УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМИ

С. П. Пафик

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, м. Київ, 01030, Україна
e-mail: s.p.pafyk@npu.edu.ua

By using the theory of polynomial matrix pencils, we construct the asymptotics of linearly independent solutions of the homogeneous singularly perturbed system of linear differential equations of arbitrary order m with matrix of higher derivatives, which degenerates as a small parameter tends to zero. The general case is considered. In this case, the limit matrix pencil has several finite and infinite elementary divisors of both the same and different multiplicities. The corresponding asymptotic estimates are given.

З використанням теорії поліноміальних матричних в'язок побудовано асимптотику лінійно незалежних розв'язків однорідної сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь довільного m-го порядку з матрицею при старших похідних, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля. Розглянуто загальний випадок. А саме, передбачено, що гранична в'язка матриць має кілька скінченних і кілька нескінченних елементарних дільників як однакової, так і різної кратності. Наведено відповідні асимптотичні оцінки.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh} A_m(t,\varepsilon)\,\frac{d^m x}{dt^m} + \varepsilon^{(m-1)h} A_{m-1}(t,\varepsilon)\,\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\,\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = 0, \qquad (1.1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{0,m},$ — дійсні або комплекснозначні $(n\times n)$-матриці, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in N,\ \varepsilon_0 \ll 1,\ t \in [0;T]$.

Припускаємо, що виконуються такі умови:

1°. Матриці $A_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{0,m},$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), \quad i=\overline{0,m}. \qquad (1.2)$$

2°. Матриці $A_i^{(k)}(t),\ i=\overline{0,m},\ k=0,1,\ldots,$ — нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$.

3°. $\det A_m^{(0)}(t) = 0\ \ \forall t\epsilon[0;T]$.

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t) \qquad (1.3)$$

системи (1.1) регулярна при всіх $t\in[0;T]$ і має кратне власне значення $\lambda_0(t)$, якому відповідає r_i скінченних елементарних дільників кратності $p_i,\ i=\overline{1,\alpha}$, а також s_j нескінченних елементарних дільників кратності $q_j,\ j=\overline{1,\beta}$, причому

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_\alpha, \quad q_1 > q_2 > \ldots > q_\beta, \quad r_1 + r_2 + \ldots + r_\alpha = r,$$
$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\beta = s, \quad r_1 p_1 + r_2 p_2 + \ldots + r_\alpha p_\alpha + s_1 q_1 + s_2 q_2 + \ldots + s_\beta q_\beta = mn.$$

Тут і далі символом (x, y) позначається скалярний добуток у n-вимірному комплексному просторі.

Питання побудови асимптотичних розв'язків системи (1.1) за степенями малого параметра вивчалося в роботах [1 – 3]. Так, у роботі [1] система (1.1) досліджувалася у випадку простих скінченних та нескінченних елементарних дільників граничної в'язки матриць (1.3), а в [2, 3] розглядалися випадки, коли в'язка матриць (1.3) має кратні скінченні та нескінченні елементарні дільники. Зокрема, в [2] досліджено випадок, коли в'язка матриць (1.3) має по одному скінченному та нескінченному елементарному дільнику, а в [3] — коли вона має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників однакової кратності.

У даній роботі розглядається найбільш загальний випадок, коли гранична в'язка матриць (1.3) має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників як однакової, так і різної кратності.

Для дослідження асимптотики лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) використовується теорія поліноміальних матричних в'язок, викладена в [1]. У пункті 2 доводиться основна теорема, яка визначає вигляд формальних розв'язків системи (1.1) у загальному випадку. При доведенні цієї теореми подається алгоритм, за яким визначаються коефіцієнти відповідних формальних розвинень. У заключному пункті 3 сформульовано умови, при виконанні яких побудовані формальні розв'язки мають асимптотичний характер, і наводяться відповідні асимптотичні оцінки.

2. Побудова формальних розв'язків. Розв'язки системи рівнянь (1.1), що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t, \mu) = u(t, \mu) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \lambda(\tau, \mu) d\tau \right), \tag{2.1}$$

де $u(t, \mu)$ — n-вимірний вектор, а $\lambda(t, \mu)$ — скалярна функція, які зображаються у вигляді формальних розвинень

$$u(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u^{(k)}(t), \tag{2.2}$$

$$\lambda(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda^{(k)}(t), \tag{2.3}$$

в яких $\mu = \sqrt[p_i]{\varepsilon}, \ i = \overline{1, \alpha}$.

Покажемо, що вектор (2.1) формально задовольняє систему (1.1). Для цього підставимо вектор (2.1) в систему (1.1). Диференціюючи (2.1) k разів, отримуємо рекурентний вираз

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{-jh} C_k^i \, \frac{d^{k-i} u(t, \mu)}{dt^{k-i}} \, D_{i-j} \left[\lambda^j \right] \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \lambda(\tau, \mu) d\tau \right), \quad k = \overline{0, m}, \tag{2.4}$$

де

$$D_{i-j}\left[\lambda^j\right] = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_j=i-j} \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}[\lambda], \qquad j=\overline{1,i}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.5}$$

— суми всіляких добутків j операторів $\Gamma_{s_\alpha}[\lambda] = \dfrac{d^{s_\alpha}}{dt^{s_\alpha}}\lambda(t,\mu)$, $\alpha=\overline{1,j}$, з цілими невід'ємними індексами, сума яких дорівнює $i-j$. Оператори диференціювання, які містяться в $\Gamma_{s_\alpha}[\lambda]$, діють на весь вираз праворуч від них.

Підставивши вектори (2.4) у систему (1.1), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{(k-j)h} C_k^i D_{i-j}[\lambda^j] A_k(t,\varepsilon) \frac{d^{k-i}u(t,\mu)}{dt^{k-i}} = 0. \tag{2.6}$$

Оскільки функція $\lambda(t,\mu)$ зображається у вигляді формального розвинення (2.3), функції $D_{i-j}[\lambda^j]$, $j=\overline{1,i}$, $i=\overline{1,m}$, визначені формулою (2.5), теж можна подати у вигляді формальних розвинень за степенями μ:

$$D_{i-j}[\lambda^j] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k D_{i-j}^{(k)}\left[\lambda^j\right], \qquad j=\overline{1,i}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.7}$$

де

$$D_{i-j}^{(k)}\left[\lambda^j\right] = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_j=i-j}\ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_j=k}\ \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}^{(k_\alpha)}[\lambda], \qquad j=\overline{1,i}, \quad i=\overline{1,m} \tag{2.8}$$

(підсумовування здійснюється за всіма можливими наборами цілих невід'ємних індексів s_α, k_α, $\alpha=\overline{1,j}$, причому сума нижніх індексів дорівнює $i-j$, а верхніх — k).

Підставивши в (2.6) розвинення (1.2), (2.2), (2.3), (2.7) та прирівнявши в отриманій рівності коефіцієнти при однакових степенях параметра ε, в результаті отримаємо нескінченну систему векторних рівнянь

$$P\big(t,\lambda^{(0)}(t)\big)u^{(0)}(t) = 0, \tag{2.9}$$

$$P\big(t,\lambda^{(0)}(t)\big)u^{(s)}(t) = a_i^{(s)}(t), \qquad i=\overline{1,\alpha}, \quad s=1,2,\ldots, \tag{2.10}$$

де

$$a_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{s} D_0^{(\gamma)}\left[\lambda^k\right] A_k^{(0)}(t)u^{(s-\gamma)}(t) + g_i^{(s)}(t), \qquad i=\overline{1,\alpha}, \quad s=1,2,\ldots, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} g_i^{(s)}(t) = &-\sum_{k=0}^{m}\sum_{\gamma=0}^{s-p_i}\sum_{j=1}^{\left[\frac{s-\gamma}{p_i}\right]} D_0^{(\gamma)}[\lambda^k] A_k^{(j)}(t) u^{(s-\gamma-jp_i)}(t) - \\ &-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{\gamma}\sum_{\delta=0}^{s-(k-j)p_ih}\sum_{l=0}^{\left[\frac{s-\delta-(k-j)p_ih}{p_i}\right]} C_k^{\gamma} D_{\gamma-j}^{(\delta)}\left[\lambda^j\right] A_k^{(l)}(t) \frac{d^{k-\gamma}u^{(s-\delta-lp_i-(k-j)p_ih)}(t)}{dt^{k-\gamma}} - \\ &-\sum_{k=2}^{m}\sum_{\gamma=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{s-(k-\gamma)p_ih}\sum_{\delta=0}^{\left[\frac{s-j-(k-\gamma)p_ih)}{p_i}\right]} D_{k-\gamma}^{(j)}\left[\lambda^\gamma\right] A_k^{(\delta)}(t) u^{(s-j-\delta p_i-(k-\gamma)p_ih)}(t), \end{aligned} \tag{2.12}$$

$s=p_i, p_i+1, \ldots,\ i=\overline{1,\alpha}$.

Покажемо, що з цієї системи можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3) при виконанні умови 4°.

З рівняння (2.9) відразу дістанемо

$$\lambda^{(0)}(t) = \lambda_0(t). \tag{2.13}$$

Система (2.10) сумісна тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова:

$$\left(a_i^{(s)}(t), \psi_j(t)\right) = 0, \qquad j = \overline{1, r_\gamma}, \quad i, \gamma = \overline{1, \alpha}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

де $\psi_j(t),\ j = \overline{1, r_\gamma},\ \gamma = \overline{1, \alpha},$ — базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(t, \lambda_0(t))$, спряженої до матриці $P(t, \lambda_0(t))$.

Умову (2.14) представимо в зручному для нас вигляді. Для цього зробимо деякі додаткові викладки. Позначимо через E_0 лінійну оболонку власних векторів $\varphi_i(t),\ i = \overline{1, r}$ $(r_1 + r_2 + \ldots + r_\alpha = r)$, в'язки матриць $P(t, \lambda_0(t))$, а через $E_{0j},\ j = \overline{1, \alpha},$ — лінійну оболонку векторів $\varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i}(t),\ i = \overline{1, r_j},\ j = \overline{1, \alpha}$. Тоді підпростір E_0 є прямою сумою підпросторів $E_{0j},\ j = \overline{1, \alpha}$: $E_0 = E_{01} \oplus E_{02} \oplus \ldots \oplus E_{0\alpha}$. Введемо до розгляду оператори проектування $Q_j,\ j = \overline{1, \alpha}$, які відображають n-вимірний простір E на r_j-вимірний підпростір $E_{0j},\ j = \overline{1, \alpha}$, за правилом

$$Q_j u(t) = \sum_{i=1}^{r_j} \left(u(t), \psi_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i}(t)\right) \varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i}(t), \quad j = \overline{1, \alpha} \quad \forall t \in [0; T].$$

Тоді умова сумісності (2.14) еквівалентна такій:

$$Q_j a_i^{(s)}(t) = 0, \qquad i, j = \overline{1, \alpha}, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{2.15}$$

При виконанні цієї умови вектори $u^{(s)}(t),\ s = 0, 1, \ldots,$ визначатимемо за формулами

$$u^{(0)}(t) = y^{(0)}(t), \tag{2.16}$$

$$u^{(s)}(t) = H(t) a_i^{(s)}(t) + y^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.17}$$

де $y^{(s)}(t),\ s = 0, 1, \ldots,$ — вектори з підпростору E_0, які потрібно визначити так, щоб виконувалась умова сумісності (2.15), а $H(t)$ — матриця, напівобернена до матриці $P(t, \lambda_0(t))$.

