УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

А. О. Івашкевич

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. Глушкова, 4, Київ, 03680, Україна

Т. В. Ковальчук

Київ. нац. торг.-екон. ун-т
вул. Кіото, 19, Київ, 02156, Україна

We differential systems with impulsive effects at nonfixed times, we find conditions for existence of an optimal control. The conditions depend on the right-hand sides of the system and the quality criterion.

Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени получены условия существования оптимального управления в терминах правых частей системы и критерия качества.

1. Вступ. У даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x,t) + B(x,t)u, \quad x \notin S, \\ \Delta x|_{x \in S} &= g(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^T (A^0(x,t) + B^0(u,t))dt \to \inf, \tag{2}$$

де S — деяка гіперповерхня в R^d, $x_0 \in R^d$ — фіксований вектор, $T > 0$ — фіксоване число, $t \in [0,T]$, $u \in U \subset R^m$, U — замкнена, опукла множина в R^m, $0 \in U$, $A(x,t)$ — d-вимірна вектор-функція, $B(x,t)$ — $(d \times m)$-вимірна матриця, g — d-вимірна вектор-функція.

Більш точну постановку задачі буде наведено в основній частині роботи.

Подібні задачі розглядались раніше багатьма авторами. В роботах Л. Т. Ащепкова та його учнів (див., наприклад, [1]) розвивалися методи розв'язання такої задачі з точки зору розривних динамічних систем з подальшим застосуванням принципу максимума.

В монографії [2] така задача розглядалася з точки зору оптимальних імпульсних керувань, тобто керування містилося лише в імпульсній частині. Автори запропонували розв'язання такої задач методом квазіваріаційних нерівностей.

У роботі [3] задача оптимального керування імпульсними системами зводиться до задачі оптимального керування для рівнянь з мірами в деякому банаховому просторі, при цьому роль керування відіграють скінченні міри. В результаті задача набирає вигляду

$$dx = Axdx + f(t,x)dt + g(t,x)\nu(dt) + C(t,x)u(dt),$$

$$x(0) = x_0, \quad t \in I,$$

$$J(u) = \int_t l(t,x(t))dt + \psi(x(T)) + \varphi(u) \to \inf,$$

де $u(dt)$ — міра, що є параметром керування.

При досить серйозних обмеженнях, а саме:

1) ліпшицевість і лінійне зростання функцій f, g, C за змінною x;

2) слабка компактність множини допустимих керувань;

3) демінеперервність оператора $L_t(u) = \int_0^t e^{A(t-s)}C(s,x(s))u(ds)$, $t \in I$,

тут доводиться існування оптимальних керувань.

У монографії [4] для імпульсних систем розвиваються варіаційні підходи в комбінації з принципом максимума. В роботах [5 – 7] отримано принцип максимума для систем з нефіксованими моментами імпульсів.

У роботі [8] розглянуто задачу оптимального керування імпульсною системою при нелокальних крайових умовах. За допомогою варіації керування отримано різні необхідні умови оптимальності другого порядку.

Отримані у вказаних вище роботах результати мають характер необхідних умов існування оптимального керування. Винятком є лінійний випадок, для якого з принципу максимума можна отримати достатні умови оптимальності. Тому задача отримання достатніх умов оптимальності для нелінійних імпульсних систем у термінах їхніх правих частин та критерію якості, без застосування принципу максимума, є актуальною. Зазначимо, що дана робота узагальнює результат роботи [9] на випадок нефіксованих моментів імпульсної дії.

2. Постановка задачі та допоміжна лема. Нехай функції $A(x,t)$, $B(x,t)$ є неперервними за сукупністю змінних $t \in [0,T]$, $x \in R^d$, $g(x)$ — неперервна функція по $x \in R^d$. Будемо вважати, що для них виконано умову лінійного зростання по x, тобто існує така стала $K > 0$, що для $t \in [0,T]$ і $x \in R^d$

$$|A(x,t)| \le K(1+|x|), \quad \|B(x,t)\| \le K(1+|x|), \quad |g| \le K(1+|x|), \tag{3}$$

де $|.|$ — евклідова норма вектора, $\|.\|$ — норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

Відносно функцій A^0, B^0 будемо вважати, що вони є неперервними за сукупністю змінних, причому $A^0 \ge 0$, а B^0 опукла по u та

$$B^0(u,t) \ge a|u|^p - c(t) \tag{4}$$

для деяких $a > 0$, $p > 1$, $c(t) \in L_1([0,T])$.

Допустимими для задачі (1), (2) вважаються такі керування $u = u(t)$, що $u(t) \in L_p([0,T])$, $u(t) \in U$, $t \in [0,T]$.

Будемо вважати, що гіперповерхня S є компактом і задається рівнянням $s(x) = 0$, де s — неперервна функція.

Через τ_u^k позначимо моменти попадання розв'язку $x(u,t)$ на гіперповерхню S.

Для встановлення основного результату нам знадобиться така лема.

