НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 4 • 1999

УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Слюсарчук

Ривнэн. техн. ун-т,
Украина, 266000, Ривнэ, ул. Соборная, 11
e-mail: admi@uswm.rovno.ua

Necessary and sufficient conditions of the existence and uniqueness of bounded solutions of nonlinear differential equation $dx/dt + f(x) = h(t),\ t \in \mathbb{R}$, are obtained. Here $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous operator and $h(t)$ is continuous and bounded function on $\mathbb{R}$.

Отримані необхідні та достатні умови існування і єдиності обмежених розв'язків нелінійного диференціального рівняння $dx/dt + f(x) = h(t),\ t \in \mathbb{R}$. Тут $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервне відображення, $h(t)$ — неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція.

1. c-Непрерывные отображения. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, C^0 — банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{C^0} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\, x(t)\, |$ и C^1 — банахово пространство функций $x = x(t) \in C^0$, для каждой из которых $dx/dt \in C^0$, с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_{C^0} + \|dx/dt\|_{C^0}$.

Последовательность функций $x_k = x_k(t) \in C^0,\ k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к функции $x = x(t) \in C^0$ при $k \to \infty$ и обозначать

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, C^1} x \ \text{ при } k \to \infty,$$

если эта последовательность ограничена и

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\le p} |x_k(t) - x(t)| = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Аналогично последовательность функций $x_k = x_k(t) \in C^1,\ k \in \mathbb{N}$, *локально сходится* к функции $x = x(t) \in C^1$ при $k \to \infty$:

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, C^1} x \ \text{ при } k \to \infty,$$

если $\sup\limits_{k\ge1} \|x_k\|_{C^1} < \infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\le p} \left(|x_k(t) - x(t)| + \left| \frac{dx_k(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right| \right) = 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Отображение $F : X \to Y$, где $X, Y \in \{C^0, C^1\}$, будем называть *c-непрерывным*, если для произвольных элемента $x \in X$ и последовательности $x_k \in X,\ k \in \mathbb{N}$, для которых $x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ X} x$, $Fx_k \xrightarrow{\text{лок.},\ Y} Fx$ при $k \to \infty$.

Заметим, что c-непрерывные отображения введены в рассмотрение Э.Мухамадиевым [1, 2], а детальное их исследование осуществлено в [3 – 11].

Примером c-непрерывного отображения, действующего из C^1 в C^0, является отображение $L : C^1 \to C^0$, определенное равенством

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение и $x = x(t) \in C^1$.

Выясним, когда уравнение

$$(Ly)(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

имеет по крайней мере одно решение $y = y(t) \in C^1$ для каждой функции $h = h(t) \in C^0$ и когда это решение единственное.

При решении этой задачи существенным является использование локально сходящихся последовательностей и c-непрерывных отображений.

Заметим, что аналогичная задача решалась многими авторами в основном для линейных или слабонелинейных отображений L (см., например, [12 – 16]). Определенное выше отображение L в силу произвольности f не принадлежит такому классу отображений и решение сформулированной задачи не является тривиальным.

2. Формулировка основных результатов. Пусть $R(F)$ — множество значений отображения $F : X \longrightarrow Y$, где $X, Y \in \{\mathbb{R}, C^0, C^1\}$, $F^{-1}y$ и $F^{-1}M$ — полные прообразы соответственно элемента $y \in Y$ и множества $M \subset Y$ (при отображении F), $f|_{[\alpha,\beta]}(x)$ — сужение функции $f(x)$ на отрезок $[\alpha, \beta]$ и $C^k(\mathbb{R}, M) \overset{\text{def}}{=} \{x \in C^k : R(x) \subset M\}$ (здесь M — произвольное подмножество множества $\mathbb{R}$ и $k \in \{0, 1\}$).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. $(L^{-1}h) \cap C^1 \neq \emptyset$ *для каждой функции* $h = h(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$, *где* $\mathcal{I}$ *— один из интервалов* $[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$, *тогда и только тогда, когда* $R(f) \supset [a, b]$.