Умову (2.15) використаємо для визначення функцій $\lambda^{(j)}(t),\ j = 1, 2, \ldots,$ і векторів $u^{(j)}(t),\ j = 0, 1, \ldots$. Згідно з результатами, отриманими в [3], вектори $a_i^{(s)}(t)$ можемо представити у вигляді

$$\begin{aligned} a_i^{(s)}(t) = &- \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(s-k)}(\lambda) \, \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma! \partial \lambda^\gamma} \, \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y^{(k)}(t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{s-p_i-1} \sum_{\gamma=1}^{s-p_i-j} P_\gamma^{(s-p_i-j)}(\lambda) \sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m\right) g_i^{(p_i+j)}(t) + \\ &+ g_i^{(s)}(t), \qquad i = \overline{1, \alpha}, \quad s = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.18}$$

де

$$P_i^{(s)}(\lambda) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_i=s} \lambda^{(j_1)}(t)\lambda^{(j_2)}(t)\ldots\lambda^{(j_i)}(t)$$

— сума можливих добутків i функцій $\lambda^{(j)}(t)$ з натуральними індексами j_k, сума яких дорівнює s. Вирази $\sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m)$ визначаються за рекурентними формулами

$$\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m) = E,$$

$$\sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1,m)} H_j(t)\sigma^{i-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m), \quad i = 2, 3, \ldots.$$

У рівності (2.18) матриці $H_k(t),\ \widetilde{H}_k(t),\ k = \overline{1, m}$, визначаються за формулами

$$H_k(t) = -H(t)\,\frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k},$$

$$\widetilde{H}_k(t) = -\frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\,H(t), \quad k = \overline{1, m},$$

де

$$\frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k} = \sum_{i=k}^{m} C_i^k (\lambda_0(t))^{i-k} A_i^{(0)}(t), \quad k = \overline{1, m}.$$

Оскільки за умовою 4° в'язка матриць (1.3) має $r_i > 1,\ i = \overline{1, \alpha}$, скінченних елементарних дільників кратністю $p_i > 1,\ i = \overline{1, \alpha}$, то згідно з [1] їм відповідає r_i жорданових ланцюжків завдовжки $p_i,\ i = \overline{1, \alpha}$, кожний. Ці ланцюжки складаються з власних векторів $\varphi^{(1)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t),\ i = \overline{1, r_k},\ k = \overline{1, \alpha}$, та відповідних приєднаних векторів $\varphi^{(j)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t),\ i = \overline{1, r_k},\ j = \overline{2, p_k},\ k = \overline{1, \alpha}$, які задовольняють співвідношення

$$P\,(t, \lambda_0(t))\,\varphi^{(1)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t) = 0, \quad i = \overline{1, r_k}, \quad k = \overline{1, \alpha}, \tag{2.19}$$

$$P\,(t, \lambda_0(t))\,\varphi^{(j)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t) + \sum_{\gamma=1}^{\min(j-1,m)} \frac{\partial^\gamma P\,(t, \lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\varphi^{(j-\gamma)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t) = 0, \tag{2.20}$$

$i = \overline{1, r_k},\ j = \overline{2, p_k},\ k = \overline{1, \alpha}$, а рівняння

$$P\,(t, \lambda_0(t))\,y_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i} + \sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)} \frac{\partial^\gamma P\,(t, \lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\varphi^{(p_k+1-\gamma)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t) = 0,$$

$i = \overline{1, r_k},\ k = \overline{1, \alpha}$, нерозв'язні відносно векторів $y_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i},\ i = \overline{1, r_k},\ k = \overline{1, \alpha}$.

Враховуючи сумісність рівнянь (2.19), (2.20), вектори цих жорданових ланцюжків визначаємо за формулами

$$\varphi^{(1)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t) = \varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t), \qquad i = \overline{1, r_k}, \quad k = \overline{1, \alpha},$$

$$\varphi^{(j)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t) = \sigma^j\,(H_1, H_2, \ldots, H_m) \times$$

$$\times\, \varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t), \qquad i=\overline{1,r_k}, \quad j=\overline{2,p_k}, \quad k=\overline{1,\alpha}. \qquad (2.21)$$

Вектори $\psi_j(t),\ j=\overline{1,r},\ r=r_1+r_2+\ldots+r_\alpha$, як і власні вектори $\varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t)$, $i=\overline{1,r_k},\ k=\overline{1,\alpha}$, визначаються неоднозначно, але при будь-якому їх виборі з урахуванням [3] справедлива формула

$$\det\left\|\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\frac{\partial^\gamma P\,(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\varphi^{(p_k+1-\gamma)}_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t),\right.\right.$$
$$\left.\left.\psi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+j}(t)\right)\right\|_{i,j=\overline{1,r_k},\ k=\overline{1,\alpha}}\neq 0 \quad \forall t\in[0;T].$$

Це дає змогу з урахуванням формули (2.21) визначити вектори $\psi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+j}(t),\ j=$ $=\overline{1,r_k},\ k=\overline{1,\alpha}$, так, щоб виконувалися співвідношення

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\frac{\partial^\gamma P\,(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{p_k-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+i}(t),\psi_{r_1+r_2+\ldots+r_{k-1}+j}(t)\right)=$$
$$=\delta_{r_1+\ldots+r_{k-1}+i,r_1+\ldots+r_{k-1}+j}, \qquad i,j=\overline{1,r_k}, \quad k=\overline{1,\alpha}. \qquad (2.22)$$

Виходячи з сумісності систем (2.19), (2.20) та рівностей (2.21), (2.22), можна переконатися в таких властивостях операторів проектування $Q_l,\ l=\overline{1,\alpha}$: якщо $y_k^{(1)}(t)\in E_{0k},\ k=\overline{1,\alpha}$, то

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)}Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_k^{(1)}(t)=0, \qquad j=\overline{1,p_k-1}, \quad k,l=\overline{1,\alpha}, \qquad (2.23)$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}Q_k\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{p_k-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_k^{(1)}(t)=y_k^{(1)}(t), \quad k=\overline{1,\alpha}, \qquad (2.24)$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{p_k-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_k^{(1)}(t)=0, \qquad k\neq l, \quad k=\overline{1,\alpha}. \qquad (2.25)$$

Оскільки $y^{(k)}(t)\in E_0$, а $E_0=E_{01}\oplus E_{02}\oplus\ldots\oplus E_{0\alpha}$, маємо

$$y^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\alpha}y_n^{(k)}(t),$$

де $y_n^{(k)}(t)\in E_{0n},\ n=\overline{1,\alpha}$. Тоді формула (2.18) набуває вигляду

$$a_i^{(s)}(t)=-\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)}P_j^{(s-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-p_i-1}\sum_{\gamma=1}^{s-p_i-j} P_{\gamma}^{(s-p_i-j)}(\lambda)\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m\right)\times$$
$$\times g_i^{(p_i+j)}(t)+g_i^{(s)}(t),\quad i=\overline{1,\alpha},\quad s=1,2,\ldots. \qquad (2.26)$$

З рівності (2.26), враховуючи властивості (2.23) – (2.25) операторів проектування Q_l, $l=\overline{1,\alpha}$, приходимо до висновку, що умова сумісності (2.15) при $s=\overline{1,p_\alpha-1}$ виконується.

Зафіксуємо $i,\ i=\overline{1,\alpha}$. Знайдемо розв'язки, які відповідають r_i скінченним елементарним дільникам в'язки матриць (3.5) кратності p_i. Для цього використаємо вектори $a_i^{(s)}(t),\ s=1,2,\ldots$. Як було встановлено вище, при $s=\overline{1,p_\alpha-1}$ умова сумісності (2.15) виконується. Розглянемо її при $s=p_\alpha$:

$$Q_l a_i^{(p_\alpha)}(t)=0,\quad l=\overline{1,\alpha},$$

або

$$\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{p_\alpha-1}\sum_{j=1}^{p_\alpha-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_\alpha-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}\times$$
$$\times(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)=0,\qquad l=\overline{1,\alpha},\quad p_\alpha<p_i.$$

З урахуванням (2.23) – (2.25) остання рівність запишеться у вигляді $P_{p_\alpha}^{(p_\alpha)}(\lambda)y_\alpha^{(0)}(t)=0$. Оскільки $P_{p_\alpha}^{(p_\alpha)}(\lambda)\neq 0$, маємо $y_\alpha^{(0)}(t)=0$.

Використовуючи метод математичної індукції, неважко переконатися, що при $s= =\overline{p_\alpha,p_{\alpha-1}-p_\alpha-1},\ p_{\alpha-1}<p_i$, умова (2.15) для векторів $a_i^{(s)}(t)$ зведеться до умови

$$y_\alpha^{(k)}(t)=0,\quad k=\overline{0,p_{\alpha-1}-p_\alpha-1}. \qquad (2.27)$$

При $s=p_{\alpha-1}$ одержимо

$$\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{p_{\alpha-1}-1}\sum_{j=1}^{p_{\alpha-1}-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_{\alpha-1}-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}\times$$
$$\times(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)=0,\qquad l=\overline{1,\alpha},\quad p_{\alpha-1}<p_i.$$

Беручи до уваги (2.27), звідси маємо

$$\sum_{k=p_{\alpha-1}-p_\alpha}^{p_{\alpha-1}-1}\sum_{j=1}^{p_{\alpha-1}-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_{\alpha-1}-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial_\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_\alpha^{(k)}(t)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{p_{\alpha-1}-1}\sum_{j=1}^{p_{\alpha-1}-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_{\alpha-1}-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times$$
$$\times\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)=0,\qquad l=\overline{1,\alpha},\quad p_{\alpha-1}<p_i.$$

Враховуючи властивості (2.23) – (2.25) операторів проектування $Q_l,\ l=\overline{1,\alpha}$, одержуємо

$$P_{p_{\alpha-1}}^{(p_{\alpha-1})}(\lambda)y_{\alpha-1}^{(0)}(t)=0,\qquad P_{p_\alpha}^{(p_\alpha)}(\lambda)y_\alpha^{(p_{\alpha-1}-p_\alpha)}(t)=0,$$