Лема. *Якщо S — компакт, виконано умови (3) і*

$$\rho(x + g(x), S) > 0 \quad \forall x \in S, \tag{5}$$

а послідовність допустимих керувань $u_n(t)$ задовольняє умову $\int_0^T |u_n(t)|^p dt \leq D$ для деякої сталої D, незалежної від $u_n(t)$, то існує таке $\gamma > 0$, що для довільного $u_n(t)$ із даної послідовності $\tau_{u_n}^k - \tau_{u_n}^{k-1} \geq \gamma$.

Доведення. Для скорочення запису $\tau_{u_n}^k$ позначимо через τ_n^k. Нехай нерівність (5) не виконується. Тоді існує така підпослідовність керувань u_{n_p} із даної сім'ї, що для деяких двох послідовних моментів імпульсної дії відстань між ними прямує до нуля при $p \to \infty$, тобто $\tau_{n_p}^{i_p+1} - \tau_{n_p}^{i_p} \to 0$.

Не втрачаючи загальності можна вважати, що послідовність τ_n має таку властивість.

Із умови (5), внаслідок компактності S, випливає існування $\alpha > 0$ з виконанням нерівності

$$\rho(x + g(x), S) \geq \alpha \quad \forall x \in S.$$

Для кожного $u_n(t)$ існує таке $\tau_\alpha \in (\tau_n^{i_p}, \tau_n^{i_p+1})$, що

$$\left| x_n(\tau_\alpha) - x_n(\tau_n^{i_p} + 0) \right| \geq \frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Дійсно, оскільки

$$\rho(x_n(\tau_n^{i_p} + 0), S) \leq \rho(x_n(\tau_n^{i_p} + 0), x_n(\tau_\alpha)) + \rho(x_n(\tau_\alpha), S),$$

маємо

$$\rho(x_n(\tau_n^{i_p} + 0), x_n(\tau_\alpha)) \geq \rho(x_n(\tau_n^{i_p} + 0), S) - \rho(x_n(\tau_\alpha), S).$$

Зазначимо, що для $t \in (\tau_n^{i_p}, \tau_n^{i_p+1})$ розв'язок $x_n(t)$ не виходить з деякого M-околу гіперповерхні S, а тому існує така стала $C > 0$, що $|x_n(t)| \leq C$ для $t \in \left(\tau_n^{i_p}, \tau_n^{i_p+1}\right)$.

Дійсно, для $t \in (\tau_n^{i_p}, \tau_n^{i_p+1})$ і $q = \dfrac{p}{p-1}$ маємо

$$|x_n(t)|^q = \left| x(\tau_n^{i_p}) + g(x(\tau_n^{i_p})) + \int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t} \left(A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s) u_n(s)\right) ds \right|^q \leq$$

$$\leq 2^{q-1} \left(\left| x(\tau_n^{i_p}) + g(x(\tau_n^{i_p})) \right| + \left| \int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t} (K(1 + |x_n(s)|))^q \, ds \left(\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t} (1 + |u_n(s)|)^p \, ds \right)^{\frac{q}{p}} \right| \right),$$

але

$$\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t}(K(1+|x_n(s)|))^q\,ds\left(\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t}(1+|u_n(s)|)^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}\le$$

$$\le\left((2K)^qT+(2K)^q\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t}|x_n(t)|^q\,ds\right)\left(T+\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t}|u_n(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}\le$$

$$\le\left((2K)^qT+(2K)^q\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{t}|x_n(t)|^q ds\right)\left(T+\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_{0}^{T}c(t)dt\right)\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Врахувавши компактність S, неперервність функції $g(x)$ на S і нерівність Гронуолла – Беллмана, отримаємо потрібну оцінку для $x_n(t)$.

З іншого боку,

$$\frac{\alpha}{2}\le\left|x_n(\tau_\alpha)-x_n(\tau_n^{i_p}+0)\right|=\left|\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{\tau_\alpha}(A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds\right|\le$$

$$\le\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{\tau_\alpha}(K(1+|x_n(s)|)+K(1+|x_n(s)|)u_n(s))ds=$$

$$=\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{\tau_\alpha}K(1+|x_n(s)|)(1+|u_n(s)|)ds=$$

$$=K\left((\tau_\alpha-\tau_n^{i_p})+\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{\tau_\alpha}|x_n(s)|\,ds+\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{\tau_\alpha}|u_n(s)|\,ds+\int\limits_{\tau_n^{i_p}}^{\tau_\alpha}|x_n(s)|\,|u_n(s)|ds\right)\le$$

$$\le K\left(\tau_\alpha-\tau_n^{i_p}\right)+C\left(\tau_\alpha-\tau_n^{i_p}\right)+D^{\frac{1}{p}}\left(\tau_\alpha-\tau_n^{i_p}\right)^{\frac{1}{q}}+CD^{\frac{1}{p}}\left(\tau_\alpha-\tau_n^{i_p}\right)^{\frac{1}{q}}\to 0$$

при $\tau_\alpha-\tau_n^{i_p}\to 0$, що суперечить (6).

Лему доведено.

3. Основний результат.

Теорема. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови (3), (4) постановки задачі та умова (5). Тоді задача оптимального керування (1), (2) має розв'язок у класі допустимих керувань.*

Доведення. Зазначимо, що множина допустимих керувань непорожня. Дійсно, нехай $u = 0$. Тоді система (1) набирає вигляду

$$\dot{x} = A(x,t),$$
$$\Delta x|_{x\in S} = g(x),$$
$$x(0) = x_0.$$

Згідно з лемою, в даній системі немає «биття», а тому неперервність функції $A(x,t)$ і умова (3) гарантують існування розв'язку задачі Коші на $[0,T]$.

