УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЫСТРО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. А. Гержановская

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: greta.odessa@gmail.com

We establish asymptotic representations of rapidly varying solutions of essentially nonlinear differential equations of the second order.

Встановлено асимптотичні зображення для швидко змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')f(y,y'), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ — непрерывная функция ($-\infty < a < \omega \le +\infty$), $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — промежуток либо $[y_i^0;Y_i[$[1], либо $]Y_i;y_i^0]$, $i=0,1$, $f\colon \Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\to]0,+\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция. Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i, $i\in\{0,1\}$, является правильно меняющейся функцией (см. [1, с. 9], гл. 1, § 1.1) при стремлении аргумента к Y_i порядка σ_i, причем $\sigma_0+\sigma_1\ne 1$, а функция f удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{v_k\to Y_k\\ v_k\in\Delta_{Y_k}}} \frac{v_k\,\frac{\partial f}{\partial v_k}(v_0,v_1)}{f(v_0,v_1)} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_j\in\Delta_{Y_j}, \quad j\ne k, \quad k,j=0,1. \tag{2}$$

Асимптотическому поведению решений дифференциальных уравнений вида (1), в котором $f(y,y')\equiv 1$, было посвящено большое количество работ (см., например, [2, 4]). Однако для нелинейностей, близких к правильно меняющимся функциям, могут возникать функции, даже асимптотически не представимые в виде произведения функций лишь от одной переменной, что не позволит применить эти результаты. В данной работе в уравнении (1) функция f может содержать множители, не представимые в виде такого произведения. Примерами соответствующих функций f, удовлетворяющих условию (2), являются функции вида $e^{|\gamma\ln|v_0|+\mu\ln|v_1||^\alpha}$, $0<\alpha<1$, $\gamma,\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением, если оно задано на $[t_0,\omega[$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad i=0,1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t))^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

[1] При $Y_i=+\infty$ ($Y_i=-\infty$) считаем $y_i^0>0$ ($y_i^0<0$) соответственно.

В неособых случаях $\lambda_0 \in R \setminus \{0,1\}$ $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1) были детально исследованы в [7]. Отметим, что такие решения являются правильно меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$. Данная работа посвящена исследованию достаточно важного класса $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений данного уравнения, которые являются быстро меняющимися функциями (см. [1, с. 46], гл. 1, § 1.8) при $t \uparrow \omega$. $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решения для общего случая уравнения (1) ранее не исследовались, хотя при $f(v_0, v_1) \equiv 1$ это было сделано как для уравнения второго порядка (см., например, [4]), так и для уравнений n-го порядка (см., например, [6]).

Основные результаты. Введем дополнительные обозначения, положив

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, i = 0, 1,$$

$$I(t) = \alpha_0 \int\limits_{A_\omega}^{t} p(\tau)\, d\tau, \quad A_\omega = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J_1(t) = \int\limits_{B_\omega^1}^{t} |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau, \quad B_\omega^1 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J_2(t) = \int\limits_{B_\omega^2}^{t} |I(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau, \quad B_\omega^2 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}}\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma_1 \neq 1$. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$*-решений уравнения (1) необходимо, а если*

$$\sigma_1 \neq 2 \quad \textit{либо} \quad (\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \tag{4}$$

то и достаточно выполнение условий

$$y_0^0 \alpha_0 > 0, \quad y_1^0 I(t)(1 - \sigma_0 - \sigma_1) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{5}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |J_1(t)|^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |J_1(t)|^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J_1(t) I'(t)}{J_1'(t) I(t)} = 1 - \sigma_1. \tag{6}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические *представления при $t \uparrow \omega$:*

$$\frac{y(t)|y(t)|^{-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\,|1-\sigma_1-\sigma_0|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}J_1(t)[1+o(1)],$$
$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\,\frac{J_1(t)}{J_1'(t)}\,[1+o(1)]. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $\sigma_1 = 1$. Тогда для существования $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решений уравнения (1) необходимо, а если*

$$\sigma_0 I(t) < 0, \tag{8}$$

то и достаточно выполнение условий

$$y_0^0\alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 y_1^0 I(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a,\omega[, \tag{9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0|J_2'(t)|^{-1} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0|J_2(t)^{-1} = Y_1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_2(t)I'(t)}{J_2'(t)I(t)} = \sigma_0. \tag{10}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические представления при $t \uparrow \omega$:

$$|y'(t)|(f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}} = |\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}}|J_2(t)|^{-1}[1+o(1)],$$
$$\frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_2(t)}{J_2'(t)}\,[1+o(1)]. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0} - P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решение уравнения (1). С учетом (3) получаем, что $y_0^0\alpha_0 > 0$, т. е. выполнено первое из условий (5).