звідки

$$y_{\alpha-1}^{(0)}(t) = 0, \qquad y_{\alpha}^{(p_{\alpha-1}-p_\alpha)}(t) = 0.$$

При $s < p_{\alpha-2} < p_i$ дістанемо

$$y_\alpha^{(k)}(t) = 0, \quad k = \overline{0, p_{\alpha-2} - p_\alpha - 1}, \qquad y_{\alpha-1}^{(k)}(t) = 0, \quad k = \overline{0, p_{\alpha-2} - p_{\alpha-1} - 1}.$$

Продовжуючи цей процес, встановимо, що

$$y_n^{(k)}(t) = 0, \qquad n = \overline{i+1, \alpha}, \quad k = \overline{0, p_i - p_n - 1}. \tag{2.28}$$

Розглянемо тепер умову (2.15) для вектора $a_i^{(p_i)}(t)$:

$$-\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}\times$$
$$\times (H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) + Q_l g_i^{(p_i)}(t) = 0, \quad l = \overline{1, \alpha}.$$

З урахуванням формули (2.28) ці рівності набувають вигляду

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) -$$
$$-\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_i^{(k)}(t) -$$
$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}\times$$
$$\times (H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) + Q_l g_i^{(p_i)}(t) = 0, \quad l = \overline{1, \alpha}.$$

Згідно з (2.23) – (2.25), звідси маємо $Q_l g_i^{(p_i)}(t) = 0,\ l = \overline{1, i-1},\ P_{p_i}^{(p_i)}(\lambda) y_i^{(0)}(t) - Q_i g_i^{(p_i)}(t) = 0,\ P_{p_l}^{(p_l)}(\lambda) y_l^{(p_i-p_l)}(t) - Q_l g_i^{(p_i)}(t) = 0,\ l = \overline{i+1, \alpha}.$

Беручи до уваги, що $g_i^{(p_i)}(t) = -K(t) y^{(0)}(t)$, де

$$K(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_0^k(t) A_k^{(1)}(t) + \delta_{1,h}\sum_{k=1}^{m} C_k^{k-1}\lambda_0^{k-1}(t) A_k^{(0)}(t)\,\frac{d}{dt} + \delta_{1,h}\sum_{k=2}^{m}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_0^{k-1-i}(t)\,\frac{d\lambda_0^i(t)}{dt}\,A_k^{(0)}(t),$$

одержуємо

$$Q_l K(t) y^{(0)}(t) = 0, \quad l = \overline{1, i-1},$$
$$P_{p_i}^{(p_i)}(\lambda) y_i^{(0)}(t) + Q_i K(t) y^{(0)}(t) = 0, \qquad P_{p_l}^{(p_l)}(\lambda) y_l^{(p_i-p_l)}(t) + Q_l K(t) y^{(0)}(t) = 0, \quad l = \overline{i+1, \alpha}.$$

Враховуючи рівності (2.28), вектор $y^{(0)}(t)$ подаємо у вигляді

$$y^{(0)}(t) = y_i^{(0)}(t) + \overline{y}^{(0)}(t), \tag{2.29}$$

де

$$\overline{y}^{(0)}(t)=\sum_{n=1}^{i-1}y_n^{(0)}(t).$$

У результаті дістанемо

$$Q_lK\overline{y}^{(0)}(t)+Q_lKy_i^{(0)}(t)=0,\quad l=\overline{1,i-1}, \tag{2.30}$$

$$\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i}y_i^{(0)}(t)+Q_iKy_i^{(0)}(t)+Q_iK\overline{y}^{(0)}(t)=0, \tag{2.31}$$

$$\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_l}y_l^{(p_i-p_l)}(t)+Q_lKy_i^{(0)}(t)+Q_lK\overline{y}^{(0)}(t)=0,\quad l=\overline{i+1,\alpha}. \tag{2.32}$$

Рівняння (2.30) еквівалентні одному рівнянню

$$\sum_{l=1}^{i-1}Q_lK\overline{y}^{(0)}(t)+\sum_{l=1}^{i-1}Q_lKy_i^{(0)}(t)=0. \tag{2.33}$$

Введемо позначення

$$\sum_{l=1}^{i-1}Q_lK=\mathfrak{K}_i,$$

а через $\overline{\mathfrak{K}}_i$ позначимо звуження оператора $\mathfrak{K}_i$ на підпростір $E_{01}\oplus E_{02}\oplus\ldots\oplus E_{0,i-1}$, тобто підпростір розмірності $r_1+r_2+\ldots+r_{i-1}$, базис якого складають вектори $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{r_1}(t)$, $\varphi_{r_1+1}(t),\ldots,\varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{i-1}}(t)$. У цьому базисі оператор $\overline{\mathfrak{K}}_i$ зображується у вигляді квадратної матриці $\overline{K}_i(t)$ порядку $r_1+r_2+\ldots+r_{i-1}$, тобто

$$\overline{K}_i(t)=\big\|\big(K(t)\varphi_l(t),\psi_k(t)\big)\big\|_{k,l=\overline{1,r_1+\ldots+r_{i-1}}}.$$

Матриця $K_i(t)$ оператора $\mathfrak{K}_i$ в базисі підпростору E_{0i}, зображеного векторами $\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+1}(t),\ldots,\varphi_{r_1+\ldots+r_i}(t)$, є прямокутною:

$$K_i(t)=\begin{bmatrix}\big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+1}(t),\psi_1(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_i}(t),\psi_1(t)\big)\\ \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+1}(t),\psi_2(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_i}(t),\psi_2(t)\big)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+1}(t),\psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_i}(t),\psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}}(t)\big)\end{bmatrix}.$$

У базисах підпросторів $E_{01}\oplus E_{01}\oplus\ldots\oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i} рівняння (2.33) набуває вигляду

$$\overline{K}_i(t)\overline{y}^{(0)}(t)+K_i(t)y_i^{(0)}(t)=0.$$

Припустимо, що виконується умова
5°. $\det\overline{K}_i(t)\neq 0,\ i=\overline{1,\alpha})\ \forall t\in[0;T]$.
Тоді

$$\overline{y}^{(0)}(t)=-\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)y_i^{(0)}(t). \tag{2.34}$$

Розглянемо тепер рівняння (2.32). Позначимо $Q_iK = \mathfrak{D}_i$, а звуження оператора $\mathfrak{D}_i$ на підпростір E_{0i} — через $\overline{\mathfrak{D}}_i$. Матриця оператора $\mathfrak{D}_i$ в підпросторі $E_{01} \oplus E_{01} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1}$ має структуру

$$D_i(t) = \begin{bmatrix} \big(K(t)\varphi_1(t), \psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+1}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}}(t), \psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+1}(t)\big) \\ \big(K(t)\varphi_1(t), \psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+2}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}}(t), \psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+2}(t)\big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \big(K(t)\varphi_1(t), \psi_{r_1+\ldots+r_i}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}}(t), \psi_{r_1+\ldots+r_i}(t)\big) \end{bmatrix}.$$

Далі, матриця оператора $\overline{\mathfrak{D}}_i$ в базисі підпростору E_{0i} подається у вигляді

$$\overline{D}_i(t) = \big\|\big(K(t)\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}(t), \psi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+l}(t)\big)\big\|_{k,l=\overline{1,r_i}}.$$

Отже, в базисах підпросторів $E_{01} \oplus E_{01} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i} рівняння (2.32) набуває вигляду

$$\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i} y_i^{(0)}(t) + \overline{D}_i(t) y_i^{(0)}(t) + D_i(t)\overline{y}^{(0)}(t) = 0.$$

Звідси, враховуючи формулу (2.34), отримуємо

$$\Big(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) + \big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i} E_{r_i}\Big) y_i^{(0)}(t) = 0. \tag{2.35}$$

Це рівняння має ненульові розв'язки, якщо

$$\det\Big(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) + \big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i} E_{r_i}\Big) = 0. \tag{2.36}$$

Використовуючи формулу Шура [4], встановлюємо, що рівняння (2.36) рівносильне такому:

$$\begin{vmatrix} \overline{K}_i(t) & K_i(t) \\ D_i(t) & \overline{D}_i(t) + \big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i} E_{r_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Останнє ж можемо подати у вигляді

$$\det\Big(\big\|\big(K(t)\varphi_l(t), \psi_k(t)\big)\big\|_1^{r_1+\ldots+r_i} + \big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i}\Lambda_{r_i}\Big) = 0,$$

де Λ_{r_i} — діагональна матриця $(r_1 + \ldots + r_i)$-го порядку, всі діагональні елементи якої дорівнюють нулю, крім r_i останніх, які дорівнюють одиниці, тобто

$$\Lambda_{r_i} = \operatorname{diag}\{0, E_{r_i}\}.$$

Накладемо ще одну умову.

6°. Припустимо, що рівняння

$$\det\Big(\big\|\big(K(t)\varphi_l(t), \psi_k(t)\big)\big\|_1^{r_1+\ldots+r_i} + \eta_i\Lambda_{r_i}\Big) = 0,$$

має r_i простих відмінних від нуля коренів $\eta_i^{(k)}(t),\ k = \overline{1, r_i}\ \forall t \in [0; T]$.

Тоді дістанемо r_i рівнянь

$$\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i} = -\eta_i^{(k)}(t), \quad k = \overline{1, r_i}.$$

З них визначимо $p_i r_i$ різних відмінних від нуля функцій $\lambda^{(1)}(t)$:

$$\lambda^{(1)}(t) = \sqrt[p_i]{\left|\eta_i^{(k)}(t)\right|}\left(\cos\frac{\arg(-\eta_i^{(k)}(t)) + 2\pi(j-1)}{p_i} + i\sin\frac{\arg(-\eta_i^{(k)}(t)) + 2\pi(j-1)}{p_i}\right), \tag{2.37}$$

$k = \overline{1, r_i},\ j = \overline{1, p_i}$, а з рівняння (2.35) знайдемо r_i відповідних векторів $y_i^{(0)}(t)$:

$$y_i^{(0)}(t) = \varphi_k^*(t), \quad k = \overline{1, r_i}, \tag{2.38}$$

де $\varphi_k^*(t)$ — власні вектор-матриці $\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)$, які відповідають власним значенням $\varphi_k^*(t),\ k = \overline{1, r_i}$. Визначивши вектори $y_i^{(0)}(t)$, за формулою (2.34) знайдемо вектори $\overline{y}^{(0)}(t)$, а потім — за формулою (2.29) вектор $y^{(0)}(t)$. З урахуванням (2.16) дістанемо вектори $u^{(0)}(t)$. Потім за формулою (2.32) визначимо вектори $y_l^{(p_i - p_l)}(t),\ l = \overline{i+1, \alpha}$:

$$y_l^{(p_i - p_l)}(t) = -\frac{1}{\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_l}}\left(Q_l K y_i^{(0)}(t) + Q_l K \overline{y}^{(0)}(t)\right), \quad l = \overline{i+1, \alpha}. \tag{2.39}$$

Таким чином, функції $\lambda^{(1)}(t)$, вектори $u^{(0)}(t)$ та $y_l^{(p_i - p_l)}(t),\ l = \overline{i+1, \alpha}$, знайдено.

