УДК 517.925

АСИМПТОТИКА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. М. Евтухов, А. Г. Черникова

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: emden@farlep.net
evmod@i.ua
anastacia.chernikova@gmail.com

We find existence conditions and an asymptotic representations, as $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$, for a class of monotone solutions to a second order nonautonomous binomial differential equation with a rapidly varying nonlinearity.

Встановлено умови існування одного класу розв'язків двочленного неавтономного диференціального рівняння другого порядку з швидко змінною нелінійністю, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y) \ne 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{1.2}$$

Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — некоторая односторонняя окрестность Y_0. Не ограничивая общности будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} [y_0, Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } \ Y_0, \\ ]Y_0, y_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } \ Y_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $y_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $|y_0| < 1$ при $Y_0 = 0$ и $y_0 > 1$ $(y_0 < -1)$ при $Y_0 = +\infty$ (при $Y_0 = -\infty$).

При выполнении условий (1.2) асимптотическое поведение решений уравнения (1.1) исследовалось в [1, 2]. В монографии [1] рассматривался случай, когда $\alpha_0 = 1$, $\omega = +\infty$, $Y_0 = 0$ и p — правильно меняющаяся функция при $t \to +\infty$, и были получены асимптотические представления решений уравнения (1.1), стремящихся к нулю при $t \to +\infty$. В [2] для общего случая установлены асимптотические представления одного класса решений уравнения (1.1), который определялся через нелинейность φ. В отличие от [2] более естественным представляется исследовать асимптотические свойства того же класса решений уравнения (1.1), который изучался ранее (см., например, [3]) в случае правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции φ.

Определение 1.1. *Решение y дифференциального уравнения (1.1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:*

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t) y(t)} = \lambda_0.$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1) при $\lambda_0 = 0$, а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Используя условия (1.2), нетрудно показать, что для функции φ выполняются также следующие условия:

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \sim \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty, \tag{2.1}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi^2(y)}{\varphi'(y) \int_Y^y \varphi(x)\,dx} = 1, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left[\int_Y^y \varphi(x)\,dx\right]^2}{\varphi(y) \int_Y^y \left(\int_Y^x \varphi(u)\,du\right) dx} = 1, \tag{2.2}$$

где

$$Y = \begin{cases} y_0, & \text{если} \quad \lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = +\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = 0. \end{cases}$$

Согласно второму из условий (2.1) функция φ и ее производная первого порядка являются (см. [1, с. 91, 92], гл. 3, § 3.4, леммы 3.2, 3.3) быстро меняющимися при $y \to Y_0$.

В силу (2.2) и теоремы 3.10.8 из монографии [4, с. 178] функция φ и ее первая производная принадлежат при $Y_0 = +\infty$ и выполнении условия $\lim_{y \to +\infty} \varphi(y) = +\infty$ классу функций Γ, введенному Л. Ханом (см., например, [4, с. 175]).

Определение 2.1. *Класс Γ состоит из измеримых неубывающих и непрерывных справа функций $f\colon [y_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, для каждой из которых существует измеримая функция $g\colon [y_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, дополняющая для функции f, такая, что*

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{f(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \textit{для любого} \quad u \in \mathbb{R}.$$

С использованием замен переменных класс Γ можно легко расширить до класса $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ функций $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, где Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0, для которых

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty. \end{cases}$$

Определение 2.2. *Будем говорить, что функция* $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ *принадлежит классу функций* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, *если классу* Γ *принадлежат:*

1) при $Y_0 = +\infty$ *и* $Z_0 = 0$ *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f(y)}$;

2) при $Y_0 = -\infty$ *и* $Z_0 = +\infty$ *функция* $f_0(y) = f(-y)$;

3) при $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— правая окрестность нуля, и* $Z_0 = +\infty$ *функция* $f_0(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$;

4) при $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— правая окрестность нуля, и* $Z_0 = 0$ *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}$;

5) при $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— левая окрестность нуля, и* $Z_0 = +\infty$ *функция* $f_0(y) = f\left(-\dfrac{1}{y}\right)$;

6) при $Y_0 = 0$, *когда* Δ_{Y_0} *— левая окрестность нуля, и* $Z_0 = 0$ *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(-\dfrac{1}{y}\right)}$;

7) при $Y_0 = +\infty$ *и* $Z_0 = +\infty$ *функция* $f_0(y) \equiv f(y)$.

