} \left(\tilde{k}_{02} \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{k}_{01} \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right), \quad (20)$$

де $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_{01}\rho_1 h_1 \omega^2 - 1$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_{02}(g\Delta\rho - \rho_2 h_2 \omega^2) - 1$, $\Delta = \tilde{k}_{01}\tilde{k}_2 - \tilde{k}_{02}\tilde{k}_1$,

$$\tilde{w}_{ik}^0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a r w_{ik}^0 dr. \quad (21)$$

Індекс $m = 0$ тут і далі в усіх співвідношеннях для симетричних коливань записувати не будемо.

Підставивши (20) в (16), остаточно одержимо

$$\begin{aligned} w_1 = \sum_{k=1}^2 \left[\left(w_{1k}^0 + \alpha_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 Y_n \right) A_{1k}^0 + \right. \\ \left. + \left(\alpha_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 Y_n \right) A_{2k}^0 \right], \\ w_2 = \sum_{k=1}^2 \left[\left(\beta_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 Y_n \right) A_{1k}^0 + \right. \\ \left. + \left(w_{2k}^0 + \beta_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 Y_n \right) A_{2k}^0 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\tilde{k}_{01} k_2^*}{\Delta}, \quad \alpha_2 = -\frac{\tilde{k}_{01}}{\Delta}, \quad \beta_1 = \frac{\tilde{k}_{02}}{\Delta}, \quad \beta_2 = -\frac{\tilde{k}_{02} k_1^*}{\Delta},$$

$$k_i^* = (-1)^{i+1} \tilde{k}_{0i} [g\Delta\rho - (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \omega^2] + 1.$$

Визначник Δ можна переписати у вигляді $\Delta = k_1^* \tilde{k}_{02} - \tilde{k}_{01} k_2^* = \tilde{k}_{02} - k_2^* \tilde{k}_{01}$.

Таким чином, форми коливань пружних пластин мають вигляд (22).

З умов закріплення пластин (11) витікає частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань двошарової рідини та пружних основ

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=1}^4 \right| = 0, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} C_{1,k} &= B_{1k} + \alpha_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 = \alpha_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^0, \\ C_{1,k+2} &= \alpha_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0, \\ C_{2,k} &= C_{1k}^0, \quad C_{2,k+2} = 0, \quad C_{3,k} = \beta_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0, \end{aligned}$$

$$C_{3,k+2} = B_{2k} + \beta_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 = \beta_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E_{2kn}^0,$$

$$C_{4,k} = 0, \quad C_{4,k+2} = C_{2k}^0, \quad k = 1, 2. \quad (24)$$

Тут

$$B_{ik} = w_{ik}^0|_{\gamma}, \quad C_{ik}^0 = \left. \frac{dw_{ik}^0}{dr} \right|_{\gamma}.$$

Слід очікувати, що частотний спектр сумісних симетричних коливань буде також складатися з трьох наборів частот, як і для несиметричних коливань, та додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого. Аналітично та чисельно це буде доведено на прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном у вигляді мембрани.

У статті [14] для однорідної рідини $\rho_1 = \rho_2$ отримано рівняння, аналогічне рівнянню (23), у вигляді визначника п'ятого порядку. Якщо привести визначник п'ятого порядку до визначника четвертого порядку, то ці рівняння збігаються. Також зазначимо, що рівняння з роботи [14] мали особливість при збігу масових характеристик пластин $k_{01} = k_{02}$. У рівнянні (23) цю особливість було усунуто.

6. Окремі випадки частотного рівняння власних сумісних коливань рідини та пружних основ. Отримані рівняння (19) і (23) є достатньо загальними і включають у себе ряд окремих випадків, які мають і самостійний інтерес.

Випадок невагомості ($g = 0$). У цьому випадку частотні рівняння (19) і (23) симетричні відносно індексів 1 і 2, що має фізичне обґрунтування та підтверджує правильність виведених рівнянь.