Інші коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3) будемо визначати рекурентно. Зафіксуємо одну з функцій $\lambda^{(1)}(t)$ і відповідний вектор $y_i^{(0)}(t)$, які знаходяться за формулами (2.37), (2.38). Відповідне власне значення та власний вектор матриці $\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)$ позначимо через $\eta_i(t)$ і $\varphi^*(t)$. Припустимо, що функції $\lambda^{(j+1)}(t)$ і вектор-функції $u^{(j)}(t)$ при $j < r$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\lambda^{(r+1)}(t)$ та вектора $u^{(r)}(t)$ використаємо умову (2.15) при $s = p_i + r$, тобто

$$Q_l a_i^{(p_i + r)}(t) = 0, \quad l = \overline{1, \alpha}.$$

Зважаючи на (2.26), (2.27), маємо

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{p_i+r-1}\sum_{j=1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda) Q_l \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) -$$
$$-\sum_{k=0}^{p_i+r-1}\sum_{j=1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda) Q_l \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_i^{(k)}(t) -$$
$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i+r-1}\sum_{j=1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\, Q_l \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma} \times$$
$$\times \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda) \times$$
$$\times Q_l \sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m\right) g_i^{(p_i+j)}(t) + Q_l g_i^{(p_i+r)}(t) = 0, \quad l = \overline{1, \alpha}.$$

Враховуючи властивості (2.23) – (2.25) операторів проектування $Q_l,\ l = \overline{1, \alpha}$, дістаємо

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda) Q_l \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) -$$

$$
\begin{gathered}
-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)- \\
-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times \\
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)\times \\
\times\,Q_l\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m\right)g_i^{(p_i+j)}(t)+Q_lg_i^{(p_i+r)}(t)=0,\quad l=\overline{1,i-1}, \qquad (2.40)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_i\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)- \\
-P_{p_i}^{(p_i)}(\lambda)y_i^{(r)}(t)-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\,Q_i\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times \\
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\times \\
\times\,Q_i\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+ \\
+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)Q_i\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m\right)g_i^{(p_i+j)}(t)+Q_ig_i^{(p_i+r)}(t)=0, \qquad (2.41)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)- \\
-P_{p_l}^{(p_l)}(\lambda)y_l^{(p_i-p_l+r)}(t)-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times \\
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\times \\
\times\,Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)- \\
-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\times \\
\times\,Q_l\,\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)\times
\end{gathered}
$$

$$\times Q_l\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m\right) g_i^{(p_i+j)}(t) + Q_l g_i^{(p_i+r)}(t) = 0, \quad l = \overline{i+1, \alpha}. \tag{2.42}$$

Дослідимо спочатку рівняння (2.39). Враховуючи попередні викладки, можемо записати $g_i^{(p_i+r)}(t) = -K(t)y^{(r)}(t) + \widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t)$, де $\widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t)$ — вже відомий вектор. Вектор $y^{(r)}(t)$ подамо у вигляді

$$y^{(r)}(t) = \overline{y}^{(r)}(t) + y_i^{(r)}(t) + \sum_{n=i+1}^{\alpha} y_n^{(r)}(t), \tag{2.43}$$

де

$$\overline{y}^{(r)}(t) = \sum_{n=1}^{i-1} y_n^{(r)}(t).$$

В останній рівності вектори $y_n^{(r)}(t),\ n = \overline{i+1, \alpha},$ — вже відомі згідно з формулою (2.28).

Отже,

$$g_i^{(p_i+r)}(t) = -K(t)\overline{y}^{(r)}(t) - K(t)y_i^{(r)}(t) - \sum_{n=i+1}^{\alpha} K(t)y_n^{(r)}(t) + \widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t).$$

Підставивши цей вираз у (2.39), дістанемо

$$Q_l K\overline{y}^{(r)}(t) + Q_l K y_i^{(r)}(t) = Q_l Y^{(r)}(t), \quad l = \overline{1, i-1},$$

де

$$Y^{(r)}(t) = -\sum_{n=1}^{i}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)y_n^{(k)}(t) -$$
$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times$$
$$\times\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)y_n^{(k)}(t) - \sum_{n=i+1}^{\alpha} K(t)y_n^{(r)}(t) +$$
$$+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m\right) g_i^{(p_i+j)}(t) + \widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t).$$

Ці рівняння еквівалентні одному рівнянню

$$\sum_{l=1}^{i-1} Q_l K\overline{y}^{(r)}(t) + \sum_{l=1}^{i-1} Q_l K y_i^{(r)}(t) = \sum_{l=1}^{i-1} Q_l Y^{(r)}(t).$$

Використавши введені вище позначення, запишемо його у вигляді

$$\overline{\mathfrak{K}}_i\overline{y}^{(r)}(t) + \mathfrak{K}_i y_i^{(r)}(t) = \sum_{l=1}^{i-1} Q_l Y^{(r)}(t).$$

Перейшовши в базиси підпросторів $E_{01} \oplus E_{02} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i}, з нього отримаємо

$$\overline{y}^{(r)}(t) = -\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)y_i^{(r)}(t) + \overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t), \tag{2.44}$$

де

$$\widetilde{Y}^{(r)}(t) = \sum_{l=1}^{i-1} Q_l Y^{(r)}(t).$$

Розглянемо тепер рівняння (2.40). Враховуючи пророблені вище викладки, запишемо його у вигляді

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} y_i^{(r)}(t) + \overline{D}_i y_i^{(r)}(t) + D_i \overline{y}^{(r)}(t) = -P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda) y_i^{(0)}(t) + Q_i Z^{(r)}(t),$$

де

$$\begin{aligned} Z^{(r)}(t) = &- \sum_{j=p_i+1}^{p_i+r} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r)}(\lambda) \frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\, \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_i^{(0)}(t) - \\ &- \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=p_i}^{p_i+r-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda) \frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma} \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_i^{(k)}(t) - \\ &- \sum_{n=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda) \frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\, \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) - \\ &- \sum_{n=i+1}^{\alpha} \sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1} \sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda) \frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma} \times \\ &\times \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda) \sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m\right) g_i^{(p_i+j)}(t) - \sum_{n=i+1}^{\alpha} K(t) y_n^{(r)}(t) + \widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t) \end{aligned}$$

— вже відомий вектор.

У базисах підпросторів $E_{01} \oplus E_{02} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i}, це рівняння набуває вигляду

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} y_i^{(r)}(t) + \overline{D}_i(t) y_i^{(r)}(t) + D_i(t) \overline{y}^{(r)}(t) = -P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda) y_i^{(0)}(t) + \widetilde{Z}^{(r)}(t),$$

де $\widetilde{Z}^{(r)}(t) = Q_i Z^{(r)}(t)$.

Врахувавши (2.44) і взявши до уваги, що $-\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} = \eta_i(t)$, а $y_i^{(0)}(t) = \varphi^*(t)$, звідси дістанемо

$$\begin{aligned} &\left(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) - \eta_i(t)E_{r_i}\right) y_i^{(r)}(t) = \\ &\quad = -P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)\varphi^*(t) + \widetilde{Z}^{(r)}(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Це рівняння розв'язне відносно вектора $y_i^{(r)}(t)$ тоді і тільки тоді, коли його права частина буде ортогональна до вектора $\psi^*(t)$: $-P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)\,(\varphi^*(t),\psi^*(t)) + \left(\widetilde{Z}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) - \left(D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) = 0$, де $\psi^*(t)$ — елемент нуль-простору матриці

$$\left(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) - \eta_i(t)E_{r_i}\right)^*.$$

Оскільки згідно з умовою 6° власне значення $\eta_i(t)$ матриці $\overline{D}_i(t)-D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)$ просте, йому відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1. Тому вектор $\psi^*(t)$ виберемо так, щоб виконувалася рівність $(\varphi^*(t),\psi^*(t)) = 1,\ t\in[0;T]$. Враховуючи її, в результаті отримаємо $P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda) = \left(\widetilde{Z}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) - \left(D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right)$, де $\widetilde{P}_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)$ — та частина виразу $P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)$, яка містить лише ті $\lambda^{(i)}(t)$, індекси яких $i\le r$. Оскільки $P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda) = p_i\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i-1}\lambda^{(r+1)}(t) + \widetilde{P}_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)$, з останнього рівняння знайдемо невідому функцію $\lambda^{(r+1)}(t)$:

$$\lambda^{(r+1)}(t) = \frac{\left(\widetilde{Z}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) - \left(D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) - \widetilde{P}_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)}{p_i\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_i-1}}. \tag{2.46}$$

При знайденій функції $\lambda^{(r+1)}(t)$ рівняння (2.44) буде розв'язним і з нього знайдемо

$$y_i^{(r)}(t) = \left[\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) - \eta_i(t)E_{r_i}\right]^+ \widetilde{f}_i^{(r)}(t), \tag{2.47}$$

де $\widetilde{f}_i^{(r)}(t)$ — права частина рівняння (2.44). Потім за формулою (2.43) знайдемо вектор $\overline{y}^{(r)}(t)$, а за формулою (2.42) — $y^{(r)}(t)$. Визначивши вектор $y^{(r)}(t)$, за формулою (2.17) знайдемо вектор $u^{(r)}(t)$. Потім із системи рівнянь (2.41) знайдемо вектори $y_l^{(p_i-p_l+r)}(t)$, $l=\overline{i+1,\alpha}$:

$$\begin{aligned} y_l^{(p_i-p_l+r)}(t) = -\frac{1}{\big(\lambda^{(1)}(t)\big)^{p_l}}\Bigg(&\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times\\ &\times\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-\\ &+\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times\\ &\times\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+\\ &+\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\times\\ &\times\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t) - \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)\times\\ &\times Q_l\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m\right)g_i^{(p_i+j)}(t) - Q_l g_i^{(p_i+r)}(t)\Bigg),\quad l=\overline{i+1,\alpha}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Отже, ітераційний процес проходить. Згідно з формулою (2.37) подібним чином можна побудувати $r_i p_i$ формальних розв'язків системи (1.1), які відповідають r_i скінченним елементарним дільникам кратності p_i в'язки матриць $P(t,\lambda)$. Змінюючи i від 1 до α, ми побудуємо $r_1p_1 + r_2p_2 + \ldots + r_\alpha p_\alpha$ формальних розв'язків системи (1.1).