Оскільки функціонал $J(u) \geq 0$, то існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$. Нехай u_n — послідовність таких допустимих керувань, що $J(u_n) \to m$, $n \to \infty$. Зауважимо, що при досить великих m виконується нерівність $J(u_n) \leq m+1$.

Звідси та з (4) випливає

$$\int\limits_0^T |u_n(t)|^p dt \leq \frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right).$$

Отже, з $u_n(t)$ можна виділити слабко збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $u_n(t)$ слабко збігається до $u^*(t)$, де $u^*(t) \in L_p([0,T])$. Тоді за лемою Мазура [10] знайдеться така опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} a_i u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U \left(a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} a_i = 1\right)$, що $b_k \to u^*$, $k \to \infty$, за нормою L_p.

Таким чином, існує збіжна майже скрізь на $[0,T]$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l} така, що $b_{k_l} \to u^*$, $l \to \infty$, для майже всіх t. Оскільки U — опукла і замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} a_i u_i(t) \in U$. Тоді із замкненості множини U випливає, що $u^* \in U$ майже для всіх $t \in [0,T]$.

Оцінимо розв'язки $x_n(t)$, що відповідають керуванню $u_n(t)$.

Покажемо рівномірну обмеженість розв'язків $x_n(t)$ при $t \in [0,T]$. Для $q = \dfrac{p}{p-1}$ маємо

$$|x_n(t)|^q = \left|x_0 + \int\limits_0^t (A(x_n(s),s) + B(x_n(s),s)u_n(s))ds + \sum_{0\leq\tau_n^k<t} g(x_n(\tau_n^k))\right|^q \leq$$
$$\leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + \left|\int\limits_0^t (K(1+|x_n(s)|) + K(1+|x_n(s)|)u_n(s))ds\right|^q + \right.$$
$$\left. + \left|\sum_{0\leq\tau_n^k<t} K(1+|x_n(\tau_n^k)|)\right|^q\right). \tag{7}$$

Розглянемо окремо кожний із доданків:

$$\left|\int\limits_0^t (K(1+|x_n(s)|)+K(1+|x_n(s)|)u_n(s))ds\right|^q \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t (K(1+|x_n(s)|))^q ds \left(\int\limits_0^t (1+|u_n(s)|)^p ds\right)^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq \left((2K)^q T + (2K)^q \int\limits_0^t |x_n(s)|^q ds\right)\left(T+\int\limits_0^t |u_n(s)|^p ds\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{8}$$

Позначимо $c_1 = (2K)^q T$. Оскільки

$$\left(T+\int\limits_0^t |u_n(s)|^p \, ds\right)^{\frac{q}{p}} \leq \left(T+\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{q}{p}} = c_2,$$

то, продовжуючи нерівність (8), переконуємось, що інтегральний доданок у (7) оцінюється виразом

$$c_1 + (2K)^q c_2 \int\limits_0^t |x_n(s)|^q ds. \tag{9}$$

Оскільки за лемою число доданків у сумі у виразі (7) не перевищує $\left[\dfrac{T}{\gamma}\right]+1$, то для оцінки сумарного члена в (7) маємо

$$\left|\sum_{0\leq\tau_n^k<t} K(1+|x_n(\tau_n^k)|)\right|^q \leq K^q \sum_{0\leq\tau_n^k<t} 2^q(1+|x_n(\tau_n^k)|^q)\left(\left[\frac{T}{\gamma}\right]+1\right)^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq K^q\left(\left[\frac{T}{\gamma}\right]+1\right)^{\frac{q}{p}}\left(2^{q-1}\left(\left[\frac{T}{\gamma}\right]+1\right)+2^{q-1}\sum_{0\leq\tau_n^k<t}|x_n(\tau_n^k)|^q\right) \leq$$

$$\leq c_3 + c_4 \sum_{0\leq\tau_n^k<t} |x_n(\tau_n^k)|^q, \tag{10}$$

де

$$c_3 = K^q\left(\left[\frac{T}{\gamma}\right]+1\right)^{\frac{2q}{p}} 2^{q-1}, \quad c_4 = K^q\left(\left[\frac{T}{\gamma}\right]+1\right)^{\frac{q}{p}} 2^{q-1}.$$

Із (7) – (10) отримуємо нерівність

$$|x_n(t)|^q \le c_1 + |x_0|^q + (2K)^q c_2 \int_0^t |x_n(s)|^q ds + c_3 + c_4 \sum_{0 \le \tau_n^k < t} \left| x_n\left(\tau_n^k\right)\right|^q =$$

$$= c_5 + c_6 \int_0^t |x_n(s)|^q \, ds + c_4 \sum_{0 \le \tau_n^k < t} |x_n(\tau_n^k)|^q,$$

де

$$c_5 = c_1 + |x_0|^q + c_3, \quad c_6 = (2K)^q c_2.$$

З аналога нерівності Гронуолла – Беллмана [11, с. 30] маємо

$$|x_n(t)|^q \le c_5 e^{c_6 T} \prod_{0 \le \tau_n^k < t} (1 + c_4) = c_5 e^{c_6 T} (1 + c_4)^{\left[\frac{T}{\gamma}\right]+1} = C \quad \text{для} \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Останнє означає, що $x_n(t)$ рівномірно обмежені на $[0, T]$.