Учитывая это определение, а также лемму 3.10.1 и предложение 3.10.2 из [4 с. 175], приходим к выводу, что для функции $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y+ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \text{для любого} \quad u\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

в котором функция g, дополняющая для f, в каждом из случаев 1 – 7 может быть выражена через функцию g_0, дополняющую для f_0, следующим (соответственно) образом:

1) $g(y) = -g_0(y)$, 2) $g(y) = -g_0(-y)$, 3) $g(y) = -y^2 g_0\left(\dfrac{1}{y}\right)$, 4) $g(y) = y^2 g_0\left(\dfrac{1}{y}\right)$,

5) $g(y) = y^2 g_0\left(-\dfrac{1}{y}\right)$, 6) $g(y) = -y^2 g_0\left(-\dfrac{1}{y}\right)$, 7) $g(y) = g_0(y)$,

и справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* f *принадлежит* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* g. *Тогда*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{g(y)}{y} = 0$$

и для любой функции $u\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y+u(y)g(y)] = Z_0,$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f\left(y+u(y)g(y)\right)}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Если f принадлежит $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g и, кроме того, является непрерывной и строго монотонной, то для нее существует непрерывная строго монотонная обратная функция $f^{-1}\colon \Delta_{Z_0} \to \Delta_{Y_0}$, где

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} \text{либо} & [z_0, Z_0[, \\ \text{либо} &]Z_0, z_0], \end{cases} \qquad z_0 = f(y_0), \quad Z_0 = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y).$$

В силу определения 2.2 и теорем 3.1.16, 3.10.4 из монографии [4, с. 139, 176] эта обратная функция имеет следующие свойства.

Лемма 2.2. *Пусть f принадлежит $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g и является непрерывной строго монотонной функцией на промежутке Δ_{Y_0}. Тогда обратная для нее функция $f^{-1}(z)$ является медленно меняющейся при $z \to Z_0$ и удовлетворяет предельному соотношению*

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln\lambda \quad \textit{при любом} \quad \lambda > 0.$$

Более того, для любого $\Lambda > 1$ данное предельное соотношение выполняется равномерно по $\lambda \in \left[\dfrac{1}{\Lambda}, \Lambda\right]$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда функция $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условиям

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y)f''(y)}{f'^2(y)} = 1. \tag{2.4}$$

В этом случае для каждой из указанных в определении 2.1 функций $f_0\colon [x_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, где x_0 — некоторое положительное число, выполняются условия

$$f_0'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0, +\infty[, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_0(x) f_0''(x)}{f_0'^2(x)} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_0^2(x)}{f_0'(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_0(u)\,du} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_0(u)\,du\right]^2}{f_0(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(v)\,dv\right)du} = 1.$$

В силу этих условий, а также следствия 3.10.5(b) из [4, с. 177] справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ *удовлетворяет условиям (2.4), то она и ее первая производная принадлежат классу* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* $g\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, *определяемой однозначно с точностью до эквивалентных при* $y \to Y_0$ *функций, в качестве которой может быть выбрана, например, одна из функций*

$$\frac{\displaystyle\int_Y^y \left(\int_Y^t f(u)\,du\right) dt}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx} \sim \frac{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)} \quad \textit{при} \quad y \to Y_0,$$

где

$$Y = \begin{cases} y_0, & \textit{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = +\infty, \\ Y_0, & \textit{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = 0. \end{cases}$$

Замечание 2.1. Леммы 2.1 – 2.3 относятся к случаю, когда функция $f\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ (т. е. принимает положительные значения). В случае функции $f\colon \Delta_{Y_0} \to]-\infty,0[$ будем говорить, что она принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, если $(-f) \in \Gamma_{Y_0}(-Z_0)$. Тогда нетрудно проверить, что для нее леммы 2.1 – 2.3 также остаются справедливыми.

Кроме лемм 2.1 – 2.3 в дальнейшем потребуется еще одно вспомогательное утверждение об априорных асимптотических свойствах $P_\omega(Y_0,0)$-решений дифференциального уравнения (1.1), которое следует из леммы 2.1 работы [3].

Лемма 2.4. *Для каждого* $P_\omega(Y_0,0)$*-решения* $y\colon [t_0,\omega[\to \mathbb{R}$ *дифференциального уравнения (1.1)*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \tag{2.5}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \textit{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \tag{2.6}$$

и в случае существования конечного или равного $\pm\infty$ *предела* $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$ *этот предел равен* -1, *т. е.*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1.$$

В силу условия (2.5) $P_\omega(Y_0,0)$-решение дифференциального уравнения (1.1) является медленно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$.