Перейдемо тепер до побудови формальних розв'язків, які відповідають нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць $P(t,\lambda)$. Ці розв'язки шукатимемо у вигляді

$$x(t,\nu) = v(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\nu)}\right), \tag{2.49}$$

де n-вимірний вектор $v(t,\nu)$ і скалярна функція $\xi(t,\nu)$ подаються у вигляді формальних розвинень

$$v(t,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v^{(k)}(t), \tag{2.50}$$

$$\xi(t,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi^{(k)}(t) \tag{2.51}$$

за степенями $\nu = \sqrt[q_i]{\varepsilon}$, $i = \overline{1,\beta}$.

Коефіцієнти розвинень (2.49) і (2.50) визначатимемо таким чином, щоб вектор (2.48) формально задовольняв систему (1.1). Провівши міркування, аналогічні тим, які використовувались у випадку скінченних елементарних дільників, встановимо, що коефіцієнти розвинень (2.49), (2.50) мають задовольняти нескінченну систему рівнянь

$$A_m^{(0)}(t)v^{(0)}(t) = 0, \tag{2.52}$$

$$A_m^{(0)}(t)v^{(s)}(t) = b_i^{(s)}(t), \quad i = \overline{1,\beta}, \quad s = 1,2,\ldots, \tag{2.53}$$

де

$$b_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{s-m+k} D_0^{(j)}\left[\xi^{m-k}\right] A_k^{(0)}(t) v^{(s-j-m+k)}(t) + \\ + h_i^{(s)}(t), \quad i = \overline{1,\beta}, \quad s = 1,2,\ldots, \tag{2.54}$$

$$h_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{s-q_i-m+k}\sum_{\gamma=1}^{\left[\frac{s-j-m+k}{q_i}\right]} D_0^{(j)}\left[\xi^{m-k}\right] A_k^{(\gamma)}(t) v^{(s-j-\gamma q_i+k-m)}(t) - \\ -\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\gamma=0}^{s-\theta(k;j)}\sum_{l=0}^{s-\gamma-\theta(k;j)}\sum_{\delta=0}^{\left[\frac{s-\gamma-l-\theta(k;j)}{q_i}\right]} D_0^{(\gamma)}\left[\xi^m\right] D_{k-j}^{(l)}\left[\frac{1}{\xi^j}\right] \times \\ \times A_k^{(\delta)}(t) v^{(s-\gamma-l+\delta q_i-\theta(k;j))}(t) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\gamma=0}^{j}\sum_{l=0}^{s-\theta(k;\gamma)}\sum_{r=0}^{s-l-\theta(k;\gamma)}\sum_{\delta=0}^{\left[\frac{s-l-r-\theta(k;\gamma)}{q_i}\right]} C_k^j \times$$

$$\times D_0^{(l)}[\xi^m] D_{j-\gamma}^{(r)} \left[\frac{1}{\xi^\gamma}\right] A_k^{(\delta)}(t) \frac{d^{k-j} v^{(s-l-r-\delta q_i-\theta(k;\gamma))}(t)}{dt^{k-j}},$$

$$\theta(k;j) = q_i(k-j)h + m - j, \quad i = \overline{1,\beta}, \quad s = q_i, q_i+1, \ldots .$$

Покажемо, що з цієї системи можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.49), (2.50).

Векторні рівняння (2.52) сумісні тоді і тільки тоді, коли виконуються умова

$$\left(b_i^{(s)}(t), \widetilde{\psi}_j(t)\right) = 0, \qquad j = \overline{1, s_\gamma}, \quad \gamma = \overline{1,\beta}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.55}$$

де $\widetilde{\psi}_j(t),\ j = \overline{1, s_\gamma},\ \gamma = \overline{1,\beta},$ — базисні елементи нуль-простору матриці $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$. Позначимо через $\widetilde{E}_0$ лінійну оболонку власних векторів $\widetilde{\varphi}_i(t),\ i = \overline{1,s},\ s = s_1 + s_2 + \ldots + s_\beta,$ матриці $A_m^{(0)}(t)$, що відповідають її нульовому власному значенню, а через $\widetilde{E}_{0j},\ j = \overline{1,\beta},$ — лінійну оболонку векторів $\widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t),\ i = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1,\beta}.$ Підпростір $\widetilde{E}_0$ є прямою сумою підпросторів $\widetilde{E}_{0j},\ j = \overline{1,\beta}$:

$$\widetilde{E}_0 = \widetilde{E}_{01} \oplus \widetilde{E}_{02} \oplus \ldots \widetilde{E}_{0\beta}.$$

Введемо до розгляду оператори проектування $\widetilde{Q}_j,\ j = \overline{1,\beta}$, які відображають n-вимірний простір E на s_j-вимірний підпростір $\widetilde{E}_{0j}$ таким чином:

$$\widetilde{Q}_j v(t) = \sum_{i=1}^{s_j} \left(v(t), \widetilde{\psi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t)\right) \widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t), \tag{2.56}$$

$j = \overline{1,\beta},\ v(t) \in E,\ t \in [0;T].$ Тоді умова (2.54) еквівалентна такій:

$$\widetilde{Q}_j b_i^{(s)}(t) = 0, \qquad i, j = \overline{1,\beta}, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{2.57}$$

При виконанні цієї умови вектори $v^{(s)}(t),\ s = 0, 1, \ldots,$ знаходитимемо за формулами

$$v^{(0)}(t) = z^{(0)}(t), \tag{2.58}$$

$$v^{(s)}(t) = G(t) b_i^{(s)}(t) + z^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.59}$$

де $z^{(s)}(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — вектори з підпростору $\widetilde{E}_0$, які потрібно визначити так, щоб виконувалась умова сумісності (2.56).

Для визначення функцій $\xi^{(j)}(t)$ і векторів $v^{(j)}(t),\ j = 0, 1, \ldots,$ використаємо умову (2.56). Використовуючи результати з [4], вектори $b_i^{(s)}(t)$ можемо подати у вигляді

$$b_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} D_0^{(s-k-j)} \left[\xi^j\right] \frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma! \partial \xi^\gamma} \sigma^{j-\gamma+1} (G_1, G_2, \ldots, G_m) z^{(k)}(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-q_i-1} \sum_{\gamma=1}^{s-q_i-j} D_0^{(s-q_i-j-\gamma)} \left[\xi^\gamma\right] \sigma^{\gamma+1} \left(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m\right) h_i^{(q_i+j)}(t) +$$
$$+ h_i^{(s)}(t), \qquad i = \overline{1,\beta}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.60}$$

де

$$M(t,\xi) = \sum_{i=0}^{m} \xi^i A_{m-i}^{(0)}(t).$$

Оскільки згідно з умовою 4° в'язка матриць (1.3) має $s_i > 1$ нескінченних елементарних дільників кратності $q_i > 1,\ i = \overline{1,\beta}$, згідно з результатами з [1] їм відповідає s_i жорданових ланцюжків завдовжки $q_i,\ i = \overline{1,\beta}$, кожний. Ці ланцюжки складаються з власних векторів $\widetilde{\varphi}^{(1)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t),\ i = \overline{1,s_j},\ j = \overline{1,\beta}$, та відповідних приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}^{(k)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t),\ i = \overline{1,s_j},\ k = \overline{2,q_j},\ j = \overline{1,\beta}$, які задовольняють співвідношення

$$M(t,0)\,\widetilde{\varphi}^{(1)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t) = 0, \qquad i = \overline{1,s_j}, \quad j = \overline{1,\beta}, \tag{2.61}$$

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}^{(k)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t) + \sum_{\gamma=1}^{\min(k-1,m)} \frac{\partial^\gamma M\,(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times$$

$$\times\,\widetilde{\varphi}^{(k-\gamma)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t) = 0, \qquad i = \overline{1,s_j}, \quad k = \overline{2,q_j}, \quad j = \overline{1,\beta}, \tag{2.62}$$

а рівняння

$$M(t,0)z_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i} + \sum_{\gamma=1}^{\min(q_j,m)} \frac{\partial^\gamma M\,(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times$$

$$\times\,\widetilde{\varphi}^{(q_j+1-\gamma)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t) = 0, \qquad i = \overline{1,s_j}, \quad j = \overline{1,\beta}, \tag{2.63}$$

нерозв'язні відносно векторів $z_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i},\ i = \overline{1,s_j},\ j = \overline{1,\beta}$.

Приєднані вектори цих ланцюжків виражаються через власні вектори за формулами

$$\widetilde{\varphi}^{(1)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t) = \widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t), \quad i = \overline{1,s_j}, \quad j = \overline{1,\beta},$$

$$\widetilde{\varphi}^{(k)}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t) = \sigma^k\left(G_1, G_2, \ldots, G_m\right)\widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{j-1}+i}(t),\ \ i = \overline{1,s_j},\ \ k = \overline{2,q_j},\ \ j = \overline{1,\beta}.$$

Жорданів набір власних і приєднаних векторів, які відповідають нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць (1.3), також є повним, тобто

$$\det\left\|\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(q_k;m)} \frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{q_k+1-\gamma}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{k-1}+i}(t),\right.\right.$$

$$\left.\left.\widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{k-1}+j}(t)\right)\right\|_{i,j=\overline{1,s_k},\ k=\overline{1,\beta}} \neq 0 \quad \forall t\in[0;T].$$

Тому вектори $\widetilde{\psi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}+j}(t),\ j = \overline{1,s_k},\ k = \overline{1,\beta}$, можемо визначити так, щоб виконувалися співвідношення

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(q_k;m)} \frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{q_k+1-\gamma}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}+i}(t),\widetilde{\psi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}+j}(t)\right) =$$

$$= \delta_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}+i,s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}+j}, \qquad i,j=\overline{1,s_k}, \quad k=\overline{1,\beta}.$$

Це ми передбачатимемо в подальших викладках.

Виходячи з (2.60) – (2.63), встановимо наступні властивості операторів проектування $\widetilde{Q}_j,\ j=\overline{1,\beta}$: якщо $z_k^{(1)}(t)\in\widetilde{E}_{0k},\ k=\overline{1,\beta}$, то

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} \widetilde{Q}_l \frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_k^{(1)}(t)=0, \qquad j=\overline{1,q_k-1}, \quad k,l=\overline{1,\beta}, \tag{2.64}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(q_k,m)} \widetilde{Q}_k \frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{q_k-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_k^{(1)}(t)=z_k^{(1)}(t), \quad k=\overline{1,\beta}, \tag{2.65}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(q_k,m)} \widetilde{Q}_l \frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{q_k-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_k^{(1)}(t)=0, \qquad k\neq l, \quad k,l=\overline{1,\beta}. \tag{2.66}$$

Нехай $z^{(k)}(t)$ — довільний вектор з підпростору $\widetilde{E}_0$. Оскільки $\widetilde{E}_0=\widetilde{E}_{01}\oplus\widetilde{E}_{02}\oplus\ldots\widetilde{E}_{0\beta}$, його можна подати у вигляді

$$z^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\beta} z_n^{(k)}(t), \tag{2.67}$$

де $z_n^{(k)}(t)\in\widetilde{E}_{0n},\ n=\overline{1,\beta}$.