Теорема 2. $R(L) = C^0$ *тогда и только тогда, когда* $R(f) = \mathbb{R}$. *При этом для произвольных отрезка* $[\alpha, \beta]$ *и функции* $h = h(t) \in C^0$, *для которых* $R(f|_{[\alpha,\beta]}) \supset \overline{R(h)}$, *найдется функция* $x = x(t) \in L^{-1}h$ *такая, что* $R(x) \subset [\alpha, \beta]$.

Теорема 3. *Уравнение* (1) *для каждой функции* $h = h(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$, *где* $\mathcal{I}$ *— один из интервалов* $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$, *имеет единственное решение* $y_h = y_h(t) \in C^1(\mathbb{R}, [\alpha, \beta])$ *и*

$$[\alpha, \beta] = \overline{\bigcup_{h \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})} R(y_h)} \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ *является строго монотонной на* $[\alpha, \beta]$ *и* $R(f|_{[\alpha,\beta]}) = [a, b]$.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *отображение* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет непрерывное обратное отображение*;

2) *отображение* $L : C^1 \to C^0$ *имеет обратное непрерывное отображение*;

3) *отображение* $L : C^1 \to C^0$ *имеет обратное непрерывное и с-непрерывное отображение.*

Теорема 5. *Пусть отображение* $L : C^1 \to C^0$ *имеет обратное непрерывное отображение* L^{-1} *и* $|f(x)| \geq k|x|$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и некоторого числа* $k > 0$. *Тогда*

$$\|L^{-1}h\|_{C^0} \leq k^{-1}\|h\|_{C^0} \quad \forall h \in C^0, \tag{3}$$

$$\|L^{-1}h\|_{C^1} \leq (2 + k^{-1})\|h\|_{C^0} \quad \forall h \in C^0 \tag{4}$$

и для каждого с-непрерывного отображения $G : C^0 \to C^0$, *для которого*

$$\lim_{r \to +\infty} \left(kr - \sup_{\|x\|_{C^0} \leq r} \|Gx\|_{C^0} \right) = +\infty, \tag{5}$$

выполняется равенство

$$R(L + G) = C^0. \tag{6}$$

3. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех непрерывных отображений $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для каждого из которых $R(g) = \mathbb{R}$ і $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |g(x)| = +\infty$.

Лемма 1. *Пусть* $g \in \mathcal{F}$. *Тогда для каждого числа* $H > 0$ *найдутся числа* $k \neq 0$ *и* $a > 0$ *такие, что*

$$|g(x) - kx| \leq |k|a - H \quad \forall\, x \in [-a, a].$$

Доказательство. Пусть b — такое положительное число, что $\min\limits_{|x| \geq b} |g(x)| \geq H$, и пусть $M = \max\limits_{|x| \leq b} |g(x)|$. Возьмем произвольные числа $k \neq 0$ и $a > b$, для которых

$$|k|b \geq H, \tag{7}$$

$$M + |k|b \leq |k|a - H, \tag{8}$$

$$kxg(x) > 0, \text{ если } |x| > b, \tag{9}$$

и

$$|g(x)| \leq |k|a, \text{ если } b < |x| \leq a.$$

Тогда

$$|g(x) - kx| = ||g(x)| - |kx|| \leq |k|a - H,$$

если $b < |x| \leq a$ (здесь учтены соотношения (7) и (9)). Если $|x| \leq b$, то согласно (8)

$$|g(x) - kx| \leq |g(x)| + |kx| \leq M + |k|b \leq |k|a - H,$$

и лемма 1 доказана.

Обозначим через $\mathcal{P}_T$, где T — произвольное положительное число, подпространство пространства C^0, элементами которого являются T-периодические функции.