В силу свойств медленно меняющихся функций (см. [1, с. 23], гл. 1, § 1.4) существуют бесконечно дифференцируемые функции $L_0\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$, $L_1\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ такие, что

$$L_i(z) = \Theta_i(z)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad z\to Y_i, \quad z\in\Delta_{Y_i}, \quad \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{zL_i'(z)}{L_i(z)} = 0, \quad i = 0,1. \tag{12}$$

Рассмотрим равенство

$$\left(\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0}|y(t)'|^{\sigma_1}f(y(t),y'(t))L_0(y(t))L_1(y'(t))}\right)' =$$
$$= \left(1-\sigma_1-\frac{y'(t)\frac{\partial f}{\partial v_1}\left(y(t),y'(t)\right)}{f(y(t),y'(t))}-\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\times\right.$$
$$\times\left(\sigma_0+\frac{y(t)\frac{\partial f}{\partial v_0}(y(t),y'(t))}{f(y(t),y'(t))}+\frac{y(t)L_0'(y(t))}{L_0(y(t))}\right)-\left.\frac{y'(t)L_1'(y'(t))}{L_1(y'(t))}\right)\times$$
$$\times\frac{y''(t)}{|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}f(y(t),y'(t))L_0(y(t))L_1(y'(t))}. \tag{13}$$

Поскольку в равенстве (13) при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y''(t)}{|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))}=\frac{y''(t)[1+o(1)]}{|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}f(y(t),y'(t))L_0(y(t))L_1(y'(t))},$$

то в силу (1), условий (2) и (12) соотношение (13) можно записать при $t\uparrow\omega$ в виде

$$\left(\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}f(y(t),y'(t))L_0(y(t))L_1(y'(t))}\right)'=\alpha_0p(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)[1+o(1)]. \tag{14}$$

Поэтому с использованием предложений 1 и 2 из [3, с. 115] (гл. 5, § 1) при $t\uparrow\omega$ имеем

$$\frac{|y'(t)|\operatorname{sign}y_1^0}{|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)^{\sigma_1}f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))}=I(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)[1+o(1)], \tag{15}$$

откуда следует второе из условий (5), а также следующее представление при $t\uparrow\omega$:

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}|f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=$$
$$=|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0[1+o(1)]. \tag{16}$$

Покажем, что функция $f\left(v_0,y'(y^{-1}(v_0))\right)\Theta_0(v_0)\Theta_1(y'(y^{-1}(v_0)))$ является медленно меняющейся функцией при $v_0\to Y_0$, $v_0\in\Delta_{Y_0}$, где y^{-1} — функция, обратная для $y(t)$. Так как $\lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}} y'(y^{-1}(v_0))=Y_1$, в силу (2), (3) имеем

$$\lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}}\frac{v_0\frac{\partial f}{\partial v_0}\left(v_0,y'(y^{-1}(v_0))\right)}{f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))}=0,\qquad \lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}}\frac{y'(y^{-1}(v_0)))\frac{\partial f}{\partial v_1}(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))}{f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))}=0.$$

Таким образом, с учетом (3)

$$\lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}} \frac{v_0\left(f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))L_0(v_0)L_1(y'(y^{-1}(v_0)))\right)'_{v_0}}{f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))L_0(v_0)L_1(y'(y^{-1}(v_0)))} =$$

$$= \lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}} \frac{v_0\frac{\partial f}{\partial v_0}(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))}{f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))} + \lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}} \frac{v_0L_0'(v_0)}{L_0(v_0)} +$$

$$+ \lim_{\substack{v_0\to Y_0\\ v_0\in\Delta_{Y_0}}} \left(\frac{y'(y^{-1}(v_0))\frac{\partial f}{\partial v_1}(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))}{f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))} + \frac{y'(y^{-1}(v_0))L_1'(y'(y^{-1}(v_0)))}{L_1(y'(y^{-1}(v_0)))}\right) \times$$

$$\times \frac{v_0\, y''(y^{-1}(v_0))}{(y'(y^{-1}(v_0)))^2} = 0.$$

Следовательно, функция $f\left(v_0,y'\left(y^{-1}\left(v_0\right)\right)\right)L_0(v_0)L_1\left(y'\left(y^{-1}(v_0)\right)\right)$, а значит и функция $f(v_0,y'(y^{-1}(v_0)))\Theta_0(v_0)\Theta_1\left(y'\left(y^{-1}(v_0)\right)\right)$, является медленно меняющейся функцией при $v_0\to Y_0$, $v_0\in\Delta_{Y_0}$.

С использованием предложений 1 и 2 из [3, с. 115] (гл. 5, § 1) из (16) при $t\uparrow\omega$ получаем

$$\frac{y(t)|y(t)|^{-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{\left(f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} =$$

$$= J_1(t)|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\,\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\,\operatorname{sign} y_1^0[1+o(1)], \tag{17}$$

т. е. первое из представлений (7). Разделив (16) на (17), будем иметь

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_1'(t)(1-\sigma_1)}{J_1(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{18}$$

т. е. второе из представлений (7). С учетом (3) из (18) получаем первое и второе из условий (6). С учетом (1) и (15) имеем

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{I'(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда в силу (18) и (3) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_1(t)I'(t)}{J_1'(t)I(t)} = 1-\sigma_1,$$

т. е. третье из условий (6).