Використавши формулу (2.67), вектори (2.59) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} b_i^{(s)}(t) = &-\sum_{n=1}^{\beta}\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} D_0^{(s-k-j)}\left[\xi^j\right]\,\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)+\\ &+\sum_{j=0}^{s-q_i-1}\sum_{\gamma=1}^{s-q_i-j} D_0^{(s-q_i-j-\gamma)}\left[\xi^\gamma\right]\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m\right)h_i^{(q_i+j)}(t)+\\ &+h_i^{(s)}(t), \qquad i=\overline{1,\beta}, \quad s=1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Зафіксуємо $i,\ i=\overline{1,\beta}$. Знайдемо розв'язки, які відповідають s_i нескінченним елементарним дільникам кратності q_i. Для цього спочатку використаємо умову (2.56) для векторів (2.68). Враховуючи властивість (2.64) операторів проектування $\widetilde{Q}_j,\ j=\overline{1,\beta}$, легко переконатися, що при $s=\overline{1,q_\beta-1}$, вона виконується. Провівши міркування, аналогічні викладеним вище при побудові розв'язків першої групи, при $s=\overline{q_\beta,q_i-1}$ встановимо, що

$$z_n^{(k)}(t)=0, \qquad k=\overline{0,q_i-q_n-1}, \quad n=\overline{i+1,\beta}. \tag{2.69}$$

Розглянемо тепер умову (2.56) при $s=q_i$:

$$\widetilde{Q}_l b_i^{(q_i)}(t)=0, \quad l=\overline{1,\beta}.$$

Підставимо в цю рівність вираз (2.68) і, врахувавши (2.69), дістанемо

$$\widetilde{Q}_l h_i^{(q_i)}(t) - \sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{q_i-1}\sum_{j=1}^{q_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)-$$
$$-\sum_{k=0}^{q_i-1}\sum_{j=1}^{q_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_i^{(k)}(t)-$$
$$-\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-1}\sum_{j=1}^{q_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times$$
$$\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)=0,\quad l=\overline{1,\beta}.$$

Звідси, взявши до уваги (2.64) – (2.66), отримаємо

$$\widetilde{Q}_\gamma h_i^{(q_i)}(t)=0,\quad \gamma=\overline{1,i-1},\tag{2.70}$$
$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i}z_i^{(0)}(t)-\widetilde{Q}_i h_i^{(q_i)}(t)=0,\tag{2.71}$$
$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_\gamma}z_\gamma^{(q_i-q_\gamma)}(t)-\widetilde{Q}_\gamma h_i^{(q_i)}(t)=0,\quad \gamma=\overline{i+1,\beta}.\tag{2.72}$$

Подамо вектори $z^{(k)}(t),\ k=0,1,\ldots,$ у вигляді

$$z^{(0)}(t)=\overline{z}^{(k)}(t)+z_i^{(0)}(t),\tag{2.73}$$

де

$$\overline{z}^{(0)}(t)=\sum_{n=1}^{i-1}z_n^{(0)}(t).$$

Але $h_i^{(q_i)}(t)=-A_m^{(1)}(t)z^{(0)}(t)$, тому згідно з (2.74) $h_i^{(q_i)}(t)=-A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(0)}(t)-A_m^{(1)}(t)z_i^{(0)}(t)$. Тоді рівняння (2.70) – (2.72) запишуться у вигляді

$$\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(0)}(t)+\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)z_i^{(0)}(t)=0,\quad \gamma=\overline{1,i-1},\tag{2.74}$$
$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i}z_i^{(0)}(t)+\widetilde{Q}_i A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(0)}(t)+\widetilde{Q}_i A_m^{(1)}(t)z_i^{(0)}(t)=0,\tag{2.75}$$
$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_\gamma}z_\gamma^{(q_i-q_\gamma)}(t)+\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(0)}(t)+\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)z_i^{(0)}(t)=0,\quad \gamma=\overline{i+1,\beta}.\tag{2.76}$$

Рівняння (2.74) еквівалентні рівнянню

$$\sum_{\gamma=1}^{i-1}\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(0)}(t)+\sum_{\gamma=1}^{i-1}\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)z_i^{(0)}(t)=0.\tag{2.77}$$

Позначимо

$$\sum_{\gamma=1}^{i-1}\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)=\mathfrak{L}_i,$$

а через $\overline{\mathfrak{L}}_i$ позначимо звуження оператора $\mathfrak{L}_i$ на підпростір $\widetilde{E}_{01} \oplus \widetilde{E}_{01} \oplus \ldots \widetilde{E}_{0,i-1}$. Тоді в базисах підпросторів $\widetilde{E}_{01} \oplus \widetilde{E}_{01} \oplus \ldots \widetilde{E}_{0,i-1}$ та $\widetilde{E}_{0i}$ рівняння (2.77) наведемо у вигляді

$$\overline{L}_i(t)\overline{z}^{(0)}(t) + L_i(t)z_i^{(0)}(t) = 0, \tag{2.78}$$

де $\overline{L}_i(t)$ — матриця оператора $\overline{\mathfrak{L}}_i$ в базисі $\widetilde{\varphi}_j(t),\ j = \overline{1, s_1 + s_2 + \ldots + s_{i-1}}$, підпростору $\widetilde{E}_{01} \oplus \widetilde{E}_{02} \oplus \ldots \widetilde{E}_{0,i-1}$, а $L_i(t)$ — матриця оператора $\mathfrak{L}_i$ в базисі $\widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\ldots+s_{i-1}+j}(t),\ j = \overline{1, s_i}$, підпростору $\widetilde{E}_{0i}$. Матриці $\overline{L}_i(t)$ та $L_i(t)$ у відповідних базисах мають структуру

$$\overline{L}_i(t) = \begin{bmatrix} \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\psi}_1(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t), \widetilde{\psi}_1(t)\Big) \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\psi}_2(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t), \widetilde{\psi}_2(t)\Big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t)\Big) \end{bmatrix},$$

$$L_i(t) = \begin{bmatrix} \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t), \widetilde{\psi}_1(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_i}(t), \widetilde{\psi}_1(t)\Big) \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t), \widetilde{\psi}_2(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_i}(t), \widetilde{\psi}_2(t)\Big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_i}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t)\Big) \end{bmatrix}.$$

Припустимо далі, що виконується умова

$7^\circ.\ \det \overline{L}_i(t) \neq 0,\ i = \overline{1, \beta})\ \forall t \in [0; T]$.

Тоді з рівняння (2.78) отримаємо

$$\overline{z}^{(0)}(t) = -\overline{L}_i^{-1}(t)L_i(t)z_i^{(0)}(t). \tag{2.79}$$

Розглянемо тепер рівняння (2.75). Позначимо $\widetilde{Q}_i A_m^{(1)}(t) = \mathfrak{N}_i$, а звуження оператора $\mathfrak{N}_i$ на підпростір $\widetilde{E}_{0i}$ — через $\overline{\mathfrak{N}}_i$. Матриця оператора $\mathfrak{N}_i$ в підпросторі $\widetilde{E}_{01} \oplus \widetilde{E}_{02} \oplus \ldots \widetilde{E}_{0,i-1}$ є прямокутною:

$$N_i(t) = \begin{bmatrix} \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t)\Big) \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+2}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+2}(t)\Big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_1(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_i}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_i}(t)\Big) \end{bmatrix}.$$

Матриця ж оператора $\overline{\mathfrak{N}}_i$ в базисі підпростору $\widetilde{E}_{0i}$ — квадратна s_i-го порядку:

$$\overline{N}_i(t) = \begin{bmatrix} \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_i}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t)\Big) \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+2}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_i}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+2}(t)\Big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_{i-1}+1}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_i}(t)\Big) & \ldots & \Big(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_{s_1+\ldots+s_i}(t), \widetilde{\psi}_{s_1+\ldots+s_i}(t)\Big) \end{bmatrix}.$$

Враховуючи формулу (2.79), рівняння (2.75) у базисах цих підпросторів записуємо у вигляді

$$\left(\overline{N}_i(t) - N_i(t)\overline{L}_i^{-1}(t)L_i(t) + \left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} E_{s_i}\right) z_i^{(0)}(t) = 0. \tag{2.80}$$

Воно матиме ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\det\left(\overline{N}_i(t) - N_i(t)\overline{L}_i^{-1}(t)L_i(t) + \left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} E_{s_i}\right) = 0$$

або, згідно з формулами Шура [4],

$$\begin{vmatrix} \overline{L}_i(t) & L_i(t) \\ N_i(t) & \overline{N}_i(t) + \left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} E_{s_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Останню ж рівність можна подати у вигляді

$$\det\left(\left\|\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_l(t), \widetilde{\psi}_k(t)\right)\right\|_1^{s_1+\ldots+s_i} + \left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i}\Lambda_{s_i}\right) = 0,$$

де Λ_{s_i} — діагональна матриця $(s_1 + \ldots + s_i)$-го порядку, всі діагональні елементи якої дорівнюють нулю, крім s_i останніх, які дорівнюють одиниці, тобто $\Lambda_{s_i} = \operatorname{diag}\{0, E_{s_i}\}$.

Накладемо умову

8°. Рівняння

$$\det{!}\left(\left\|\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_l(t), \widetilde{\psi}_k(t)\right)\right\|_1^{s_1+\ldots+s_i} - \theta_i\Lambda_{s_i}\right) = 0$$

має s_i простих відмінних від нуля коренів $\theta_i^{(k)}(t),\ k = \overline{1, s_i}\ \ \forall t \in [0; T]$.