Випадок однорідної рідини ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $h_1 + h_2 = h$). У цьому випадку рівняння (19) і (23) не змінюються, а співвідношення (17) і коефіцієнти α_i та β_i можна переписати таким чином:

$$a_{11nm} = \omega^2 \rho \frac{k_{nm} \coth \kappa_{nm} d_{2nm} - \omega^2 \rho}{\Delta_{nm}}, \quad a_{12nm} = -\omega^2 \frac{k_{nm} b_{nm} d_{2nm}}{\Delta_{nm}},$$

$$a_{21nm} = -\omega^2 \frac{k_{nm} b_{nm} d_{1nm}}{\Delta_{nm}}, \quad a_{22nm} = \omega^2 \rho \frac{k_{nm} \coth \kappa_{nm} d_{1nm} - \omega^2 \rho}{\Delta_{nm}},$$

$$\Delta_{nm} = (k_{nm} d_{1nm} - \omega^2 \rho \coth \kappa_{nm}) (k_{nm} d_{2nm} - \omega^2 \rho \coth \kappa_{nm}) - \omega^4 b_{nm}^2 =$$

$$= k_{nm}^2 d_{1nm} d_{2nm} - \omega^2 \rho k_{nm} \coth \kappa_{nm} (d_{1nm} + d_{2nm}) + \omega^4 \rho^2,$$

$$b_{nm} = \frac{\rho}{\sinh \kappa_{nm}}, \quad \alpha_1 = -\frac{k_{02} + \rho (h + g/\omega^2)}{k_{12}}, \quad \alpha_2 = \frac{k_{02} + \rho g/\omega^2}{k_{12}},$$

$$\beta_1 = \frac{k_{01} - \rho g/\omega^2}{k_{12}}, \quad \beta_2 = -\frac{k_{01} + \rho (h - g/\omega^2)}{k_{12}}, \quad k_{12} = k_{01} + k_{02} + \rho h. \quad (25)$$

Верхня пластина вироджується в мембрану ($D_1 = 0$). У цьому випадку у визначниках рівнянь (19) і (23) потрібно викреслити другий рядок та другий стовпець, а у співвідношеннях (17) покласти $D_1 = 0$.

Нижня пластина вироджується в мембрану ($D_2 = 0$). Як і в попередньому випадку, у визначниках рівнянь (19) і (23) потрібно викреслити четвертий рядок та четвертий стовпець, а в співвідношеннях (17) покласти $D_2 = 0$.

Нижня і верхня пластини вироджуються в мембрани ($D_1 = D_2 = 0$). У цьому випадку у визначниках рівнянь (19) і (23) потрібно викреслити другий і четвертий рядки та другий і четвертий стовпці, а у співвідношеннях (17) покласти $D_1 = D_2 = 0$.

Частотне рівняння (19) набуває вигляду

$$\left(B_{11m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11nm} E_{11nm}^0 \right) \left(B_{21m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22nm} E_{21nm}^0 \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{12nm} E_{21nm}^0 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{21nm} E_{11nm}^0 \right) = 0 \quad (26)$$

або

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11nm} E_{11nm}^0 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22nm} E_{21nm}^0 \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{12nm} E_{21nm}^0 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{21nm} E_{11nm}^0 \right) = 0. \quad (27)$$

Слід зазначити, що рівняння (26) більш зручне для чисельних розрахунків, а (27) — для аналітичних досліджень.

Нижня або верхня пластина абсолютно жорстка ($T_2 = \infty$ або $T_1 = \infty$). Якщо нижня або верхня пластина стає абсолютно жорсткою, то відповідно $w_2 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$) або $w_1 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$). Переходячи до границі в рівняннях (17) при $T_2 \rightarrow \infty$ або $T_1 \rightarrow \infty$, відповідно отримуємо $a_{21nm} \rightarrow 0$, $a_{22nm} \rightarrow 0$ або $a_{11nm} \rightarrow 0$, $a_{12nm} \rightarrow 0$.

Рівняння несиметричних коливань (19) та симетричних (23) при $T_2 = \infty$ мають вигляд

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=1,2}^{1,2} \right| = 0, \quad (28)$$

а при $T_1 = \infty$ —

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=3,4}^{3,4} \right| = 0. \quad (29)$$

У випадку симетричних коливань в коефіцієнтах (24) слід покласти $\alpha_1 = -1$ при $T_2 = \infty$ та $\beta_2 = -1$ при $T_1 = \infty$. Це впливає зі значень цих коефіцієнтів у формулах (22) відповідно при $k_{02} = \infty$ та $k_{01} = \infty$.

Рівняння (28) у випадку однорідної рідини ($\rho_1 = \rho_2$) збігається з аналогічним рівнянням роботи [1].