Достаточность. Обозначим $g(v_0,v_1) = f(v_0,v_1)L_0(v_0)L_1(v_1)$, где L_0, L_1 определены в (12). В силу (2) и (12) имеем

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}} \frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_j\in\Delta_{Y_j}, \quad j\neq i, \quad i,j=0,1. \tag{19}$$

Таким образом, можно выбрать $\tilde{\Delta}_{Y_i} \subset \Delta_{Y_i}$, $i = 0, 1$, так, чтобы

$$\left| \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} \right| < \zeta \quad \text{при} \quad (v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}, \quad i = 0, 1, \tag{20}$$

где $0 < \zeta < \dfrac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}{4}$, ζ достаточно мало и

$$\tilde{\Delta}_{Y_i} = \begin{cases} \{[\tilde{y}_i^0, Y_i[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[, \quad y_i^0 \le \tilde{y}_i^0 < Y_i, \\ ]Y_i, \tilde{y}_i^0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0], \quad Y_i > \tilde{y}_i^0 \ge y_i^0, \end{cases} \qquad i = 0, 1.$$

Рассмотрим функцию

$$F(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{|s_1|^{1 - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1 - \sigma_1}}(s_0, s_1)} \\ \\ \dfrac{s_1}{s_0} \end{pmatrix},$$

заданную на множестве $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, и первую компоненту данной функции. С учетом (19) имеем

$$\lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{s_0 \left(\frac{|s_0|^{1 - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1 - \sigma_1}}(s_0, s_1)} \right)'_{s_0}}{\frac{|s_0|^{1 - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1 - \sigma_1}}(s_0, s_1)}} = \lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \left(1 - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_1} - \frac{1}{1 - \sigma_1} \frac{s_0 \frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0, s_1)}{g(s_0, s_1)} \right) =$$

$$= \frac{1 - \sigma_0 - \sigma_1}{1 - \sigma_1} \quad \text{равномерно по} \quad s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{|s_0|^{1 - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1 - \sigma_1}}(s_0, s_1)} = \Upsilon \quad \text{равномерно по} \quad s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$\Upsilon = \begin{cases} +\infty, \ \text{если} \ Y_0 = +\infty \ \text{и} \ (1 - \sigma_0 - \sigma_1)(1 - \sigma_1) > 0, \ \text{либо} \\ Y_0 = 0 \ \text{и} \ (1 - \sigma_0 - \sigma_1)(1 - \sigma_1) < 0, \\ \\ 0, \ \text{если} \ Y_0 = +\infty \ \text{и} \ (1 - \sigma_0 - \sigma_1)(1 - \sigma_1) < 0, \ \text{либо} \\ Y_0 = 0 \ \text{и} \ (1 - \sigma_0 - \sigma_1)(1 - \sigma_1) > 0. \end{cases} \tag{21}$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ на множество

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) = \begin{cases} \left[\dfrac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)}; \Upsilon\right) \times \Delta_0, & \text{если} \quad \dfrac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} < \Upsilon, \\ \left(\Upsilon; \dfrac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)}\right] \times \Delta_0, & \text{если} \quad \dfrac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} > \Upsilon, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{cases} (0; +\infty), & \text{если} \quad \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 > 0, \\ (-\infty; 0), & \text{если} \quad \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Рассмотрим поведение функции $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)}$ на прямых

$$s_1 = k s_0, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{24}$$

На каждой такой прямой $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} = \dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, k s_0)}$. Кроме того, имеем

$$\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, k s_0)}\right)'_{s_0} = \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1) s_0 g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, k s_0)} \times$$
$$\times \left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{s_0 g'_{s_0}(s_0, k s_0)}{g(s_0, k s_0)} - \frac{k s_0 g'_{k s_0}(s_0, k s_0)}{g(s_0, k s_0)}\right).$$

Это означает, что с учетом (20)

$$\operatorname{sign} \left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, k s_0)}\right)'_{s_0} = \operatorname{sign}\left(y_0^0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1)(1 - \sigma_1)\right).$$

Поэтому функция $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, k s_0)}$ строго монотонна на любой прямой вида (24). Предположим, что отображение F не является взаимно однозначным. Тогда существуют точки $(p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, $(p_0, p_1) \neq (q_0, q_1)$, такие, что $F(p_0, p_1) = F(q_0, q_1)$. С учетом определения множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}, \tilde{\Delta}_{Y_1}$ последнее равенство означает, что

$$\frac{|p_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(p_0, p_1)} = \frac{|q_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(q_0, q_1)}, \quad \frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = c \in \mathbb{R} \setminus 0. \tag{25}$$

Покажем, что точки (p_0, p_1) и (q_0, q_1) лежат на одной прямой вида (24). Но тогда (25) не может иметь места, так как функция $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, cs_0)}$ строго монотонна на этой прямой.