Тоді

$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} = -\theta_i^{(k)}(t), \quad k = \overline{1, s_i},$$

звідки визначимо $q_i s_i$ різних відмінних від нуля функцій $\xi^{(0)}(t)$:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt[q_i]{\left|\theta_i^{(k)}(t)\right|}\left(\cos\frac{\arg(-\theta_i^{(k)}(t)) + 2\pi(j-1)}{q_i} + \right.$$
$$\left. + i\sin\frac{\arg(-\theta_i^{(k)}(t)) + 2\pi(j-1)}{q_i}\right), \qquad k = \overline{1, s_i}, \quad j = \overline{1, q_i}. \tag{2.81}$$

Далі, з рівняння (2.80) знайдемо s_i відповідних векторів $z_i^{(0)}(t)$:

$$z_i^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}_k^*(t), \quad k = \overline{1, s_i}, \tag{2.82}$$

де $\widetilde{\varphi}_k^*(t)$ — власні вектори матриці $\overline{N}_i(t) - N_i(t)\overline{L}_i^{-1}(t)L_i(t)$, які відповідають власним значенням $\theta_i^{(k)}(t),\ k = \overline{1, s_i}$. Визначивши вектори $z_i^{(0)}(t)$, за формулою (2.79) знайдемо $\overline{z}^{(0)}(t)$, а за формулою (2.73) — $z^{(0)}(t)$. Подавши його у відповідному базисі, згідно з

(2.57) визначимо й вектор $v^{(0)}(t)$. Потім із рівнянь (2.76) одержимо вектори $z_\gamma^{(q_i-q_\gamma)}(t)$, $\gamma=\overline{i+1,\beta}$:

$$z_\gamma^{(q_i-q_\gamma)}(t)=-\frac{1}{\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_\gamma}}\left(\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(0)}(t)+\widetilde{Q}_\gamma A_m^{(1)}(t)z_i^{(0)}(t)\right),\quad \gamma=\overline{i+1,\beta}. \tag{2.83}$$

Інші коефіцієнти розвинень (2.49), (2.50) визначаються рекурентним чином. Зафіксуємо одну з функцій $\xi^{(0)}(t)$ і відповідний вектор $z^{(0)}(t)$, які визначаються за формулами (2.81), (2.82). Відповідне власне значення і власний вектор матриці $\overline{N}_i(t)-N_i(t)\overline{L}_i^{-1}(t)L_i(t)$ позначимо через $\theta_i(t)$ і $\widetilde{\varphi}^*(t)$. Припустимо, що функції $\xi^{(j)}(t)$ і вектори $v^{(j)}(t)$ при $j<r$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\xi^{(r)}(t)$ і вектора $v^{(r)}(t)$ використаємо умову (2.56) при $s=q_i+r$:

$$\widetilde{Q}_\gamma b_i^{(q_i+r)}(t)=0,\quad \gamma=\overline{1,\beta}.$$

Скориставшись властивостями (2.64) – (2.66) операторів проектування $\widetilde{Q}_\gamma$, $\gamma=\overline{1,\beta}$, цю умову подамо у вигляді

$$\begin{aligned}&-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)-\\
&-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_i^{(k)}(t)-\\
&-\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times\\
&\times\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}D_0^{(r-j-\gamma)}\left[\xi^\gamma\right]\widetilde{Q}_l\sigma^{\gamma+1}\times\\
&\times\left(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m\right)h_i^{(q_i+j)}(t)+\widetilde{Q}_lh_i^{(q_i+r)}(t)=0,\quad l=\overline{1,i-1},\end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}&-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)-\\
&-D_0^{(0)}\left[\xi^{q_i}\right]z_i^{(r)}(t)-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times\\
&\times\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_i^{(k)}(t)-\\
&-\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times\\
&\times\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)+\\
&+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}D_0^{(r-j-\gamma)}\left[\xi^\gamma\right]\widetilde{Q}_i\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m\right)h_i^{(q_i+j)}(t)+\widetilde{Q}_ih_i^{(q_i+r)}(t)=0,\end{aligned} \tag{2.85}$$

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)-$$
$$-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times$$
$$\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_i^{(k)}(t)-D_0^{(0)}\left[\xi^{q_l}\right]z^{(q_i-q_l+r)}(t)-$$
$$-\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1}\sum_{j=q_i}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times$$
$$\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}D_0^{(r-j-\gamma)}\left[\xi^\gamma\right]\widetilde{Q}_l\sigma^{\gamma+1}\times$$
$$\times\left(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m\right)h_i^{(q_i+j)}(t)+\widetilde{Q}_l h_i^{(q_i+r)}(t)=0,\quad l=\overline{i+1,\beta}. \tag{2.86}$$

Розглянемо спочатку рівняння (2.84). Вектор $h_i^{(q_i+r)}(t)$, який міститься в ньому, подамо у вигляді $h_i^{(q_i+r)}(t)=-A_m^{(1)}(t)z^{(r)}(t)+\widetilde{h}_i^{(q_i+r)}(t)$, де $\widetilde{h}_i^{(q_i+r)}(t)$ — вже відомий вираз згідно з припущенням індукції. Водночас, враховуючи позначення

$$\overline{z}^{(r)}(t)=\sum_{n=1}^{i-1}z_n^{(r)}(t),$$

записуємо

$$z^{(r)}(t)=\overline{z}^{(r)}(t)+z_i^{(r)}(t)+\sum_{n=i+1}^{\beta}z_n^{(r)}(t),$$

де $z_n^{(r)}(t),\ n=\overline{i+1,\beta},$ — вже відомі вектори згідно з припущенням індукції. Тоді

$$h_i^{(q_i+r)}(t)=-A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(r)}(t)-A_m^{(1)}(t)z_i^{(r)}(t)-\sum_{n=i+1}^{\beta}A_m^{(1)}(t)z_n^{(r)}(t)+\widetilde{h}_i^{(q_i+r)}(t)$$

і рівняння (2.84) перепишемо у вигляді

$$\widetilde{Q}_lA_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(r)}(t)+\widetilde{Q}_lA_m^{(1)}(t)z_i^{(r)}(t)=\widetilde{Q}_lR^{(r)}(t),\quad l=\overline{1,i-1}, \tag{2.87}$$

де

$$R^{(r)}(t)=-\sum_{n=i+1}^{\beta}A_m^{(1)}(t)z_n^{(r)}(t)+\widetilde{h}_i^{(q_i+r)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}D_0^{(r-j-\gamma)}\left[\xi^\gamma\right]\times$$
$$\times\,\sigma^{\gamma+1}\left(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m\right)h_i^{(q_i+j)}(t)-$$
$$-\sum_{n=1}^{i}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)-$$

$$
-\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times
$$
$$
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t).
$$

Рівняння (2.87) еквівалентні одному рівнянню

$$
\sum_{l=1}^{i-1}\widetilde{Q}_l A_m^{(1)}(t)\overline{z}^{(r)}(t)+\sum_{l=1}^{i-1}\widetilde{Q}_l A_m^{(1)}(t)z_i^{(r)}(t)=\sum_{l=1}^{i-1}\widetilde{Q}_l R^{(r)}(t).
$$

Враховуючи введені вище позначення, це рівняння зобразимо у вигляді

$$
\overline{\mathfrak{L}}_i\overline{z}^{(r)}(t)+\mathfrak{L}_i z_i^{(r)}(t)=\sum_{l=1}^{i-1}\widetilde{Q}_l R^{(r)}(t).
$$

Перейшовши в базиси підпросторів $\widetilde{E}_{01}\oplus\widetilde{E}_{02}\oplus\ldots\widetilde{E}_{0,i-1}$ та $\widetilde{E}_{0i}$, матимемо

$$
\overline{L}_i(t)\overline{z}^{(r)}(t)+L_i(t)z_i^{(r)}(t)=\widetilde{R}^{(r)}(t),
$$

де

$$
\widetilde{R}^{(r)}(t)=\sum_{l=1}^{i-1}\widetilde{Q}_l R^{(r)}(t),
$$

звідки завдяки умові 7° отримаємо

$$
\overline{z}^{(r)}(t)=-\overline{L}_i^{-1}(t)L_i(t)z_i^{(r)}(t)+\overline{L}_i^{-1}(t)\widetilde{R}^{(r)}(t). \tag{2.88}
$$

Розглянемо тепер рівняння (2.85). Враховуючи попередні викладки, записуємо його у вигляді

$$
-D_0^{(0)}\left[\xi^{q_i}\right]z_i^{(r)}(t)-\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times
$$
$$
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_i^{(0)}(t)-
$$
$$
-D_0^{(r)}[\xi^{q_i}]z_i^{(0)}(t)-\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{j=q_i}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\,\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times
$$
$$
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_i^{(k)}(t)+
$$
$$
+\,\widetilde{Q}_i\widetilde{h}_i^{(q_i+r)}(t)-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times
$$
$$
\times\,\sigma^{j-\gamma+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z_n^{(k)}(t)-
$$
$$
-\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\left[\xi^j\right]\widetilde{Q}_i\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times
$$

$$\times\, \sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m) z_n^{(k)}(t) - \sum_{n=i+1}^{\beta} \widetilde{Q}_i A_m^{(1)}(t) z_n^{(r)}(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{\gamma=1}^{r-j} D_0^{(r-j-\gamma)} \left[\xi^{\gamma}\right] \widetilde{Q}_i \sigma^{\gamma+1} \left(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m\right) h_i^{(q_i+j)}(t) -$$

$$- \widetilde{Q}_i A_m^{(1)}(t) \overline{z}^{(r)}(t) - \widetilde{Q}_i A_m^{(1)}(t) z_i^{(r)}(t) = 0$$

або

$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} z_i^{(r)}(t) + \overline{N}_i z_i^{(r)}(t) + N_i \overline{z}^{(r)}(t) = -D_0^{(r)} \left[\xi^{q_i}\right] z_i^{(0)}(t) + \widetilde{Q}_i S^{(r)}(t),$$

де

$$S^{(r)}(t) = - \sum_{j=q_i+1}^{q_i+r} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)} \left[\xi^j\right] \frac{\partial^{\gamma} M(t,0)}{\gamma! \partial \xi^{\gamma}} \sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m) z_i^{(0)}(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=q_i}^{q_i+r-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)} \left[\xi^j\right] \frac{\partial^{\gamma} M(t,0)}{\gamma! \partial \xi^{\gamma}} \sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m) z_i^{(k)}(t) -$$

$$- \sum_{n=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)} \left[\xi^j\right] \frac{\partial^{\gamma} M(t,0)}{\gamma! \partial \xi^{\gamma}} \sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m) z_n^{(k)}(t) -$$

$$- \sum_{n=i+1}^{\beta} \sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1} \sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)} \left[\xi^j\right] \frac{\partial^{\gamma} M(t,0)}{\gamma! \partial \xi^{\gamma}} \times$$

$$\times\, \sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m) z_n^{(k)}(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{\gamma=1}^{r-j} D_0^{(r-j-\gamma)} \left[\xi^{\gamma}\right] \sigma^{\gamma+1} \left(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m\right) h_i^{(q_i+j)}(t) -$$

$$+ \sum_{n=i+1}^{\beta} A_m^{(1)}(t) z_n^{(r)}(t) + \widetilde{h}_i^{(q_i+r)}(t)$$

— вже відомий вектор. Перейшовши в базиси підпросторів $\widetilde{E}_{01} \oplus \widetilde{E}_{02} \oplus \ldots \widetilde{E}_{0,i-1}$ та $\widetilde{E}_{0i}$, матимемо

$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} z_i^{(r)}(t) + \overline{N}_i(t) z_i^{(r)}(t) + N_i(t) \overline{z}^{(r)}(t) = -D_0^{(r)} \left[\xi^{q_i}\right] z_i^{(0)}(t) + \widetilde{S}^{(r)}(t),$$

де $\widetilde{S}^{(r)}(t) = \widetilde{Q}_i S^{(r)}(t)$. Скориставшись формулою (2.88) і взявши до уваги, що

$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q_i} = -\theta_i(t), \quad z_i^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}^*(t),$$

в результаті дістанемо

$$\left(\overline{N}_i(t) - N_i(t) \overline{L}_i^{-1} L_i(t) - \theta_i(t) E_{s_i}\right) z_i^{(r)}(t) =$$

$$-D_0^{(r)} \left[\xi^{q_i}\right] \widetilde{\varphi}^*(t) - N_i(t) \overline{L}_i^{-1}(t) \widetilde{R}^{(r)}(t) + \widetilde{S}^{(r)}(t). \tag{2.89}$$

Оскільки за припущенням 8° власне значення $\theta_i(t)$ матриці $\overline{N}_i(t) - N_i(t)\overline{L}_i^{-1}L_i(t)$ просте, вектор $\widetilde{\psi}^*(t)$ можемо вибрати так, щоб виконувалася рівність $\Big(\widetilde{\varphi}^*(t), \widetilde{\psi}^*(t)\Big) = 1 \ \forall t \in [0;T]$, де $\widetilde{\psi}^*(t)$ — елемент нуль-простору $\Big(\overline{N}_i(t) - N_i(t)\overline{L}_i^{-1}L_i(t) - \theta_i(t)E_{s_i}\Big)^*$, що й передбачатимемо далі.