Випадок наявності вільної поверхні в рідині ($k_{01} = 0$, $T_1 = 0$, $D_1 = 0$). Більш докладно зупинимось на цьому випадку, оскільки він найбільш простий і включає в себе всі основні властивості даної задачі. Цей випадок реалізується в разі відсутності верхньої пластини. У визначниках рівнянь (19) і (23) потрібно викреслити перший і другий рядки та перший і другий стовпці, а у співвідношеннях (17) — покласти $k_{01} = 0$, $T_1 = 0$, $D_1 = 0$.

У випадку виродження нижньої пластини в мембрану ($D_2 = 0$) рівняння (19) і (23) відповідно запишуться таким чином:

$$B_{21m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22nm} E_{21nm}^0 = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22nm} E_{21nm}^0 = 0 \quad (30)$$

і

$$B_{21} - \frac{\tilde{k}_{02} k_1^*}{\Delta} \tilde{w}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 = 0 \quad (31)$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E_{21n}^0 = \frac{\tilde{k}_{02} k_1^*}{\Delta} \tilde{w}_{21}^0. \quad (32)$$

Рівняння (32) збігається з аналогічним рівнянням із роботи [9], а у випадку однорідної рідини — з аналогічним рівнянням із [8]. Однак в останній статті є ряд помилок: в остаточних виразах переставлені символи g і h .

Частотний спектр рівнянь (30) буде складатися з трьох наборів частот, що відповідають коливанням вільної та внутрішньої поверхонь рідини та коливанням пружного дна. Це можна побачити з другого рівняння (30) вже при $n = 1$. З урахуванням одного члена ряду воно зводиться до рівняння третього ступеня відносно ω^2 . Для одношарової рідини частотний спектр буде складатися вже з двох наборів частот.

Частотний спектр рівнянь (31), (32) буде складатися з чотирьох наборів частот, що відповідають коливанням вільної та внутрішньої поверхонь рідини, коливанням пружного дна та коливанням стовпа рідини як одного цілого. Це можна побачити з рівняння (32) вже при $n = 1$. З урахуванням одного члена ряду воно зводиться до рівняння четвертого ступеня відносно ω^2 . Для одношарової рідини частотний спектр буде складатися вже з трьох наборів частот.

Покажемо це більш докладно на прикладі рівняння (32) для випадку однорідної рідини ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$). При цьому з формул (18), (21), (25) одержимо

$$E_{21n}^0 = \frac{2\mu_2 J_1(\mu_2)}{\mu_2^2 - \xi_n^2}, \quad \tilde{w}_{21}^0 = \frac{2J_1(\mu_2)}{\mu_2}, \quad \mu_2^2 = \frac{k_{02}\omega^2 + \rho g}{T_2} a^2,$$

$$1 + a_{22n} = -\frac{k_n d_{2n} (\omega^2 - \omega_n^2)}{\Delta_n},$$

$$\Delta_n = \rho\omega^2 (\omega^2 \tanh \kappa_n - g k_n) - (\omega^2 - \omega_n^2) k_n d_{2n},$$

$$d_{2n} = T_2 k_n^2 - \rho g - k_{02} \omega^2,$$

$\kappa_n = k_n h$; $\omega_n^2 = g k_n \tanh \kappa_n$ — квадрат частот власних коливань вільної поверхні ідеальної рідини при жорсткому дні [8].

Будемо вважати, що $J_1(\mu_2) \neq 0$, оскільки в іншому випадку права частина рівняння обертається в нуль, а у лівій частині рівняння, переходячи до границі при $\mu_2 \rightarrow \xi_n$, отримуємо $d_{2n} = 0$, що суперечить раніше введений умові $d_{in} \neq 0$.

Введемо безрозмірні змінні

$$x = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{k}_0 = \frac{k_{02}}{\rho a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a}, \quad \tilde{T} = \frac{T_2}{\rho g a^2},$$

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{\omega_n^2 a}{g} = \xi_n \tanh \kappa_n, \quad \tilde{\Delta}_n = \frac{\Delta_n a^2}{\rho g^2}, \quad \tilde{d}_{2n} = \frac{d_{2n}}{\rho g}.$$

З урахуванням введених безрозмірних змінних без знака тильди рівняння (32) набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \xi_n \tanh \kappa_n) \xi_n}{\Delta_n} = \frac{xh - 1}{x(k_0 x + 1)(h + k_0)}, \quad (33)$$

де $\Delta_n = x(x \tanh \kappa_n - \xi_n) - \xi_n d_{2n}(x - \xi_n \tanh \kappa_n)$, $d_{2n} = T\xi_n^2 - 1 - xk_0$.