3. Основные результаты. Прежде всего введем необходимые для дальнейшего обозначения. Будем считать, что область определения функции φ в уравнении (1.1) определяется формулой (1.3). Далее, положим

$$\mu_0 = \operatorname{sign}\varphi'(y), \quad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases}$$

и введем функцию

$$\Phi(y) = \int\limits_B^y \frac{ds}{\varphi(s)}, \quad \text{где} \quad B = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1), заметим, что числа ν_0, ν_1 и α_0 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения, его первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{3.1}$$

и

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty, \tag{3.2}$$

являются необходимыми для существования таких решений. Более того, согласно лемме 2.4 при $\lambda_0 = 0$ для $P_\omega(Y_0, 0)$-решения в случае существования для него конечного или равного $\pm\infty$ предела $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$ имеем

$$\alpha_0\nu_1\pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{3.3}$$

откуда с учетом (3.2) следует, что для этого решения

$$\lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0 \quad \text{при} \quad \omega = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty \quad \text{при} \quad \omega < +\infty.$$

Теперь отметим некоторые свойства функции Φ. Она сохраняет знак на промежутке Δ_{y_0}, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$ и является возрастающей на Δ_{Y_0}, поскольку на этом промежутке $\Phi'(y) = \dfrac{1}{\varphi(y)} > 0$. Поэтому для нее существует обратная функция $\Phi^{-1}\colon \Delta_{Z_0} \to \Delta_{Y_0}$, где в силу второго из условий (1.2) и монотонного возрастания Φ^{-1}

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases}$$
$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases} \qquad z_0 = \Phi(y_0). \tag{3.4}$$

В силу правила Лопиталя в форме Штольца и последнего из условий (1.2)

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi(y)}{\frac{1}{\varphi'(y)}} = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\frac{1}{\varphi(y)}}{-\frac{\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}} = -\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi'^2(y)}{\varphi''(y)\varphi(y)} = -1.$$

Значит,

$$\Phi(y) \sim -\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{sign}\Phi(y) = -\mu_0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}. \tag{3.5}$$

Из первого из этих соотношений также следует, что

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \frac{\frac{1}{\varphi(y)}}{\Phi(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}, \quad \frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{\Phi'^2(y)} = \frac{-\frac{\varphi'(y)}{\varphi^2(y)}\Phi(y)}{\frac{1}{\varphi^2(y)}} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.6}$$

Поэтому согласно лемме 2.3 Φ принадлежит $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией, в качестве которой может быть выбрана одна из эквивалентных функций

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi''(y)} \sim \frac{\Phi(y)}{\Phi'(y)} \sim -\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.7}$$

Поскольку в силу (3.5)

$$\lim_{z\to Z_0} \frac{z\left(\varphi(\Phi^{-1}(z))\right)'}{\varphi(\Phi(z))} = \lim_{z\to Z_0} \frac{z\varphi'(\Phi^{-1}(z)))\varphi(\Phi^{-1}(z))}{\varphi(\Phi_1^{-1}(z))} = \lim_{y\to Y_0} \Phi(y)\varphi'(y) = -1,$$

то функция $\varphi(\Phi^{-1}(z))$ является правильно меняющейся функцией порядка -1 при $z \to \to Z_0$.

Кроме указанных выше обозначений введем также интегралы

$$J(t) = \int\limits_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, \quad J_\varphi(t) = \int\limits_{A_\varphi}^t p(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(\tau))\right)\,d\tau,$$

где π_ω определяется формулой (2.6),

$$A = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau = \text{const}, \\[2ex] a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau = \pm\infty, \end{cases}$$

$$A_\varphi = \begin{cases} t_\varphi, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{t_\varphi}^\omega p(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(\tau))\right)\,d\tau = +\infty, \\[2ex] \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{t_\varphi}^\omega p(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(\tau))\right)\,d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad t_\varphi \in [a,\omega[,$$

и вспомогательные функции

$$q_1(t) = \frac{J_\varphi(t)}{\pi_\omega(t) J'_\varphi(t)}, \quad q_2(t) = \left. \frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \right|_{y=\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))},$$

$$H(t) = \frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) J_\varphi(t) \varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}.$$