Для того щоб рівняння (2.89) мало розв'язки, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$D_0^{(r)}[\xi^{q_i}] = \Big(\widetilde{S}^{(r)}(t), \widetilde{\psi}^*(t)\Big) - \Big(N_i(t)\overline{L}_i^{-1}(t)\widetilde{R}^{(r)}(t), \widetilde{\psi}^*(t)\Big).$$

Оскільки

$$D_0^{(r)}\big[\xi^{q_i}\big] = q_i\xi^{(r)}(t)\big(\xi^{(0)}(t)\big)^{q_i-1} + \widetilde{D}_0^{(r)}\big[\xi^{q_i}\big],$$

де доданок $\widetilde{D}_0^{(r)}\big[\xi^{q_i}\big]$ містять лише ті функції $\xi^{(j)}(t)$, індекси яких менші r, звідси дістаємо

$$\xi^{(r)}(t) = \frac{\Big(\widetilde{S}^{(r)}(t), \widetilde{\psi}^*(t)\Big) - \Big(N_i(t)\overline{L}_i^{-1}(t)\widetilde{R}^{(r)}(t), \widetilde{\psi}^*(t)\Big) - \widetilde{D}_0^{(r)}\big[\xi^{q_i}\big]}{q_i\big(\xi^{(0)}(t)\big)^{q_i-1}}. \tag{2.90}$$

При цих значеннях $\xi^{(r)}(t)$ рівняння (2.89) розв'язне і з нього одержуємо

$$z_i^{(r)}(t) = \Big[\overline{N}_i(t) - N_i(t)\overline{L}_i^{-1}L_i(t) - \theta_i(t)E_{s_i}\Big]^+ \widetilde{d}_i^{(r)}(t), \tag{2.91}$$

де $\widetilde{d}_i^{(r)}(t)$ — права частина рівняння (2.89). Потім за формулою (2.88) знайдемо вектор $\overline{z}^{(0)}(t)$, а отже, й $z^{(r)}(t)$. Нарешті, за формулою (2.58) отримаємо вектор $v^{(r)}(t)$.

Після цього з рівняння (2.86) визначимо вектори $z_l^{(q_i-q_l+r)}(t), \ l = \overline{i+1, \beta}$:

$$\begin{aligned} z_l^{(q_i-q_l+r)}(t) = -\frac{1}{\big(\xi^{(0)}(t)\big)^{q_l}} \Bigg(&\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\big[\xi^j\big]\,\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times \\ &\times\sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)z_n^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=q_i+1}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\big[\xi^j\big]\times \\ &\times\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)z_i^{(k)}(t) + \\ &+\sum_{n=i+1}^{\beta}\sum_{k=q_i-q_n}^{q_i-q_n+r-1}\sum_{j=q_i}^{q_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} D_0^{(q_i+r-k-j)}\big[\xi^j\big]\,\widetilde{Q}_l\frac{\partial^\gamma M(t,0)}{\gamma!\partial\xi^\gamma}\times \\ &\times\sigma^{j-\gamma+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)z_n^{(k)}(t) - \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} D_0^{(r-j-\gamma)}\big[\xi^\gamma\big]\widetilde{Q}_l\sigma^{\gamma+1}\times \\ &\times\Big(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m\Big)\,h_i^{(q_i+j)}(t) - \widetilde{Q}_l h_i^{(q_i+r)}(t)\Bigg), \quad l = \overline{i+1, \beta}. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Ітераційний процес проходить. Згідно з формулою (2.81) подібним чином можна побудувати s_iq_i формальних розв'язків системи (1.1), які відповідають s_i нескінченним елементарним дільникам кратності q_i кожний. Змінюючи l від 1 до β, будуємо $s_1q_1 + s_2q_2 + \ldots + s_\beta q_\beta$ формальних розв'язків другої групи.

Підсумком проведених викладок є така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1°–8°, то на відрізку $[0;T]$ система диференціальних рівнянь (1.1) має $r_1p_1 + r_2p_2 + \ldots + r_\alpha p_\alpha$ формальних розв'язків вигляду*

$$x_i(t,\mu) = u_i(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right), \quad i = \overline{1, r_1p_1 + \ldots + r_\alpha p_\alpha},$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (1.3), і $s_1q_1 + s_2q_2 + \ldots + s_\beta q_\beta$ розв'язків вигляду

$$x_j(t,\nu) = v_j(t,\nu)\exp\left(\nu^{-q_sh-1}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\nu)}\right), \quad j = \overline{1, s_1q_1 + \ldots + s_\beta q_\beta},$$

які відповідають нескінченним елементарним дільникам цієї в'язки, де $u_i(t,\mu)$ та $v_j(t,\nu)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\mu)$ та $\xi_j(t,\nu)$ — скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень (2.2), (2.49), (2.3), (2.50).

Побудовані формальні розв'язки, що будуються за вказаним алгоритмом, лінійно незалежні в тому розумінні, що такими будуть l-наближення $x_i^{(l)}(t,\mu)$, $x_j^{(l)}(t,\nu)$, утворені шляхом обривання розвинень (2.2), (2.3), (2.49), (2.50) на l-му члені, якщо $l \geq \max(p_1-1, q_1-1)$. Тому їхня лінійна комбінація буде загальним формальним розв'язком системи (1.1).

3. Асимптотичні властивості формальних розв'язків. Використовуючи [5, 6], можна переконатися, що отримані розв'язки є асимптотичним розвиненням точних лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1 і функції*

$$\operatorname{Re}\lambda_0(t) + \sum_{s=1}^{p_\gamma h-1}\mu^s \operatorname{Re}\lambda_i^{(s)}(t), \qquad i = \overline{1, p_\gamma r_\gamma}, \quad \gamma = \overline{1,\alpha},$$

$$\sum_{s=0}^{q_\gamma h}\nu^s \operatorname{Re}\xi_j^{(s)}(t), \qquad j = \overline{1, q_\gamma s_\gamma}, \quad \gamma = \overline{1,\beta},$$

не змінюють знака на відрізку $[0;T]$, тоді на цьому відрізку для формальних розв'язків $x_i(t,\mu)$, $i = \overline{1, p_\gamma r_\gamma}$, $\gamma = \overline{1,\alpha}$, $x_j(t,\nu)$, $j = \overline{1, q_\gamma s_\gamma}$, $\gamma = \overline{1,\beta}$, системи (1.1) існують такі точні розв'язки $\widetilde{x}_i(t,\mu)$, $i = \overline{1, p_\gamma r_\gamma}$, $\gamma = \overline{1,\alpha}$, $\widetilde{x}_j(t,\nu)$, $j = \overline{1, q_\gamma s_\gamma}$, $\gamma = \overline{1,\beta}$, цієї системи, для яких дані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon \to 0$. Для будь-якого натурального l і достатньо малого ε виконуються такі нерівності:

$$\left\|x_i^{(l)}(t,\mu) - \widetilde{x}_i(t,\mu)\right\| \leq$$

$$\leq c\mu^{l-p_\gamma h}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_0}^t\left(\operatorname{Re}\lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^{p_\gamma h-1}\mu^s\operatorname{Re}\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^kx_i^{(l)}(t,\mu)}{dt^k} - \frac{d^k\widetilde{x}_i(t,\mu)}{dt^k}\right\| \leq$$

$$\leq c\mu^{l-(k+p_\gamma)h}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}} \sup_{t\in[0;T]} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_0}^{t}\left(\operatorname{Re}\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{p_\gamma h-1}\mu^s\operatorname{Re}\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$i=\overline{1,p_\gamma r_\gamma},\ \gamma=\overline{1,\alpha},\ k=\overline{1,m-1}$, *для розв'язків, які відповідають кратним скінченним елементарним дільникам, і*

$$\left\|x_j^{(l)}(t,\nu)-\widetilde{x}_j(t,\nu)\right\|\leq c\nu^{l-q_\gamma h-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-q_\gamma h-1}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{q_\gamma h}\nu^s\operatorname{Re}\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_j^{(l)}(t,\nu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_j(t,\nu)}{dt^k}\right\|\leq c\nu^{l-(k+q_\gamma)h-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-q_\gamma h-1}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{q_\gamma h}\nu^s\operatorname{Re}\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$j=\overline{1,q_\gamma s_\gamma},\ \gamma=\overline{1,\beta},\ k=\overline{1,m-1}$, *для розв'язків, які відповідають нескінченним елементарним дільникам, де* c *— деяка стала, яка не залежить від* ε, *а* $\mu=\sqrt[p_i]{\varepsilon},\ i=\overline{1,\alpha},\ \nu=\sqrt[q_j]{\varepsilon},\ j=\overline{1,\beta},\ \delta=\max(p_1,q_1)$.

Зауваження 3.1. У наведених оцінках фігурують експоненціальні множники, які будуть експоненціально малими, якщо відповідним чином вибирати нижню межу інтегрування, що міститься під знаком експоненти: якщо підінтегральний вираз недодатній, то покладаємо $t_0=0$, якщо ж цей вираз невід'ємний, то беремо $t_0=T$.

Література

1. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 13. – С. 201 – 217.
2. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 379 – 398.
3. *Пафик С. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць // Динам. системы. – 2014. – **3(31)**, № 3, 4. – С. 255 – 274.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
6. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.

Одержано 03.01.18,
після доопрацювання — 29.06.18