Таким образом, существует обратная функция $F^{-1}\colon F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \to \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Учитывая вид функции F, имеем

$$F^{-1}(w_0, w_1) = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0, w_1) \\ \\ F_1^{-1}(w_0, w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0, w_1) \\ \\ w_1 F_0^{-1}(w_0, w_1) \end{pmatrix}.$$

Поскольку якобиан

$$JF(s_0, s_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}\left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{s_0 \frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)}{s_0(1-\sigma_1) g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} & \dfrac{-|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{s_1(1-\sigma_1) g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} \dfrac{s_1 \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1)}{g(s_0, s_1)} \\ \\ -\dfrac{s_1}{s_0^2} & \dfrac{1}{s_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{s_0^2(1-\sigma_1) g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} \times$$

$$\times \left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{s_0 \frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0, s_1)}{g(s_0, s_1)} - \frac{s_1 \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1)}{g(s_0, s_1)}\right) \neq 0 \text{ при } (s_0, s_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1},$$

функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$. Кроме того, для $(w_0, w_1) \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$ справедливы равенства

$$\frac{|F_0^{-1}(w_0, w_1)|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(F_0^{-1}(w_0, w_1), F_1^{-1}(w_0, w_1))} = w_0,$$

$$\frac{F_i^{-1}(w_0, w_1)}{w_0 \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial w_0}(w_0, w_1)} = 1 - \frac{\sigma_0}{1-\sigma_1} - \frac{1}{1-\sigma_1} \times \tag{26}$$

$$\times \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{F_{k-1}^{-1}(w_0, w_1) \frac{\partial g}{\partial v_k}(F_0^{-1}(w_0, w_1), F_1^{-1}(w_0, w_1))}{g(F_0^{-1}(w_0, w_1), F_1^{-1}(w_0, w_1))}\right], \quad i = 0, 1,$$

$$\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)}{w_1\frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\,\frac{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}+$$

$$+\frac{1}{1-\sigma_1}\,\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}+1, \qquad (27)$$

$$\frac{w_1\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_1^{-1}(w_0,w_1)} = 1+\frac{w_1\frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_0^{-1}(w_0,w_1)}. \qquad (28)$$

Полагая

$$\begin{gathered}\frac{|y(t)|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{f^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(y(t),y'(t))} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}J_1(t)|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0[1+z_1(x)],\\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\,\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,[1+z_2(x)],\end{gathered} \qquad (29)$$

где

$$x = \beta\ln|J_1(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega}J_1(t) = +\infty,\\ -1, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega}J_1(t) = 0,\end{cases}$$

сводим уравнение (1) к системе

$$\begin{aligned} z_1' &= \beta[1+z_1]\Bigg([1+z_2]-\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,\Phi_0(x,z_1,z_2)[1+z_2]+\\ &\quad+\frac{\alpha_0}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)}\,\Phi_1(x,z_1,z_2)H(t(x))[1+z_1]^{\sigma_1-1}|1+z_2|^{\sigma_1-1}-1\Bigg),\\ z_2' &= \beta\Bigg([1+z_2]-\frac{\alpha_0}{1-\sigma_1}\,H(t(x))[1+z_2]+\frac{\alpha_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,H(t(x))\times\\ &\quad\times[1+z_1]^{\sigma_1-1}|1+z_2|^{\sigma_1}-\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,[1+z_2]^2\Bigg),\end{aligned} \qquad (30)$$

где

$$\begin{gathered}\Psi_i(x,z_1,z_2) = F_i^{-1}\left(\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\,J_1(t(x))|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0[1+z_1]\,,\right.\\ \left.\frac{J_1'(t(x))}{J_1(t(x))}\,\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,[1+z_2]\right),\end{gathered}$$

$$\Phi_i(x,z_1,z_2) = \frac{\Psi_i(x,z_1,z_2)\frac{\partial f}{\partial v_{i+1}}(Y_0(x,z_1,z_2),Y_1(x,z_1,z_2))}{f(Y_0(x,z_1,z_2),Y_1(x,z_1,z_2))}, \quad i = 0,1,$$

$$H_1(x) = \frac{p(t(x))J_1(t(x))}{I(t(x))J_1'(t(x))}.$$

В силу третьего из условий (6)

$$\lim_{x\to\infty} H_1(x) = \frac{1-\sigma_1}{\alpha_0}. \tag{31}$$

Обозначим

$$\eta_1(t,z_1) = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\, J_1(t)|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0[1+z_1],$$

$$\eta_2(t,z_2) = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\,\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,[1+z_2].$$

Рассмотрим выражения

$$\frac{J_1(t)(\Psi_k(x(t),z_1,z_2))_t'}{J_1'(t)\Psi_k(x(t),z_1,z_2)} = \frac{\eta_1(t,z_1)\frac{\partial F_k^{-1}}{\partial w_0}(\eta_1(t,z_1),\eta_2(t,z_2))}{F_k^{-1}(\eta_1(t,z_1),\eta_2(t,z_2))} + \left(\frac{J_1(t)J_1''(t)}{(J_1'(t))^2}\right)\times$$

$$\times\,\frac{\eta_2(t,z_2)\frac{\partial F_k^{-1}}{\partial w_1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))}{F_k^{-1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))}, \quad k=0,1. \tag{32}$$