Для уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Для существования $P_\omega(Y_0, 0)$-решений дифференциального уравнения (1.1), для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$, необходимо, чтобы наряду с (3.3) выполнялись условия*

$$\alpha_0 \mu_0 J(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{3.8}$$

$$-\alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} J(t) = Z_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_\varphi(t)}{J_\varphi(t)} = -1. \tag{3.9}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \Phi^{-1}\left(-\alpha_0 J(t)\right) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} o(1) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.10}$$

$$y'(t) = -\alpha_0 \pi_\omega(t) p(t) \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right) [1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.11}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия (3.3), (3.8), (3.9) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} = \gamma, \quad \textit{где} \quad 0 < |\gamma| < +\infty. \tag{3.12}$$

Тогда: 1) если $\gamma > 0$, то уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.10), (3.11); 2) если $\gamma < 0$, то при $\omega < +\infty$ уравнение (1.1) имеет двупараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.10), (3.11), а при $\omega = +\infty$ — по крайней мере одно такое решение.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия (3.3), (3.8), (3.9) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} = 0. \tag{3.13}$$

Тогда: 1) если $\alpha_0 \mu_0 > 0$, то уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, 0)$-решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.10), (3.11); 2) если $\alpha_0 \mu_0 < 0$, то при $\omega < +\infty$ уравнение (1.1) имеет двупараметрическое семейство

$P_\omega(Y_0,0)$- решений, допускающих при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.10), (3.11), а при $\omega=+\infty$ — по крайней мере одно такое решение.

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия (3.3), (3.8), (3.9) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}=\pm\infty. \tag{3.14}$$

Тогда: 1) если $\alpha_0\mu_0>0$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega}[1+q_1(t)]|H(t)|^{\frac12}=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}q_2(t)|H(t)|^{\frac12}=0, \tag{3.15}$$

то дифференциальное уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0,0)$-решений с асимптотическими представлениями

$$y(t)=\Phi^{-1}\left(-\alpha_0J(t)\right)+\frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0J(t))\right)}\,o(1)\quad \textit{при}\quad t\uparrow\omega, \tag{3.16}$$

$$y'(t)=\alpha_0J_\varphi(t)\left[1+o\left(|H(t)|^{-\frac12}\right)\right]\quad \textit{при}\quad t\uparrow\omega; \tag{3.17}$$

2) если $\alpha_0\mu_0<0$ и выполняются условия

$$\lim_{t\uparrow\omega}[1+q_1(t)]|H(t)|^{\frac12}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J'_\varphi(\tau)|H(\tau)|^{\frac12}\,d\tau}{J_\varphi(\tau)}\right)^2=0, \tag{3.18}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}|H(t)|^{-\frac12}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J'_\varphi(\tau)|H(\tau)|^{\frac12}\,d\tau}{J_\varphi(\tau)}=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J'_\varphi(\tau)|H(\tau)|^{\frac12}\,d\tau}{J_\varphi(\tau)}\right)|H(t)|^{\frac12}q_2(t)=0, \tag{3.19}$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a,\omega[$, то уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно $P_\omega(Y_0,0)$-решение, допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y(t)=\Phi^{-1}(-\alpha_0J(t))+\frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0J(t))\right)}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J'_\varphi(\tau)|H(\tau)|^{\frac12}\,d\tau}{J_\varphi(\tau)}\right)^{-1}o(1), \tag{3.20}$$

$$y'(t)=\alpha_0J_\varphi(t)\left[1+|H(t)|^{-\frac12}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J'_\varphi(\tau)|H(\tau)|^{\frac12}\,d\tau}{J_\varphi(\tau)}\right)^{-1}o(1)\right]. \tag{3.21}$$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $y\colon[t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,0)$-решение дифференциального уравнения (1.1), для которого существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$. Тогда данное решение и его производные первого и второго порядков сохраняют знаки на некотором промежутке $[t_1,\omega[\subset[t_0,\omega[$, причем для этих знаков выполняются условия (3.1), (3.2) и имеет место неравенство (3.3). Кроме того, согласно лемме 2.4 для этого решения имеет место асимптотическое соотношение

$$y''(t) = -\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого соотношения из (1.1) следует, что

$$y'(t) = -\alpha_0 \pi_\omega(t) p(t) \varphi(y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

или

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = -\alpha_0 \pi_\omega(t) p(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.22}$$

Интегрируя соотношение (3.22) на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} = -\alpha_0 \int\limits_{t_1}^{t} \pi_\omega(\tau) p(\tau)[1 + o(1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку согласно определению $P_\omega(Y_0, 0)$-решения $y(t) \longrightarrow Y_0$ при $t \uparrow \omega$, то отсюда следует, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_1)}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_1}^{\omega} \pi_\omega(\tau) p(\tau)\, d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. В силу этого факта и правила выбора пределов интегрирования A и B в введенных в начале данного пункта функциях J и Φ установленное выше соотношение можно записать в виде

$$\Phi(y(t)) = -\alpha_0 J(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.23}$$