Нехай τ_n^1 — момент першого попадання розв’язку $x_n(t)$ на гіперповерхню S. Продовжимо $x_n(t)$ на $[0, T]$ таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in [0, \tau_n^1], \\ x_n(\tau_n^1), & t \in [\tau_n^1, T]. \end{cases} \tag{12}$$

Покажемо рівностепеневу неперервність $y_n(t)$ на $[0, T]$.

Нехай $s_1, s_2 \in [0, \tau_n^1]$, $s_1 < s_2$. Оскільки $|x_n(t)| \le C$, то

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s) u_n(s)) ds \right| \le$$

$$\le K \left((s_2 - s_1) + \int_{s_1}^{s_2} |x_n(s)| \, ds + \int_{s_1}^{s_2} |u_n(s)| \, ds + \int_{s_1}^{s_2} |x_n(s)| \, |u_n(s)| \, ds \right) \le$$

$$\le K(s_2 - s_1) + C(s_2 - s_1) + \left(\frac{1}{a} \left(m + 1 + \int_0^T c(t) dt \right) \right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ C \left(\frac{1}{a} \left(m + 1 + \int_0^T c(t) dt \right) \right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Нехай $s_1 < \tau_n^1 < s_2 < T$, тоді

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n^1)| = \left| \int\limits_{s_1}^{\tau_n^1} (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s))ds \right| \leq$$

$$\leq K(s_2 - s_1) + C(s_2 - s_1) + \left(\frac{1}{a} \left(m + 1 + \int\limits_0^T c(t)dt \right) \right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ C \left(\frac{1}{a} \left(m + 1 + \int\limits_0^T c(t)dt \right) \right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Отже, $y_n(t)$, $t \in [0, T]$, — рівностепенево неперервна функція, тому існує рівномірно збіжна на $[0, T]$ підпослідовність $y_{n_k}(t)$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $y_n(t) \rightrightarrows y^*(t)$, $n \to \infty$, $t \in [0, T]$.

Позначимо $\lim_{n\to\infty} \inf \tau_n^1 = \underline{\tau^1}$. Будемо розглядати проміжок $[0, \underline{\tau^1}]$.

Виберемо з послідовності $\left\{\tau_n^1\right\}_{n\to\infty}$ таку підпослідовність $\left\{\tau_{n_k}^1\right\}_{k\to\infty}$, що $\tau_{n_k}^1 \to \underline{\tau^1}$, $n_k \to \infty$. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $\tau_n^1 \to \underline{\tau^1}$, $n \to \infty$.

Для довільно малого $\epsilon > 0$ розглянемо проміжок $\tau_n^1 \in (\underline{\tau^1} - \epsilon, \underline{\tau^1}]$. Нехай у ньому міститься нескінченна кількість τ_n^1. Тоді з послідовності $\left\{\tau_n^1\right\}_{n\to\infty}$ можна виділити монотонну зростаючу підпослідовність $\left\{\tau_{n_k}^1\right\}_{k\to\infty}$. Вважаємо, що $\tau_{n_k}^1 := \tau_n^1$, $n \to \infty$.

На проміжку $t \in [0, \underline{\tau^1} - \epsilon]$ послідовність $y_n(t) = x_n(t)$ і, отже, послідовність $x_n(t)$ рівномірно збігається до $y^*(t)$. Позначимо $y^*(t) = x_1^*(t)$, $t \in [0, \underline{\tau^1} - \epsilon]$.

Покажемо, що $x_1^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[0, \underline{\tau^1} - \epsilon]$, тобто, що при $t \in [0, \underline{\tau^1} - \epsilon]$ справджується рівність

$$x_1^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t (A(x_1^*(s), s) + B(x_1^*(s), s)u^*(s))ds.$$

Маємо

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s))ds. \tag{13}$$

Перейдемо у (13) до границі при $n \to \infty$:

$$x_1^*(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s))ds.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність з урахуванням лінійного зростання функції $A(x,t)$ і рівномірної обмеженості розв'язків $x_n(t)$ маємо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t A(x_n(s),s)ds = \int\limits_0^t A(x_1^*(s),s)ds.$$

Крім того,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t B(x_1^*(s),s)(u_n(s)-u^*(s))ds = 0,$$

що випливає зі слабкої збіжності u_n до u^*. Використовуючи співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} B(x_n(t),t) = B(x_1^*(t),t),$$

що виконується рівномірно поза деякою множиною δ довільної малої міри, і нерівність $\int_\delta |u_n(s)|ds \le \left(\int_0^t |u_n(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} |\delta|^{\frac{1}{q}}$, неважко бачити, що

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t |B(x_n(s),s)-B(x_1^*(s),s)||u_n(s)|ds = 0,$$

$$\int\limits_0^t B(x_n(s),s)u_n(s)ds \to \int\limits_0^t B(x_1^*(s),s)u^*(s)ds.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t (A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds = \int\limits_0^t (A(x_1^*(s),s)+B(x_1^*(s),s)u^*(s))ds, \tag{14}$$

тобто $x_1^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[0,\underline{\tau^1}-\epsilon]$.