Так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 1 из [7], с учетом (32), (26)–(28) получим, что при построении множеств $\tilde\Delta_{Y_0}$, $\tilde\Delta_{Y_1}$ число ζ может быть выбрано настолько малым, чтобы существовали такие константы $c_1, c_2 \in R$, что

$$c_1 < \frac{J_1(t)(\Psi_k(x(t),\xi_1,\xi_2))_t'}{J_1'(t)\Psi_k(x(t),\xi_1,\xi_2)} < c_2 \quad \text{при}(\xi_1,\xi_2)\in \left]-\frac12,\frac12\right[\times\left]-\frac12,\frac12\right[, \quad k=0,1,$$

и $\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} c_2 = \operatorname{sign}\dfrac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_i(x,z_1,z_2) = Y_i \quad \text{равномерно по} \quad z_1,z_2\colon |z_j|<\frac12, \quad j=1,2, \quad i=0,1. \tag{33}$$

В силу (33) и (19) имеем

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}} \frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_j\in\Delta_{Y_j}, \quad i\neq j, \quad i,j=0,1,$$

откуда следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\Phi_i(x,z_1,z_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z_1,z_2\colon |z_j|<\frac12, \quad j=1,2, \quad i=0,1. \tag{34}$$

Так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 1 из [7], в силу (5), (6), (21) – (23) можно выбрать число $t_0 \in [a, \omega[$ так, чтобы для любых $|z_j| \leq \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$,

$$\begin{pmatrix} J_1(t)\,\dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0[1+z_1] \\ \dfrac{J_1'(t)}{J_1(t)}\,\dfrac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}[1+z_2] \end{pmatrix} \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \text{ при } t \in [t_0, \omega[.$$

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (30) на множестве

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta \ln |J_1(t_2)|,$$

$$D = \left\{(z_1, z_2) \colon |z_i| \leq \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right\}.$$

Запишем систему (30) в виде

$$\begin{aligned} z_1' &= A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + R_1(z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2), \\ z_2' &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(z_1, z_2), \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = \beta, \quad A_{21} = \beta\,\frac{\alpha_0 H_1(x)(\sigma_1 - 1)}{1-\sigma_0-\sigma_1},$$

$$A_{22} = \beta\,\frac{\sigma_0 - \sigma_1 - 1 + \alpha_0 H_1(x)(2\sigma_1 + \sigma_0 - 1)}{1-\sigma_0-\sigma_1}, \quad R_1(x, z_1, z_2) = \beta z_1 z_2,$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \beta[1+z_1]\left(-\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,[1+z_2]\Phi_0(x, z_1, z_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_0}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)}\,H_1(t(x))\frac{[1+z_1]^{\sigma_1-1}}{|1+z_2|^{1-\sigma_1}}\,\Phi_1(x, z_1, z_2)\right),$$

$$R_3(x, z_1, z_2) = \beta\left(H_1(t(x)) - \frac{1-\sigma_1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{\alpha_0}{1-\sigma_1}\,[1+z_2] + \frac{\alpha_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,\frac{|1+z_2|^{\sigma_1}}{[1+z_1]^{1-\sigma_1}}\right),$$

$$R_4(z_1, z_2) = -\beta\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\,\left(\frac{|1+z_2|^{\sigma_1}}{[1+z_1]^{1-\sigma_1}} - 1 - \sigma_1 z_2 - (1-\sigma_1)z_1 + z_2^2\right).$$

Предельная матрица коэффициентов линейной части системы (35) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta\,\dfrac{(1-\sigma_1)^2}{1-\sigma_0-\sigma_1} & \beta\,\dfrac{(1-\sigma_1)(\sigma_1-2)}{1-\sigma_0-\sigma_1} \end{pmatrix},$$

и с учетом (31) и (34) для каждого $i \in \{1,4\}$ и каждого $j \in \{2,3\}$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x\colon x \in]x_0,+\infty[,$$

$$\lim_{x\to+\infty} R_j(x,z_1,z_2) = 0 \quad \text{равномерно по } z_1,z_2\colon (z_1,z_2) \in D.$$

В силу (4) характеристическое уравнение матрицы A не имеет корней с нулевой действительной частью.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (35) выполнены все условия теоремы из [5]. Согласно этой теореме, система (30) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2\colon [x_1,+\infty[\to \mathbb{R}^2$, $x_1 \geq x_0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему в силу замен (29) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (7). В силу этих представлений и (1) полученное решение y является $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решением.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решение уравнения (1). С учетом (3) $y_0^0\alpha_0 > 0$, т. е. выполнено первое из условий (9). Так же, как и при доказательстве теоремы 1, введем функции $L_0(y)$, $L_1(y')$ и получим равенство (15). При $\sigma_1 = 1$ оно примет вид

$$\frac{\operatorname{sign} y_1^0}{|y(t)|^{\sigma_0} f(y(t),y'(t))\Theta_0(y)\Theta_1(y')} = -\sigma_0 I(t)\,[1+o(1)]. \tag{36}$$

Отсюда следует второе из условий (9). Запишем (36) в виде

$$y(t) = \left|f(y(t),y'(t)\Theta_0(y)\Theta_1(y')\right|^{-\frac{1}{\sigma_0}} \, |I(t)|^{-\frac{1}{\sigma_0}} |-\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}} \operatorname{sign} y_0^0[1+o(1)] \ \text{ при } \ t\uparrow\omega. \tag{37}$$