откуда с учетом свойств (3.4) и (3.5) функции Φ следует выполнение неравенства (3.8) и первого из условий (3.9). Кроме того, из (3.23) находим

$$y(t) = \Phi^{-1}\left(-\alpha_0 J(t)[1 + o(1)]\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.24}$$

Так как выполняется первое из условий (3.9), функция $\Phi^{-1}(z)$ является медленно меняющейся, а $\varphi\left(\Phi^{-1}(z)\right)$ — правильно меняющейся порядка -1 при $z \to Z_0$, то согласно теореме о равномерной сходимости для медленно меняющихся функций (см., например, [1, с. 3])

$$\Phi^{-1}\left(-\alpha_0 J(t)[1 + o(1)]\right) \sim \Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)),$$

$$\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)[1 + o(1)])\right) \sim \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right) \ \text{при} \ t \uparrow \omega.$$

В силу этих асимптотических соотношений и (3.24) из (3.22) и (1.1) следует, что имеют место соответственно представления (3.11) и

$$y''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В результате интегрирования последнего из них на промежутке от t_φ до t, где $t_\varphi \in [t_1, \omega[$ выбрано так, чтобы $-\alpha_0 J(t) \in \Delta_{Z_0}$ при $t \in [t_\varphi, \omega[$, с учетом определения $P_\omega(Y_0, 0)$-решения получаем соотношение вида

$$y'(t) = \alpha_0 J_\varphi(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда и из (3.11) следует, что

$$\frac{\alpha_0 J_\varphi(t)}{-\alpha_0 \pi_\omega(t) p(t) \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} = [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т. е. выполняется второе из условий (3.9).

Справедливость представления (3.10) непосредственно следует из (3.24) и леммы 2.2, если учесть, что Φ принадлежит $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g(y) = -\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$.

Доказательство теорем 3.2 и 3.3. Сначала, учитывая (3.4), (3.5), (3.8) и первое из условий (3.9), подберем число $t_\varphi \in [a, \omega]$ так, чтобы $-\alpha_0 J(t) \in \Delta_{Z_0}$ при $t \in [t_\varphi, \omega[$. При таком выборе t_φ на промежутке $[t_\varphi, \omega[$ определены функция J_φ, введенная перед формулировками теорем, а также функции

$$\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)), \quad \varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right), \quad \varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right),$$

причем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) = Y_0 \tag{3.25}$$

и в силу второго из условий (2.1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} = \pm\infty. \tag{3.26}$$

Теперь, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$y(t) = \Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} y_1(t), \quad y'(t) = \alpha_0 J_\varphi(t)[1+y_2(t)], \tag{3.27}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha_0 \pi_\omega(t) p(t) \varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)\left[1 + q_1(t) - q_2(t) y_1 + q_1(t) y_2\right], \\ y_2' &= \frac{J_\varphi'(t)}{J_\varphi(t)}\left[-1 - y_2 + G(t, y_1)\right], \end{aligned} \tag{3.28}$$

где

$$G(t,y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)))} y_1\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}.$$

Выбрав с учетом (3.4) и условий (3.25), (3.26) число $t_1 \in [t_\varphi, \omega[$ так, чтобы

$$\Phi_1^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} y_1 \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{и} \quad |y_1| \leq \frac{1}{2},$$

рассмотрим данную систему уравнений на множестве

$$[t_1, \omega[\times \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}} = \left\{(y_1, y_2)\colon |y_1| \leq \frac{1}{2}, |y_2| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

На этом множестве правые части системы уравнений (3.28) непрерывны и функция G имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменной y_1.