Покажемо, що частотний спектр цього рівняння буде складатися з частоти коливань стовпа рідини та двох наборів частот, що відповідають коливанням вільної поверхні рідини та пружного дна.

З рівняння (33) одразу видно, що при $k_0 = \infty$ воно має розв'язок $x_{1n} = \xi_n \tanh \kappa_n$, тобто при достатньо масивній основі $k_0 \gg 1$ існує тільки перший набір частот коливань — власні частоти коливань ідеальної рідини.

Якісне дослідження рівняння (33) зручно провести графоаналітичним методом, позначивши через $f_1(x)$ і $f_2(x)$ відповідно ліву і праву частини цього рівняння.

Асимптоти знаходяться з квадратного рівняння $\Delta_n = 0$, яке має два додатних кореня

$$x_{1n,2n} = \frac{(T\xi_n + k_0 \tanh \kappa_n) \xi_n^2 \pm \sqrt{D_n}}{2(k_0 \xi_n + \tanh \kappa_n)}, \quad x_{2n} > x_{1n},$$

де

$$D_n = [T^2 \xi_n^4 - 2(k_0 \xi_n + 2 \tanh \kappa_n) \xi_n^2 \tanh \kappa_n T + (k_0^2 \xi_n^2 \tanh \kappa_n + 4k_0 \xi_n + 4 \tanh \kappa_n) \tanh \kappa_n] \xi_n^2.$$

Нехай n набуває значення від 1 до N , $n = \overline{1, N}$. Функція $f_1(x)$ на піввідрізку $[0, x_{11})$ монотонно зменшується від $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T\xi_n^2 - 1}$ до $-\infty$, на інтервалах (x_{1n}, x_{2n}) — монотонно зменшується від $+\infty$ до $-\infty$ та на останньому інтервалі $(x_{2N}, +\infty)$ — також зменшується від $+\infty$ до 0. Функція $f_2(x)$ на інтервалі $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + h_0}}{h}\right)$ є монотонно зростаючою від $-\infty$ до $\frac{h_0^2}{(1 + h_0)(1 + \sqrt{1 + h_0})^2}$ і на інтервалі $\left(\frac{1 + \sqrt{1 + h_0}}{h}, +\infty\right)$ — монотонно спадною від $\frac{h_0^2}{(1 + h_0)(1 + \sqrt{1 + h_0})^2}$ до 0. В точці $\frac{1 + \sqrt{1 + h_0}}{h}$ вона має максимум $\frac{h_0^2}{(1 + h_0)(1 + \sqrt{1 + h_0})^2}$, де $h_0 = h/k_0$, $k_0 \neq 0$. Якщо $k_0 = 0$, то функція $f_2(x)$ є монотонно зростаючою на всьому інтервалі $(0, +\infty)$ і при $x \rightarrow \infty$ збігається до 1. На піввідрізку $[0, x_{11})$ та інтервалах (x_{1n}, x_{2n}) графік цієї функції має по одній точці перетину з графіком

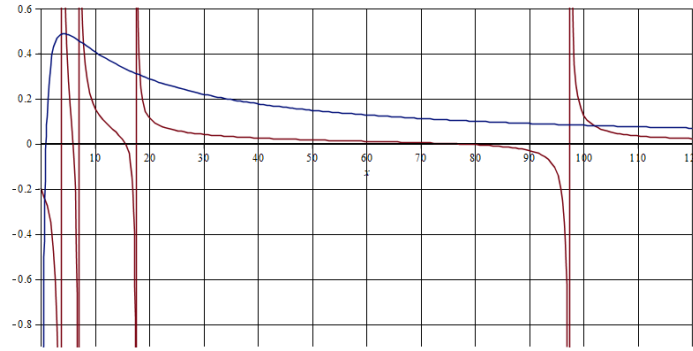


Рис. 2. Графіки лівої та правої частин частотного рівняння (33).

функції $f_2(x)$, а на останньому інтервалі $(x_{2N}, +\infty)$ графіки цих функцій не перетинаються (див. рис. 2). Перша точка перетинів графіків функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ (нижча частота) завжди буде лежати на піввідрізку $[0, x_{11})$ та описувати коливання стовпа рідини. Для наочності проведених досліджень на рис. 2 з урахуванням двох членів ряду $n = \bar{1}, 2$ наведено графіки лівої та правої частин рівняння (33) при $h = 1$, $k_0 = 0,1$, $T = 0,5$.