Подставив (37) в третье из условий (3), получим

$$(y'(t))^2 = y''(t) f^{-\frac{1}{\sigma_0}} \big(y(t),y'(t)\big) \left(\Theta_0(y)\Theta_1(y')\right)^{-\frac{1}{\sigma_0}} |I(t)|^{-\frac{1}{\sigma_0}} \times$$

$$\times |\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}} \operatorname{sign} y_0^0[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{38}$$

Отсюда имеем

$$\frac{y''(t)}{(y'(t))^2 (f(y(t),y'(t))\Theta_0(y)\Theta_1(y'))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = |I(t)|^{\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} \operatorname{sign} y_0^0[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{39}$$

Покажем, что функция $f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)\Theta_0(y((y')^{-1}(v_1)))\Theta_1(v_1)$ является медленно меняющейся при $v_1 \to Y_1$, $v_1 \in \Delta_{Y_1}$, где $(y')^{-1}$ — функция, обратная для $y'(t)$. В силу (2) с учетом того, что $\lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}} y((y')^{-1}(v_1)) = Y_0$, имеем

$$\lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}} \frac{v_1 \frac{\partial f}{\partial v_1}(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)}{f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)} = 0, \qquad \lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}} \frac{y((y')^{-1}(v_1)))\frac{\partial f}{\partial v_0}(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)}{f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)} = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}}\frac{v_1(f(y(y^{-1}(v_1)),v_1)L_0(y(y^{-1}(v_1)))L_1(v_1))'_{v_1}}{f(y(y^{-1}(v_1)),v_1)L_0(y(y^{-1}(v_1)))L_1(v_1)}=$$

$$=\lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}}\frac{v_1\frac{\partial f}{\partial v_1}(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)}{f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)}+\lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}}\frac{v_1L_1'(v_1)}{L_1(v_1)}+$$

$$+\lim_{\substack{v_1\to Y_1\\ v_1\in\Delta_{Y_1}}}\left(\frac{y((y')^{-1}(v_1))\frac{\partial f}{\partial v_0}(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)}{f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)}+\frac{y((y')^{-1}(v_1))L_0'(y((y')^{-1}(v_1)))}{L_0(y((y')^{-1}(v_1)))}\right)\times$$

$$\times\frac{y(y'((y')^{-1}(v_1)))^2}{y''((y')^{-1}(v_1))y((y')^{-1}(v_1))}=0.$$

Следовательно, функция $f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)L_0(y((y')^{-1}(v_1)))L_1(v_1)$, а значит и функция $f(y((y')^{-1}(v_1)),v_1)\Theta_0(y((y')^{-1}(v_1)))\Theta_1(v_1)$, является медленно меняющейся функцией при $v_1\to Y_1$, $v_1\in\Delta_{Y_1}$. Тогда с использованием предложений 1 и 2 из [3, с. 115] (гл. 5, § 1) получаем

$$\frac{1}{y'(t)(f(y(t),y'(t))\Theta_0(y)\Theta_1(y'))^{\frac{1}{\sigma_0}}}=-J_2(t)|\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}}\operatorname{sign}y_0^0[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,\tag{40}$$

т. е. первое из представлений (11).

Перемножая (36) и (40), имеем

$$\frac{y(t)}{y'(t)}=-\frac{J_2(t)}{J_2'(t)}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,\tag{41}$$

т. е. второе из представлений (11). Кроме того, с учетом (11) выполняются первое и второе из условий (10).

Разделив (39) на (40), получим

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\frac{I'(t)}{-\sigma_0I(t)}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом (41) и (3) получаем третье из условий (10).

Достаточность. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, обозначим $g(v_0,v_1)=$ $=f(v_0,v_1)L_0(v_0)L_1(v_1)$, где L_0,L_1 определены в (12), и рассмотрим функцию

$$F(s_0,s_1)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s_1g^{\frac{1}{\sigma_0}}(s_0,s_1)}\\[2ex] \dfrac{s_0}{s_1}\end{pmatrix},$$

заданную на множестве $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, где $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ выбраны так же, как в теореме 1, причем (19) и (20) имеют место. Рассмотрим первую компоненту данной функции. С учетом (19) имеем

$$\lim_{\substack{s_1 \to Y_1 \\ s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}}} \frac{s_1 \left(\frac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(s_0, s_1)} \right)'_{s_1}}{\frac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(s_0, s_1)}} = \lim_{\substack{s_1 \to Y_1 \\ s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}}} \left(-1 - \frac{s_1 \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1)}{\sigma_0 g(s_0, s_1)} \right) = -1 \text{ равномерно по } s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}.$$

В силу свойств функции g

$$\lim_{\substack{s_1 \to Y_1 \\ s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}}} \frac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(s_0, s_1)} = \Upsilon \text{ равномерно по } s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}, \quad \Upsilon = \begin{cases} \infty, & \text{если } Y_1 = 0, \\ 0, & \text{если } Y_1 = \infty. \end{cases} \tag{42}$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ на множество