Разлагая при фиксированном $t \in [t_1, \omega[$ функцию G по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа до членов второго порядка, получаем

$$G(t, y_1) = 1 + y_1 + R(t, y_1), \tag{3.29}$$

где

$$R(t,y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)\varphi''\left(\Phi^{-1}(-\alpha)J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)))}\,\xi_1\right)}{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\, y_1^2, \quad |\xi_1| < |y_1|.$$

В силу первого из условий (3.25), (3.26) и последнего из условий (1.2) следует, что

$$\varphi''\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\,\xi_1\right) =$$

$$= \frac{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)))}\,\xi_1\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)))}{\varphi'(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)))}\,\xi_1\right)}\,[1 + r_1(t, y_1)],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t, y_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Согласно лемме 2.3 функции φ, φ' принадлежат $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g(y) = \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$. Поэтому с учетом (2.3) и (3.25) последнее асимптотическое соотношение может быть записано в виде

$$\varphi''\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\,\xi_1\right) = \frac{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\, e^{\xi}[1 + r(t, y_1)],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} r(t,y_1) = 0 \quad \text{для любого} \quad y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{3.30}$$

Отсюда следует, что

$$R(t,y_1) = e^{\xi}[1 + r(t,y_1)]y_1^2,$$

где $|\xi| < |y_1|$ и r удовлетворяет условию (3.30).

В силу этого представления для любого $\varepsilon > 0$ существуют $t_0 \in [t_1,\omega[$ и $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ такие, что

$$|R(t,y_1)| \le (1+\varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[, \quad |y_1| \le \delta. \tag{3.31}$$

В дальнейшем будем считать, что число $\varepsilon > 0$ выбрано каким-либо образом и для него подобраны соответствующие t_0 и δ.

Учитывая (3.29), систему уравнений (3.28) записываем в виде

$$\begin{aligned} y_1' &= h_1(t)[1 + q_1(t) - q_2(t)y_1 + q_1(t)y_2], \\ y_2' &= h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1)], \end{aligned} \tag{3.32}$$

где

$$h_1(t) = \alpha_0\pi_\omega(t)p(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right), \quad h_2(t) = \frac{J_\varphi'(t)}{J_\varphi(t)},$$

и далее исследуем ее на множестве

$$[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_\delta^2, \quad \text{где} \quad \mathbb{R}_\delta^2 = \{(y_1,y_2)\colon |y_1| \le \delta, |y_2| \le \delta\}.$$

В силу второго из условий (3.9), тождества

$$\frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(t)} = \frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} + 1$$

и последнего из условий (1.2), а также (3.25) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t) = 0. \tag{3.33}$$

Для отношения множителей, которые стоят перед квадратными скобками уравнений данной системы, с использованием асимптотического соотношения из (3.5) и второго из условий (3.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} &= \frac{\alpha_0\pi_\omega(t)J_\varphi(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} \sim \frac{\pi_\omega(t)J_\varphi(t)}{J(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)} \sim \\ &\sim \frac{J'(t)}{J(t)}\,\frac{J_\varphi(t)}{J_\varphi'(t)} \sim -\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Теперь в отдельности рассмотрим случаи, когда выполняются условия (3.12) и (3.13).

Допустим сначала, что выполняется условие (3.12). В этом случае систему (3.32) запишем в виде

$$y_1'(t) = h_2(t)\left[(1+q_1(t))\frac{h_1(t)}{h_2(t)} - q_2(t)\,\frac{h_1(t)}{h_2(t)}\,y_1 + q_1(t)\,\frac{h_1(t)}{h_2(t)}\,y_2\right],$$

$$y_2'(t) = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1)].$$

Здесь в силу условий (3.33), а также асимптотического соотношения (3.34) и условия (3.12)

$$\lim_{t\uparrow\omega}(1+q_1(t))\,\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t)\,\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t)\,\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \gamma.$$

Поэтому данная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= h_2(t)\left[f(t,y_1,y_2) + \gamma y_2\right], \\ y_2'(t) &= h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1)], \end{aligned} \tag{3.35}$$

где функция f такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t,y_1,y_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2_\delta.$$

Характеристическое уравнение постоянной матрицы коэффициентов, стоящих в квадратных скобках системы при y_1 и y_2, имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda - \gamma = 0.$$

Это уравнение при $\gamma > 0$ имеет один положительный корень и один отрицательный, а при $\gamma < 0$ — два корня с отрицательной вещественной частью. Кроме того, с учетом вида функции J_φ и второго из условий (3.9) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} h_2(\tau)d\tau = \ln|J_\varphi(\tau)|\Big|_{t_0}^{t} \to \pm\infty \text{ при } t\uparrow\omega \text{ и } \operatorname{sign} h_2(t) = -\operatorname{sign}\pi_\omega(t) \text{ при } t\in]t_0,\omega[. \tag{3.36}$$

Также в силу (3.31)

$$\lim_{y_1\to 0}\frac{R(t,y_1)}{y_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad t\in[t_0,\omega[. \tag{3.37}$$

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (3.35) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [5]. Согласно этой теореме система уравнений (3.35) имеет по крайней мере одно решение $(y_1,y_2)\colon [t_*,\omega[\to\mathbb{R}^2$, $t_*\in[t_0,\omega[$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$, причем при $\gamma>0$ существует однопараметрическое семейство таких решений, а при $\gamma<0$ и $\omega<+\infty$ — двупараметрическое семейство решений, стремящихся к нулю при $t \uparrow \omega$. Каждому из них в силу замены (3.27) и второго из условий (3.9) соответствует решение $y\colon [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t_* \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее асимптотические представления (3.10), (3.11), причем с использованием условий (3.8), (3.9) легко убедиться в том, что они являются $P_\omega(Y_0, 0)$-решениями.