Покажемо, що існує границя функції $x_1^*(\underline{\tau^1}-\epsilon)$ при $\epsilon\to 0$. Дійсно, нехай $\epsilon_1<\epsilon_2$. Тоді

$$|x_1^*(\underline{\tau^1}-\epsilon_1)-x_1^*(\underline{\tau^1}-\epsilon_2)| = \left|\int\limits_{\underline{\tau^1}-\epsilon_2}^{\underline{\tau^1}-\epsilon_1}(A(x_1^*(s),s)+B(x_1^*(s),s)u^*(s))ds\right| \le K(\epsilon_2-\epsilon_1)+$$

$$+C(\epsilon_2-\epsilon_1)+\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(\epsilon_2-\epsilon_1)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+C\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(\epsilon_2-\epsilon_1)^{\frac{1}{q}}\to 0$$

при $\epsilon_2 - \epsilon_1 \to 0$.

Позначимо

$$\lim_{\epsilon \to 0} x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon) = x_1^*(\underline{\tau}^1). \tag{15}$$

Покажемо, що $x_1^*(\underline{\tau}^1) \in S$. Для цього доведемо, що $x_n(\tau_n^1) \to x_1^*(\underline{\tau}^1)$ при $n \to \infty$.

Дійсно, візьмемо довільне $\mu > 0$ і покажемо існування такого натурального N, що при $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n(\tau_n^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1)| < \mu. \tag{16}$$

Тоді

$$|x_n(\tau_n^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1)| \leq |x_n(\tau_n^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon)| + |x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon) - x_1^*(\underline{\tau}^1)|.$$

Для першого доданка в лівій частині останньої нерівності маємо

$$|x_n(\tau_n^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon)| \leq |x_n(\underline{\tau}^1 - \epsilon) - x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon)| + |x_n(\tau_n^1) - x_n(\underline{\tau}^1 - \epsilon)|.$$

Оскільки $\tau_n^1 > \underline{\tau}^1 - \epsilon$, то з (13) випливає, що

$$|x_n(\tau_n^1) - x_n(\underline{\tau}^1 - \epsilon)|^q \leq \epsilon c_5, \tag{17}$$

де c_5 — стала, що не залежить від u і ϵ.

Звідси випливає, що для довільного n існує таке $\epsilon_1 > 0$, що при $\epsilon < \epsilon_1$ виконується нерівність

$$|x_n(\tau_n^1) - x_n(\underline{\tau}^1 - \epsilon)| < \frac{\mu}{3}. \tag{18}$$

Існує також таке натуральне N_1, що для довільного $n > N_1$ виконується нерівність

$$|x_n(\tau_n^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon)| < \frac{\mu}{3} \tag{19}$$

внаслідок рівномірної збіжності x_n до x_1^* на $[0, \underline{\tau}^1 - \epsilon]$ при $\epsilon < \epsilon_1$.

З (15) також випливає існування такого ϵ_2, що при $\epsilon < \epsilon_2$ виконується нерівність

$$|x_1^*(\underline{\tau}^1 - \epsilon) - x_1^*(\underline{\tau}^1)| < \frac{\mu}{3}. \tag{20}$$

З (17)–(20) випливає, що $x_n(\tau_n^1)$ прямує до $x_1^*(\underline{\tau}^1)$ при $n \to \infty$.

Оскільки $s(x_n(\tau_n^1)) = 0$, то з неперервності функції $s(x)$ випливає, що $s(x_1^*(\underline{\tau}^1)) = 0$.

Розглянемо випадок, коли нескінченна кількість τ_n^1 міститься у проміжку $(\underline{\tau}^1, \underline{\tau}^1 + \epsilon)$. З послідовності $\{\tau_n^1\}_{n\to\infty}$ можна виділити монотонну спадну підпослідовність $\{\tau_{n_k}^1\}_{k\to\infty}$. Вважаємо, що $\tau_{n_k}^1 := \tau_n^1$, $n \to \infty$.

На проміжку $t \in [0, \underline{\tau}^1]$ послідовність $y_n(t) = x_n(t)$ і, отже, послідовність $x_n(t)$ рівномірно збігається до $y^*(t)$. Позначимо $y^*(t) = x_1^*(t)$, $t \in [0, \underline{\tau}^1]$.

Аналогічно попередньому випадку, $x_1^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[0, \underline{\tau}^1]$.

Покажемо, що $x_1^*(\underline{\tau}^1) \in S$. Доведемо, що $x_n(\tau_n^1) \to x_1^*(\underline{\tau}^1)$ при $n \to \infty$.