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) = \begin{cases} \left[\frac{1}{y_0^1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)}; \Upsilon \right) \times \Delta_1, & \text{если } \frac{1}{y_0^1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} < \Upsilon, \\ \left(\Upsilon; \frac{1}{y_0^1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} \right] \times \Delta_1, & \text{если } \frac{1}{y_0^1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} > \Upsilon, \end{cases} \tag{43}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{cases} (0; +\infty), & \text{если } \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 > 0, \\ (-\infty; 0), & \text{если } \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 < 0. \end{cases} \tag{44}$$

Рассмотрим поведение функции $\dfrac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(s_0, s_1)}$ на прямых

$$s_0 = k s_1, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{45}$$

На каждой такой прямой $\dfrac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(s_0, s_1)} = \dfrac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(k s_1, s_1)}$. Кроме того, имеем

$$\left(\frac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(k s_1, s_1)} \right)'_{s_1} = \frac{1}{s_1^2 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(k s_1, s_1)} \left(-1 - \frac{k s_1 g'_{k s_1}(k s_1, s_1)}{\sigma_0 g(k s_1, s_1)} - \frac{s_1 g'_{s_1}(k s_1, s_1)}{\sigma_0 g(k s_1, s_1)} \right).$$

Это означает, что с учетом (20)

$$\operatorname{sign} \left(\frac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(k s_1, s_1)} \right)'_{s_1} = \operatorname{sign}(-y_0^1).$$

Поэтому функция $\dfrac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(ks_1, s_1)}$ строго монотонна на любой прямой вида (45). Предположим, что отображение F не является взаимно однозначным. Тогда существуют точки $(p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, $(p_0, p_1) \neq (q_0, q_1)$, такие, что $F(p_0, p_1) = F(q_0, q_1)$. С учетом определения множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}, \tilde{\Delta}_{Y_1}$ последнее равенство означает, что

$$\frac{1}{p_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(p_0, p_1)} = \frac{1}{q_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(q_0, q_1)}, \quad \frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = c \in \mathbb{R} \setminus 0. \tag{46}$$

Покажем, что точки (p_1, p_2) и (q_1, q_2) лежат на одной прямой вида (45). Но тогда (46) невозможно, так как функция $\dfrac{1}{s_1 g^{\frac{1}{\sigma_0}}(cs_1, s_1)}$ строго монотонна на этой прямой.

Таким образом, существует обратная функция $F^{-1}\colon F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \to \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Учитывая вид функции F, имеем

$$F^{-1}(w_0, w_1) = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0, w_1) \\ \\ F_1^{-1}(w_0, w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0, w_1) \\ \\ w_1 F_0^{-1}(w_0, w_1) \end{pmatrix}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$.

Применим к уравнению (1) преобразование

$$\begin{gathered} \frac{1}{y'(t) g^{\frac{1}{\sigma_0}}(y(t), y'(t))} = -J_2(t)|\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} \operatorname{sign} y_0^0 [1 + z_1(x)], \\ \frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_2(t)}{J_2'(t)} [1 + z_2(x)], \end{gathered} \tag{47}$$

где

$$x = \beta \ln |J_2(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Получим систему вида

$$\begin{gathered} z_1' = \frac{\beta}{c} \left(\frac{\alpha_0 |H_2(t(x))|}{|c|^{\sigma_0 - 1}} \frac{|1 + z_2|^{\sigma_0}}{|1 + z_1|^{\sigma_0 - 1}} + \frac{c}{\sigma_0} \frac{[1 + z_1]}{[1 + z_2]} \Phi_0(x, z_1, z_2) + \right. \\ \left. + \frac{|c|^{1 - \sigma_0} |H_2(t(x))|}{\sigma_0} \frac{|1 + z_2|^{\sigma_0}}{|1 + z_1|^{\sigma_0 - 1}} \Phi_1(x, z_1, z_2) - c[1 + z_2] \right), \\ z_2' = \beta \left(-1 + \frac{|H_2(t(x))|}{|c|^{\sigma_0}} \frac{|1 + z_2|^{1 + \sigma_0}}{|1 + z_1|^{\sigma_0}} + \frac{H_2(t(x))}{\sigma_0} [1 + z_2] - [1 + z_2] \right), \end{gathered} \tag{48}$$

где

$$\Psi_i(x, z_1, z_2) = F_i^{-1}\left(-|\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} J_2(t(x)) \operatorname{sign} y_0^0[1+z_1], -\frac{J_2(t(x))}{J_2'(t(x))}[1+z_2]\right), \quad i = 0, 1,$$

$$\Phi_i(x, z_1, z_2) = \frac{\Psi_i(x, z_1, z_2) \frac{\partial g}{\partial v_{i+1}} (\Psi_0(x, z_1, z_2), \Psi_1(x, z_1, z_2))}{g(\Psi_0(x, z_1, z_2), \Psi_1(x, z_1, z_2))}, \quad i = 0, 1,$$

$$H_2(x) = \frac{J_2(t(x)) I'(t(x))}{J_2'(t(x)) I(t(x))}, \quad c = |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} \operatorname{sign} y_0^0.$$