На основі проведених досліджень і зображеного на рис. 2 характерного графіка можна стверджувати, що високі частоти ($n \gg 1$) першого та другого наборів будуть мало відрізнятися від значень x_{1n} та x_{2n} , а частота коливань стовпа рідини буде найнижчою (див. табл. 1–4).

При $\tanh \kappa_n = 1$ рівняння (33), Δ_n , дискримінант D_n і корені $x_{1n,2n}$ запишуться у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(x - \xi_n d_{2n})} = \frac{xh - 1}{x(k_0x + 1)(h + k_0)}, \quad (34)$$

$$\Delta_n = (x - \xi_n) [x(\xi_n k_0 + 1) - (T\xi_n^2 - 1)\xi_n],$$

$$D_n = (T\xi_n^2 - k_0\xi_n - 2)^2 \xi_n^2, \quad x_{1n} = \xi_n, \quad x_{2n} = \frac{(T\xi_n^2 - 1)\xi_n}{k_0\xi_n + 1}.$$

Оскільки власні числа ξ_n утворюють нескінченно зростаючу числову послідовність $\xi \approx 3,8317$, то при $h \geq 1$ ми маємо $\tanh \kappa_n \approx 1$ і можемо користуватися спрощеним рівнянням (34) та знайденими першим і другим наближеними наборами частот.

Слід зазначити, що основні властивості рівняння (33) і набору частот проявляються вже при $n = 1$. Зі збільшенням числа членів ряду $n > 1$ відбувається уточнення цих трьох основних частот і додавання двох нових частот (див. табл. 1–4). При $n = 1$ рівняння (33) набере вигляду

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \quad (35)$$

де

$$a_0 = h \tanh \kappa_1 - \xi_1 k_0^2, \quad a_1 = -[(T\xi_1^2 + 1)\xi_1 h + 2\xi_1 k_0 + (1 - \xi_1^2 k_0^2) \tanh \kappa_1],$$

Таблиця 1. $h = 1, k_0 = 0,1, T = 1, D = 0$

$n = 1$			$n = \overline{1, 2}$			$n = \overline{1, 3}$		
0,9175	3,8276	59,4837	0,8971	3,8276	54,5494	0,8879	3,8276	53,3272
				7,0156	638,0322		7,0156	297,5138
								10,1735

Таблиця 2. $h = 1, k_0 = 0,1, T = 0,5, D = 0.$

$n = 1$			$n = \overline{1, 2}$			$n = \overline{1, 3}$		
0,8352	3,8271	30,2887	0,8019	3,8271	26,969	0,7874	3,827	26,2091
				7,0156	327,6779		7,0156	147,3403
								10,1735

Таблиця 3. $h = 0,5, k_0 = 0,1, T = 0,5, D = 0.$

$n = 1$			$n = \overline{1, 2}$			$n = \overline{1, 3}$		
1,608	3,6345	34,6318	1,5377	3,6324	29,4953	1,5075	3,6316	28,4802
				7,0019	486,3209		7,0019	150,7179
								10,1727

Таблиця 4. $h = 1, k_0 = 0,05, T = 0,5, D = 0.$

$n = 1$			$n = \overline{1, 2}$			$n = \overline{1, 3}$		
0,8474	3,8271	28,9854	0,8156	3,827	27,7381	0,8017	3,827	27,3574
				7,0156	198,1447		7,0156	166,6982
								10,1735 1146,5336

$$a_2 = [(1 + \xi_1 h \tanh \kappa_1) \xi_1 T + 2k_0 \tanh \kappa_1] \xi_1^2, \quad a_3 = -(T \xi_1^2 - 1) \xi_1^2 \tanh \kappa_1.$$

Для чергування знаків у коефіцієнтів кубічного рівняння $a_0 > 0, a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$ достатньо вимагати, щоб

$$k_0 < \sqrt{\frac{h \tanh \kappa_1}{\xi_1}} \approx 0,5109 \sqrt{h \tanh \kappa_1}, \quad k_0 < \frac{1}{\xi_1} \approx 0,2610, \quad T > \frac{1}{\xi_1^2} \approx 0,06811. \quad (36)$$

Варто також зауважити, що параметри T, h і k_0 повинні задовольняти умову лінійності статичного прогину

$$\left(\frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right) (h + k_0) < A,$$

де $\eta = \sqrt{\frac{1}{T}}$ і $A < 0,1$.