Для цього розглянемо нерівність

$$|x_n(\tau_n^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1)| \leq |x_n(\tau_n^1) - x_n(\underline{\tau}^1)| + |x_n(\underline{\tau}^1) - x_1^*(\underline{\tau}^1)|.$$

Для першого доданка у правій частині останньої нерівності маємо

$$\begin{aligned} \left|x_n(\tau_n^1) - x_n(\underline{\tau}^1)\right| &\leq \left|\int\limits_{\underline{\tau}^1}^{\tau_n^1} (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s))ds\right|^q \leq \\ &\leq \left|\int\limits_{\underline{\tau}^1}^{\tau_n^1} K(1 + |x_n(s)|)(1 + |u_n(s)|)ds\right|^q \leq \\ &\leq \left|\int\limits_{\underline{\tau}^1}^{\tau_n^1} K(1 + C)(1 + |u_n(s)|)ds\right|^q \leq \\ &\leq c_2 \int\limits_{\underline{\tau}^1}^{\tau_n^1} (K(1 + C))^q ds \leq c_5(\tau_n^1 - \underline{\tau}^1) \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Другий доданок також прямує до нуля внаслідок рівномірної збіжності $x_n(t)$ до $x_1^*(t)$, $t \in [0, \underline{\tau}^1]$.

Отже,

$$x_n(\tau_n^1) \to x_1^*(\underline{\tau}^1) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{21}$$

а тому $x_1^*(\underline{\tau}^1)$ належить S.

Нехай τ_n^2 — момент другого попадання розв'язку $x_n(t)$ на гіперповерхню S. Тоді $x_n(t)$ можна продовжити на $[0, T]$ таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(\tau_n^2), \quad t \geq \tau_n^2, \\ x_n(t), \quad t \in [\tau_n^1, \tau_n^2], \\ x_n(\tau_n^1) + g(x_n(\tau_n^1)), \quad t \in [0, \tau_n^1]. \end{cases} \tag{22}$$

Покажемо рівностепеневу неперервність $y_n(t)$, $t \in [0, T]$.

Нехай $s_1, s_2 \in [\tau_n^1, \tau_n^2]$, $s_1 < s_2$. Тоді, як і в попередньому випадку, маємо

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| \leq K(s_2 - s_1) + C(s_2 - s_1) + \\ + \left(\frac{1}{a}\left(m + 1 + \int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} + \end{aligned}$$

$$+C\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(s_2-s_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Нехай $\tau_n^1 < s_1 < \tau_n^2 < s_2 < T$, тоді

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)| = |x_n(s_1)-x_n(\tau_n^2)| = \left|\int\limits_{s_1}^{\tau_n^2}(A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds\right| \leq$$

$$\leq K(s_2-s_1)+C(s_2-s_1)+\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(s_2-s_1)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+C\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(s_2-s_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Нехай $0 < s_1 < \tau_n^1 < s_2 < \tau_n^2$, тоді

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n^1)+g(x_n(\tau_n^1))-x_n(s_2)| =$$

$$= \Bigg|x_n(\tau_n^1)+g(x_n(\tau_n^1))-x_n(\tau_n^1)-g(x_n(\tau_n^1))-$$

$$-\int\limits_{s_1}^{s_2}(A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds\Bigg| \leq$$

$$\leq K(s_2-\tau_n^1)+C(s_2-\tau_n^1)+\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(s_2-\tau_n^1)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+C\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(s_2-\tau_n^1)^{\frac{1}{q}}.$$

Отже, функція $y_n(t)$, $t \in [0,T]$, є рівностепенево неперервною, тому існує рівномірно збіжна на $[0,T]$ підпослідовність. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $y_n(t) \rightrightarrows$ $\rightrightarrows y^*(t)$, $n\to\infty$, $t\in[0,T]$.

Позначимо $\lim_{n\to\infty}\inf\tau_n^2 = \underline{\tau^2}$. Використавши доведену вище лему, покажемо, що $\underline{\tau^2} \geq \underline{\tau^1}+\dfrac{\gamma}{2}$. Для цього розглянемо різницю $\underline{\tau^2}$ і $\underline{\tau^1}$:

$$\underline{\tau^2}-\underline{\tau^1} = |\underline{\tau^2}-\tau_n^2+\tau_n^2-\tau_n^1+\tau_n^1-\underline{\tau^1}| \geq |\tau_n^2-\tau_n^1|-|\underline{\tau^2}-\tau_n^2+\tau_n^1-\underline{\tau^1}|. \tag{23}$$

Далі розглянемо другий доданок: $|\underline{\tau^2} - \tau_n^2 + \tau_n^1 - \underline{\tau^1}| \leq |\underline{\tau^2} - \tau_n^2| + |\tau_n^1 - \underline{\tau^1}| \leq \dfrac{\gamma}{2}$, оскільки для великих n $|\underline{\tau^2} - \tau_n^2| < \dfrac{\gamma}{4}$ та $|\tau_n^1 - \underline{\tau^1}| < \dfrac{\gamma}{4}$.

Повертаючись до нерівності (23), отримуємо

$$\underline{\tau^2} - \underline{\tau^1} \geq |\tau_n^2 - \tau_n^1| - \frac{\gamma}{2} \geq \frac{\gamma}{2}.$$

Отже, $\underline{\tau^2} \geq \underline{\tau^1} + \dfrac{\gamma}{2}$.