В силу третьего из условий (10)

$$\lim_{x\to\infty} H_2(x) = \sigma_0. \tag{49}$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, с учетом (19) имеем

$$\lim_{x\to\infty} \Phi_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z_1, z_2\colon |z_j| < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \quad i = 0, 1. \tag{50}$$

Далее, как и при доказательстве достаточности в теореме 1 из [7], в силу (9), (10), (42)–(44) можно выбрать число $t_0 \in [a, \omega[$ так, чтобы для любых $|z_j| \leq \dfrac{1}{2}$, $j = 1, 2$,

$$\begin{pmatrix} -J_2(t)|\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} \operatorname{sign} y_0^0[1+z_1(x)] \\ \\ -\dfrac{J_2(t)}{J_2'(t)}[1+z_2(x)] \end{pmatrix} \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (48) на множестве

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta \ln |J_2(t_0)|, \quad D = \left\{(z_1, z_2)\colon |z_i| \leq \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right\}.$$

Запишем систему (48) в виде

$$\begin{aligned} z_1' &= A_{11}(x) z_1 + A_{12}(x) z_2 + R_1(z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2), \\ z_2' &= A_{21}(x) z_1 + A_{22}(x) z_2 + R_3(x) + R_4(x, z_1, z_2), \end{aligned} \tag{51}$$

где

$$A_{11}(x) = \frac{\beta\alpha_0(1-\sigma_0)}{c|c|^{\sigma_0-1}}|H_2(x)|, \quad A_{12}(x) = \frac{\beta\sigma_0}{c|c|^{\sigma_0-1}}|H_2(x)| - \beta,$$

$$A_{21}(x) = -\frac{\beta\sigma_0}{|c|^{\sigma_0}}|H_2(x)|, \quad A_{22}(x) = \frac{\beta(\sigma_0+1)}{|c|^{\sigma_0}}|H_2(x)| + \frac{\beta}{\sigma_0} H_2(x) - \beta,$$

$$R_1(z_1, z_2) = \frac{\beta}{c}\left(\frac{|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1+z_1|^{1-\sigma_0}} - 1 - \sigma_0 z_2 - (1-\sigma_0) z_1\right),$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \frac{\beta}{c}\left(\frac{\alpha_0(|H_2(t(x))| - |\sigma_0|)}{|c|^{\sigma_0 - 1}} \frac{|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1+z_1|^{\sigma_0-1}} + \frac{c}{\sigma_0}\frac{[1+z_1]}{[1+z_2]}\Phi_0(x, z_1, z_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{|c|^{1-\sigma_0}|H_2(t(x))|}{\sigma_0} \frac{|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1+z_1|^{\sigma_0-1}} \Phi_1(x, z_1, z_2)\right),$$

$$R_3(x, z_1, z_2) = \beta\left(\frac{|H_2(t(x))|}{|c|^{\sigma_0}} + \frac{H_2(t(x))}{\sigma_0} - 2\right),$$

$$R_4(x, z_1, z_2) = \beta\frac{|H_2(t(x))|}{|c|^{\sigma_0}}\left(\frac{|1+z_2(t(x))|^{\sigma_0-1}}{|1+z_1|^{\sigma_0}} - 1 + (1-\sigma_0) z_2 + \sigma_0 z_1\right).$$

Предельная матрица коэффициентов линейной части системы (51) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \beta(1-\sigma_0) & \beta(\sigma_0 - 1) \\ -\beta\sigma_0 & \beta(\sigma_0+1) \end{pmatrix},$$

и с учетом (49) и (50) для каждого $i \in \{1, 4\}$ и каждого $j \in \{2, 3\}$

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \to 0} \frac{R_i(z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, +\infty[,$$

$$\lim_{x \to +\infty} R_j(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z_1, z_2 \colon (z_1, z_2) \in D.$$

В силу (8) характеристическое уравнение матрицы A не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (51) выполнены все условия теоремы 2.2 из [5]. Согласно этой теореме, система (48) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 \colon [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $x_1 \geq x_0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему в силу замен (47) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (11). С учетом этих представлений и (1) ясно, что полученное решение y является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением.

Теорема 2 доказана.

Вывод. В данной работе для быстро меняющихся решений уравнения (1) получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений для случаев, когда $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_1 \neq 1$, а также асимптотические представления таких решений при $t \uparrow \omega$.

Литература

1. *Seneta E.* Regularly varying functions // Lect. Notes Math. — 1976. — **508**. — 113 p.
2. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 8. — С. 1053–1061.
3. *Maric V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. — 2000. — **1726**. — 128 p.

4. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 3–15.

5. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52–80.

6. *Bilozerova M. A., Evtukhov V. M.* Asymptotic representations of solutions of the differential equation $y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} \phi_i(y^{(i)})$ // Miskolc Math. Notes. — 2012. — **13**, № 2. — P. 249–270.

7. *Белозерова М. А., Гержановская Г. А.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, в некотором смысле близкими к правильно меняющимся // Мат. студ. — 2015. — **44**, № 2. — С. 204–214.

Получено 28.12.16