Таким образом, теорема 3.2 доказана.

Допустим теперь, что выполняется условие (3.13). В этом случае в силу асимптотического соотношения (3.34), второго из условий (3.9), а также неравенства (3.8) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0, \quad \int\limits_{t_0}^{t} h_1(\tau)\,d\tau \sim \int\limits_{t_0}^{t}\frac{J'(\tau)}{J(\tau)} = \ln|J(\tau)|\big|_{t_0}^{t} \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$
$$\operatorname{sign} h_1(t) = \alpha_0\mu_0 \operatorname{sign}\pi_\omega(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[. \tag{3.38}$$

Кроме того,

$$h_1^{-1}(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_2(t)}\right)' = \frac{1}{\alpha_0\pi_\omega(t)p(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\left(\frac{\alpha_0\pi_\omega(t)J_\varphi(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}\right)' =$$
$$= \frac{J_\varphi(t)}{\pi_\omega(t)J'_\varphi(t)} + 1 - \frac{\alpha_0 J'(t)J_\varphi(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(-\alpha_0 J(t))\right)}{J'_\varphi(t)}q_2(t) =$$
$$= \frac{J_\varphi(t)}{\pi_\omega(t)J'_\varphi(t)} + 1 + \frac{J'(t)}{J(t)}\,\frac{J_\varphi(t)}{J'_\varphi(t)}q_2(t)[1+o(1)] \to 0 \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.39}$$

Далее, учитывая условия (3.33), систему уравнений (3.32) записываем в виде

$$y_1' = h_1(t)\left[f(t, y_1, y_2) - y_2\right],$$
$$y_2' = h_2(t)\left[y_1 - y_2 + R(t, y_1)\right], \tag{3.40}$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t, y_1, y_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_\delta.$$

Коэффициент при y_2 во втором уравнении системы (3.32) отличен от нуля (равен -1) и определитель постоянной матрицы коэффициентов, стоящих при y_1 и y_2 в квадратных скобках уравнений данной системы, также отличен от нуля (равен 1). В силу этих свойств, а также условий (3.36) – (3.39) для системы дифференциальных уравнений (3.40) выполнены все условия теоремы 2.6 из работы [5]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (3.40) имеет по крайней мере одно решение $(y_1, y_2)\colon [t_*, \omega[\to \mathbb{R}^2$, $t_* \in [t_0, \omega[$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, причем при $\omega < +\infty$ существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\alpha_0\mu_0 > 0$, и двупараметрическое семейство в случае, когда $\alpha_0\mu_0 < 0$, а при $\omega = +\infty$ однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\alpha_0\mu_0 > 0$. Каждому из них в силу замены переменных (3.27) и условий (3.8), (3.9) соответствует $P_\omega(Y_0, 0)$-решение $y\colon [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$, $t_* \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее асимптотические представления (3.10), (3.11). Следовательно, справедливы все утверждения теоремы 3.3.

Доказательство теоремы 3.4. Сначала таким же образом, как при доказательстве теорем 3.2, 3.3, уравнение (1.1) с помощью преобразования (3.27) сводим к системе дифференциальных уравнений (3.32), заданной на множестве $[t_0, \omega[\times\mathbb{R}^2_\delta$. В этой системе в силу асимптотического соотношения (3.34) и условий (3.14), (3.33)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \pm\infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t) = 0. \tag{3.41}$$

Поэтому она не охватывается результатами из работы [5], которые использовались при доказательстве теорем 3.2 и 3.3. Чтобы привести ее к виду, допускающему использование этих результатов и результатов из работы [6], применим к системе (3.32) дополнительное преобразование

$$y_2(t) = z_1(x), \quad y_2(t) = |H(t)|^{-\frac{1}{2}} z_2(x), \quad x(t) = -\beta\int_{t_0}^{t}\frac{J'_\varphi(\tau)}{J_\varphi(\tau)}\,|H(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau, \tag{3.42}$$