Таблиця 5. $h = 1$, $k_0 = 1$, $T = 0$, $D = 1$.

$n = 1$			$n = \overline{1, 2}$			$n = \overline{1, 3}$		
62,772	3,8281	1313,866	62,772	3,8281	1230,289	62,764	3,8281	1229,657
7407,853			7,0156 7166,632			7,0156 6789,014		
						10,173		

Якщо розкласти дискримінант рівняння (35) у ряд по T , то старший коефіцієнт при T^4 додатний і дорівнює $(1 - \xi_1 h \tanh \kappa_1)^2 h^2 \xi_1^{12}$.

Таким чином, при достатньо великому $T > 1$ завжди існують три дійсні корені. З огляду на нерівності (36) на основі правила знаків Декарта про кількість додатних коренів маємо три додатних кореня.

7. Числові дослідження частотних рівнянь (33) і (23). В табл. 1–5 наведено залежності квадратів безрозмірної частоти осесиметричних коливань стовпа рідини (перший стовпець), першого та другого наборів (другий та третій стовпці) від числа членів у рядах частотного рівняння (33) (табл. 1–4) та частотного рівняння (23) (табл. 5) у випадку однорідної рідини і наявності вільної поверхні [14]. Розрахунки проведено для таких значень параметрів: $h = 0,5; 1,0$, $k_0 = 0,05; 0,1$, $T = 0,5; 1,0$, $D = 0$ (табл. 1–4) та $h = 1,0$, $k_0 = 1,0$, $T = 0$, $D = D_2/\rho g a^4 = 1$ (табл. 5).

З табл. 1–4 випливає, що у випадку мембрани частота коливань стовпа рідини є нижчою. Вона зростає зі збільшенням натягу, зменшенням глибини заповнення або маси мембрани. Зі збільшенням числа членів ряду частота коливань стовпа рідини незначно уточнюється у бік зменшення. З табл. 5 можна побачити, що у випадку пластини частота коливань стовпа рідини вже не є нижчою, як у випадку мембрани, та знаходиться між нижчими частотами першого та другого наборів.

8. Висновки. У роботі досліджено частотне рівняння власних коливань важкої ідеальної двошарової нестисливої рідини в жорсткому круговому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких кругових закріплених пластин. Розглянуто осесиметричні (поздовжні) та несиметричні (поперечні) коливання рідини та пластин і різні граничні випадки виродження пластин у мембрани, в абсолютно жорсткі пластини, а також випадок відсутності верхньої пластини. Показано, що частотний спектр сумісних несиметричних коливань пружних основ та двошарової ідеальної рідини складається з трьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ і коливанням внутрішньої поверхні розділу рідин, а частотний спектр сумісних симетричних коливань складається з тих самих трьох наборів частот, що для несиметричних коливань, та додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого. Узагальнено результати роботи [14] на випадок двошарової рідини та несиметричних коливань, отримано більш прості частотні рівняння та усунуто сингулярність у знаменнику коефіцієнтів частотного рівняння при співпаданні масових характеристик пластин. Роботу [16] узагальнено на випадок несиметричних коливань, проведено аналітичні дослідження частотного спектру як для несиметричних, так і для симетричних коливань. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном у вигляді мембрани аналітично та чисельно досліджено частотний спектр, отримано більш прості коефіцієнти частотних рівнянь, показано співпадання частотних рівнянь для двошарової рідини з аналогічними рівняннями у ви-

падку однорідної рідини [14]. Для ряду окремих випадків показано співпадання частотних рівнянь з відомими в літературі рівняннями.

Числові дослідження підтвердили аналітичний аналіз структури частотного спектра та показали на прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном, що частотний спектр сумісних симетричних коливань пружного дна та рідини складається з частоти коливань стовпа рідини як одного цілого та двох наборів частот, що відповідають коливанням вільної поверхні рідини та пружного дна. Також показано, що частота коливань стовпа рідини у випадку мембрани є нижчою, а у випадку пластини знаходиться між нижчими частотами першого та другого наборів. Зауважено, що в невагомості осесиметричні коливання відсутні, якщо одна з пластин або мембран є абсолютно жорсткою. Ряди частотних рівнянь збігаються достатньо швидко, як правило, достатньо двох-трьох членів у рядах для прийнятної на практиці точності. З урахуванням масових характеристик пластин значно зростає час розв'язування частотних рівнянь.