Будемо розглядати проміжок $[\underline{\tau^1}, \underline{\tau^2}]$. Зафіксуємо довільне $\epsilon > 0$ і розглянемо випадки проміжків, в яких міститься нескінченна кількість τ_n^1 та τ_n^2:

1) $\tau_n^1 \in (\underline{\tau^1} - \epsilon, \underline{\tau^1}]$, $\tau_n^2 \in (\underline{\tau^2} - \epsilon, \underline{\tau^2}]$,

2) $\tau_n^1 \in (\underline{\tau^1} - \epsilon, \underline{\tau^1}]$, $\tau_n^2 \in [\underline{\tau^2}, \underline{\tau^2} + \epsilon)$,

3) $\tau_n^1 \in [\underline{\tau^1}, \underline{\tau^1} + \epsilon)$, $\tau_n^2 \in (\underline{\tau^2} - \epsilon, \underline{\tau^2}]$,

4) $\tau_n^1 \in [\underline{\tau^1}, \underline{\tau^1} + \epsilon)$, $\tau_n^2 \in [\underline{\tau^2}, \underline{\tau^2} + \epsilon)$.

Оскільки всі випадки доводяться аналогічно, то розглянемо лише випадок $\tau_n^1 \in [\underline{\tau^1}, \underline{\tau^1} + \epsilon)$, $\tau_n^2 \in (\underline{\tau^2} - \epsilon, \underline{\tau^2}]$. Нехай нескінченна кількість τ_n^1 та τ_n^2 міститься у проміжках $\tau_n^1 \in [\underline{\tau^1}, \underline{\tau^1} + \epsilon)$, $\tau_n^2 \in (\underline{\tau^2} - \epsilon, \underline{\tau^2}]$. Як і у попередньому випадку, з послідовностей τ_n^1 та τ_n^2 можемо виділити монотонно спадну $\tau_{n_k}^1$ та монотонно зростаючу $\tau_{n_k}^2$ підпослідовності. Вважаємо, що $\tau_{n_k}^1 := \tau_n^1$, $\tau_{n_k}^2 := \tau_n^2$, $n \to \infty$.

На проміжку $t \in [\underline{\tau^1} + \epsilon, \underline{\tau^2} - \epsilon]$ послідовність $y_n(t) = x_n(t)$ і, отже, послідовність $x_n(t)$ рівномірно збігається до $y^*(t)$. Позначимо $y^*(t) := x_2^*(t)$, $t \in [\underline{\tau^1} + \epsilon, \underline{\tau^2} - \epsilon]$.

Покажемо, що $x_2^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[\underline{\tau^1} + \epsilon, \underline{\tau^2} - \epsilon]$, тобто що при $t \in [\underline{\tau^1} + \epsilon, \underline{\tau^2} - \epsilon]$ справджується рівність

$$x_2^*(t) = x_1^*(\underline{\tau^1}) + g(x_1^*(\underline{\tau^1})) + \int\limits_{\underline{\tau^1}+\epsilon}^{t} (A(x_2^*(s), s) + B(x_2^*(s), s)u^*(s))ds.$$

При $t \in [\underline{\tau^1} + \epsilon, \underline{\tau^2} - \epsilon]$ $x_n(t)$ задовольняє рівняння

$$x_n(t) = x_n(\tau_n^1) + \int\limits_{\tau_n^1}^{t} (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s))ds + g(x_1^*(\underline{\tau^1})), \qquad (24)$$

а на підставі (22) маємо $x_n(\tau_n^1) + g(x_1^*(\underline{\tau^1})) \to x_1^*(\underline{\tau^1}) + g(x_1^*(\underline{\tau^1}))$. Переходячи у (24) до границі при $n \to \infty$, отримуємо

$$x_2^*(t) = x_1^*(\tau_n^1) + g(x_1^*(\underline{\tau^1})) + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\tau_n^1}^{t} (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s))ds.$$

Аналогічно (14) можна показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t (A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds = \int\limits_0^t (A(x_2^*(s),s)+B(x_2^*(s),s)u^*(s))ds.$$

Отже, $x_2^*(t) = x_1^*(\tau_n^1)+g(x_1^*(\underline{\tau^1}))+\int_{\underline{\tau^1}+\epsilon}^t (A(x_2^*(s),s)+B(x_2^*(s),s)u^*(s))ds$, а тому $x_2^*(t)$ на $[\underline{\tau^1}+\epsilon,\underline{\tau^2}-\epsilon]$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Як і у попередньому випадку, неважко переконатися в існуванні границі $\lim_{\epsilon\to 0} x_2^*(\underline{\tau^1}+ +\epsilon)$, яку позначимо $x_2^*(\underline{\tau^1})$.