где

$$\beta = \operatorname{sign}\pi_\omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Здесь в силу введенных перед формулировкой теорем обозначений, первого из условий (3.41) и второго из условий (3.5)

$$H(t) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)} \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega \quad \text{и} \quad \operatorname{sign} H(t) = -\alpha_0\mu_0 \quad \text{при} \quad t\in[t_0,\omega[. \tag{3.43}$$

Кроме того, с учетом (3.36) и (3.42) имеем

$$x'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t\in]t_0,\omega[, \quad x(t) \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

В результате преобразования (3.42) получим, с учетом второго из условий (3.43), заданную на множестве $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^2_\delta$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= f_1(x) + b_{11}(x)z_1 + [-\beta\alpha_0\mu_0 + b_{12}(x)]z_2, \\ z_2' &= -\beta z_1 + b_{22}(x)z_2 + Z(x,z_1), \end{aligned} \tag{3.44}$$

где

$$f_1(x(t)) = \beta\alpha_0\mu_0[1+q_1(t)]|H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad b_{11}(x(t)) = -\beta\alpha_0\mu_0 q_2(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}},$$

$$b_{12}(x(t)) = \beta\alpha_0\mu_0[1+q_1(t)], \quad b_{22}(x(t)) = \frac{\beta}{2}|H(t)|^{-\frac{1}{2}}\left[1 - q_1(t) - q_2(t)H(t)\right],$$

$$Z(x(t),z_1) = -\beta R(t,z_1).$$

В случае выполнения условий (3.15), которые заведомо выполнены, и в случае выполнения условий (3.18) и (3.19) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} b_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} b_{12}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} b_{22}(x) = 0.$$

Кроме того, в силу (3.31)

$$\lim_{z_1\to 0} \frac{Z(x,z_1)}{z_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in]0,+\infty[.$$

При этом характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов линейной части системы (3.44) имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha_0\mu_0 = 0.$$

Если $\alpha_0\mu_0 > 0$, то это уравнение имеет вещественные корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$. В этом случае система уравнений (3.44) имеет на основании теоремы 2.2 из работы [5] однопараметрическое семейство решений $(z_1,z_2)\colon [x_*,\omega[\to \mathbb{R}^2$, $x_* \ge 0$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$, каждому из которых в силу замен (3.42) и (3.27) соответствует $P_\omega(Y_0,0)$-решение $y\colon [t_*,\omega[\to \mathbb{R}$ дифференциального уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (3.16), (3.17). Тем самым установлена справедливость первого утверждения теоремы 3.4.

Допустим теперь, что $\alpha_0\mu_0 < 0$ и выполняются условия (3.18), (3.19). В этом случае приведенное выше характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и выполняются условия

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x b_{1j}(x) = 0, \quad j = 1,2, \quad \lim_{x\to+\infty} x b_{22}(x) = 0,$$

а также в силу (3.31)

$$\left| x^2 Z\left(x, \frac{z_1}{x}\right)\right| \le (1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in]0,+\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \le \delta.$$

Поэтому для системы дифференциальных уравнений (3.44) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [6]. Согласно этой теореме система (3.44) имеет хотя бы одно решение $(z_1,z_2)\colon [x_*,\omega[\to \mathbb{R}^2$, $x_* \ge 0$, допускающее асимптотические представления

$$z_i(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad i = 1,2, \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Каждому такому решению в силу замен (3.42) и (3.27) соответствует $P_\omega(Y_0,0)$-решение $y\colon [t_*,\omega[\to \mathbb{R}, t_* \in [t_0,\omega[$, дифференциального уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (3.20), (3.21).

Теорема 3.4 доказана.

4. Выводы. В настоящей работе впервые для уравнения вида (1.1) с быстро меняющейся при $y \to Y_0$, где Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, нелинейностью φ установлены условия существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений в особом случае $\lambda_0 = 0$, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) для таких решений и их производных первого порядка. Ранее для класса $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений достаточно полно был исследован вопрос о их наличии и асимптотике в случае правильно меняющейся при $y \to Y_0$ нелинейности φ.

Литература

1. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. — **1726**. — 128 p.
2. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2007. — **43**, № 9. — С. 1311–1323.
3. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 5. — С. 628–650.
4. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation // Encycl. Math. and Appl. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. — 494 p.
5. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52–80.
6. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 441–452.

Получено 21.02.16