Для визначення впливу коливань пружних основ на коливання поверхні розділу необхідними стають подальші аналітичні та числові дослідження на базі виведеного частотного рівняння. Отримані результати та їх розвиток можуть бути застосовані при знаходженні власних форм коливань, а також у задачах про вимушені коливання системи тверде тіло – рідина – пружні основи та задачах, пов'язаних із розрахунком стійкості зазначеної гідропружної системи. Подана робота робить можливим подальше узагальнення поставленої задачі на випадок нелінійних коливань.

У подальших роботах планується порівняння результатів розрахунків, отриманих за допомогою наведеного методу, з результатами, одержаними іншими авторами. Так, зокрема, можна показати, що значення власних частот у випадку несиметричних коливань співпадають із відповідними значеннями, наведеними в монографії [1].

Література

1. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
2. Троценко В. А., Богун Р. И. Поперечные колебания жидкости в длинном цилиндрическом контейнере с мембранной или упругой пластинкой на свободной поверхности // Нелін. коливання. – 2009. – 12, № 3. – С. 379–404.
3. Богун Р. І., Троценко В. А. Власні коливання рідини в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном та пружними елементами на вільній поверхні рідини // Нелін. коливання. – 2010. – 13, № 4. – С. 461–482.
4. Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А. Влияние перегрузки на осесимметричные колебания круговой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости в цилиндрическом резервуаре // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – 14, № 2. – С. 32–41.
5. Пожалостин А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном // Изв. вузов. Авиацион. техника. – 1963. – № 4. – С. 25–32.
6. Петренко М. П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 6. – С. 44–50.
7. Петренко М. П. Вынужденные колебания жидкости и упругого днища цилиндрического бака // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 6. – С. 127–131.
8. Карнаух А. Ю., Дидок Н. К. Собственные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и жидкости со свободной поверхностью // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2010. – 20. – С. 102–108.

9. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Джуха Ю. А. Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2015. – № 1-2. – С. 116–125.
10. Нго Зуї Кан. О движении несмешивающихся жидкостей в сосуде с плоским упругим дном // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – №. 5. – С. 151–163.
11. Лакиза В. Д. Исследование динамических процессов в жестком цилиндрическом сосуде с упругим дном, частично заполненном жидкостью // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 11. – С. 114–120.
12. Дидок Н. К., Кононов Ю. Н. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2013. – **27**. – С. 122–131.
13. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуї Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
14. Кононов Ю. Н., Русаков В. Ф., Джуха Ю. А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 105–114.
15. Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 103–115.
16. Кононов Ю. М., Шевченко В. П., Джуха Ю. О. Осесиметричні коливання пружних кільцевих основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 1. – С. 85–95.
17. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] // Наука и образование: электрон. науч.-техн. изд. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – № 11. <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html>
18. Пожалостин А. А., Гончаров Д. А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] // Наука и инновации: инж. журн. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – № 12. <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html>
19. Goncharov D. A., Pozhalostin A. A. Symmetric vibrations of a liquid in a vessel with a separator and an elastic bottom [Electronic resource] // J. Phys.: Conf. Series. – Moscow: Bauman Moscow State Techn. Univ., 2018. – Vol. 991. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/991/1/012027/pdf>
20. Pozhalostin A. A., Goncharov D. A. Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers // Russian Aeronautics. – 2015. – **58**, № 1. – P. 37–41.
21. Tong P. Liquid motion in a circular cylindrical container with a flexible bottom // AIAA J. – 1967. – **5**, № 10. – P. 1842–1848.
22. Bauer H. F., Chang S., Wang J. T. S. Nonlinear liquid motion in a longitudinally excited container with elastic bottom // AIAA J. – 1971. – **9**, № 12. – P. 2333–2339.
23. Chiba M. Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Pt II: Linear axisymmetric vibration analysis // J. Fluids Structures. – 1993. – **7**, № 1. – P. 57–73.
24. Chiba M. Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation // J. Sound Vib. – 1994. – **169**, № 3. – P. 387–394.
25. Bauer H. F. Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover // J. Sound Vib. – 1995. – **180**, № 5. – P. 689–704.
26. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid // Appl. Math. Model. – 2013. – **37**, № 1-2. – P. 228–239.
27. Jeong K.-H. Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid // J. Sound Vib. – 2003. – **260**, № 4. – P. 653–670.

Одержано 06.09.2018,
після доопрацювання — 02.11.2018