Зазначимо також, що $\lim_{n\to\infty} x_n(\underline{\tau^1}+\epsilon) = x_2^*(\underline{\tau^1}+\epsilon)$. Доведемо рівність

$$x_2^*(\underline{\tau^1}) = x_1^*(\underline{\tau^1})+g(x_1^*(\underline{\tau^1})).$$

Розглянемо $x_n(\underline{\tau^1}+\epsilon)$:

$$x_n(\underline{\tau^1}+\epsilon) = x_n(\tau_n^1)+g(x_n(\tau_n^1))+\int\limits_{\tau_n^1}^{\underline{\tau^1}+\epsilon} (A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))\,ds. \tag{25}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}(x_n(\tau_n^1)+g(x_n(\tau_n^1))) = x_1^*(\underline{\tau^1})+g(x_1^*(\underline{\tau^1}))$, то, переходячи у рівності (25) до верхньої границі, отримуємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n(\underline{\tau^1}+\epsilon) = \lim_{n\to\infty} x_n(\underline{\tau^1}+\epsilon) = x_1^*(\underline{\tau^1})+g(x_1^*(\underline{\tau^1}))+$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{\tau_n^1}^{\underline{\tau^1}+\epsilon} (A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds$$

або

$$x_2^*(\underline{\tau^1}+\epsilon) = x_1^*(\underline{\tau^1})+g(x_1^*(\underline{\tau^1}))+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{\tau_n^1}^{\underline{\tau^1}+\epsilon} (A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds. \tag{26}$$

Але для кожного n маємо

$$\int\limits_{\tau_n^1}^{\underline{\tau^1}+\epsilon} (A(x_n(s),s)+B(x_n(s),s)u_n(s))ds \le K(\underline{\tau^1}+\epsilon-\tau_n^1)+C(\underline{\tau^1}+\epsilon-\tau_n^1)+$$

$$+\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}} (\underline{\tau^1}+\epsilon-\tau_n^1)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+C\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}(\underline{\tau}^1+\epsilon-\tau_n^1)^{\frac{1}{q}} \leq K\epsilon + C\epsilon +$$

$$+\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}\epsilon^{\frac{1}{q}}+$$

$$+C\left(\frac{1}{a}\left(m+1+\int\limits_0^T c(t)dt\right)\right)^{\frac{1}{p}}\epsilon^{\frac{1}{q}} \to 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \to 0,$$

тому і верхня границя в (26) прямує до нуля при $\epsilon \to 0$. Тоді з (26) отримуємо $x_2^*(\underline{\tau}^1) = x_1^*(\underline{\tau}^1) + g(x_1^*(\underline{\tau}^1))$.

Як і у попередньому випадку, доводиться існування границі $\lim_{\epsilon\to 0} x_2^*(\underline{\tau}^2 - \epsilon) = x_2^*(\underline{\tau}^2)$ та те, що $x_2^*(\underline{\tau}^2) \in S$.

Продовживши дану процедуру, побудуємо функцію

$$x^*(t) = \begin{cases} x_1^*(t), & t \in [0, \underline{\tau}^1], \\ x_2^*(t), & t \in [\underline{\tau}^1, \underline{\tau}^2], \\ \dots & \dots \\ x_n^*(t), & t \in [\underline{\tau}^n, T], \end{cases} \tag{27}$$

яка є розв'язком задачі (1), тобто $x^*(t)$ задовольняє рівняння

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t (A(x^*(s), s) + B(x^*(s), s)u^*(s))ds + \sum_i g(x^*(\underline{\tau}^i)).$$

Покажемо, що $u^*(t)$ — оптимальне керування, тобто $J(u^*) = m$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T (A^0(x_n(t), t) + B^0(u_n(t), t))dt.$$

Оскільки функція $A^0(x,t)$ є неперервною, а $x_n(t)$ — рівномірно обмеженою, то за першою теоремою Вейєрштрасса $A^0(x_n(t), t)$ і $A^0(x^*(t), t)$ — обмежені функції. Тоді за теоремою Лебега про граничний перехід

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T (A^0(x_n(t), t))dt \to \int\limits_0^T (A^0(x^*(t), t))dt.$$

Оскільки $B^0(u,t)$ опукла по u, то внаслідок слабкої напівнеперервності знизу

$$\int\limits_0^T B^0(u_n(t), t)\, dt$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T B^0(u_n(t),t)dt \geq \varliminf_{n\to\infty}\int_0^T B^0(u_n(t),t)dt \geq \int_0^T B^0(u^*(t),t)dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n(t)) \geq J(u^*(t)).$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

Теорему доведено.

Література

1. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление разрывными системами. — Новосибирск: Наука, 1987. — 226 с.
2. *Бенсусан А., Лионс Ж.-А.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
3. *Ahmed N. U.* Optimal control for a general class of impulsive systems on Banach spaces // Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control Maui (Hawaii USA, December 2003). — P. 480 – 485.
4. *Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. — М.: Физматлит, 2000. — 256 с.
5. *Асланян А. А.* Необходимые условия оптимальности в задачах управления системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 9. — С. 58 – 61.
6. *Асланян А. А.* Принцип максимума для разрывных динамических систем // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1982. — Вып. 37. — С. 132 – 137.
7. *Асланян А. А.* Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 11. — С. 3 – 6.
8. *Шарифов Я. В.* Оптимальное управление для систем с импульсным воздействием при нелокальных краевых условиях // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 2. — С. 75 – 84.
9. *Зима Г. С.* Існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика. Механіка. — 2013. — **18**, вип. 2. — С. 20 – 28.
10. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
11. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 400 p.

Одержано 23.11.15,
після доопрацювання — 22.02.16