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathcal{F}$. *Тогда* $(L^{-1}h) \cap \mathcal{P}_T \neq \emptyset$ *для всех* $h \in \mathcal{P}_T$ *и* $T > 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные число $T > 0$ и функцию $h \in h(t) \in \mathcal{P}_T$. Согласно лемме 1, найдутся числа $k \neq 0$ и $a > 0$ такие, что

$$|f(x) - kx| \leq |k|a - \|h\|_{C^0}, \text{ если } |x| \leq a. \tag{10}$$

Рассмотрим вполне непрерывное отображение $G : \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_T$, определенное равенством

$$(Gx)(t) = -\frac{k}{|k|} \int\limits_{\{s:kt<ks\}} e^{k(t-s)}(-f(x(s)) + kx(s) + h(s))ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться в том, что задача о существовании T-периодических решений уравнения (1) равносильна аналогичной задаче для уравнения

$$x(t) = (Gx)(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

и на основании (10) имеет место соотношение

$$GS_a \subset S_a,$$

где $S_a = \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\|_{C^0} \leq a\}$. Поэтому, согласно теореме Шаудера о неподвижной точке [17, с. 36], множество T-периодических решений уравнения (11), а следовательно, и уравнения (1) является непустым.

Лемма 2 доказана.

Пусть $S_r^0 = \{x \in C^0 : \|x\|_{C^0} \leq r\}$ и $S_r^1 = \{x \in C^1 : \|x\|_{C^1} \leq r\}$ $(r > 0)$.

Лемма 3. *Для каждой последовательности функций* $x_n = x_n(t) \in S_r^0 \cap S_R^1$, $n \in \mathbb{N}$, *где* r *и* R *— произвольные положительные числа, найдутся такие строго возрастающая последовательность натуральных чисел* n_k, $k \in \mathbb{N}$, *и функция* $x = x(t) \in S_r^0$, *что*

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Из ограничений на множество $\{x_n \in C^1 : n \in \mathbb{N}\}$ вытекает, что функции $x_n = x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $\mathbb{R}$. Поэтому на основании теоремы Арцела [18, с. 105] найдутся такие подпоследовательности

$$x_{n_{1,1}}, x_{n_{1,2}}, \ldots, x_{n_{1,p}}, \ldots,$$

$$x_{n_{2,1}}, x_{n_{2,2}}, \ldots, x_{n_{2,p}}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n_{m,1}}, x_{n_{m,2}}, \ldots, x_{n_{m,p}}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

последовательности $x_n,\ n \in \mathbb{N}$, что: 1) последовательности чисел $n_{l,p},\ p \in \mathbb{N}$, являются строго возрастающими для каждого $l \in \mathbb{N}$ и

$$\{n_{1,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{n_{2,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots \supset \{n_{m,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots;$$

2) для каждого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $x_{n_{m,p}}(t), p \in \mathbb{N}$, является равномерно сходящейся на $[-m, m]$. Тогда диагональная последовательность

$$x_{n_{1,1}}, x_{n_{2,2}}, \ldots, x_{n_{p,p}}, \ldots$$

будет равномерно сходящейся на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и поэтому функция

$$x(t) = \lim_{p\to\infty} x_{n_{p,p}}(t),\ t \in \mathbb{R},$$

будет непрерывной и, очевидно, $R(x) \subset [-r, r]$. Отсюда следует, что

$$x_{n_{p,p}} \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0} x \text{ при } p \to \infty.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *непрерывное отображение*, $h(t) \in C^0$ *и* $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$ — *такие отрезки, что* $R(f|_{[\alpha,\beta]}) = [a, b]$, $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{a, b\}$ *и* $R(h) \subset [a, b]$. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение* $y(t) \in C^1$, *для которого* $R(y) \subset [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f^* \in \mathcal{F}$, для которого $f^*|_{[\alpha,\beta]} = f|_{[\alpha,\beta]}$ и

$$f^*(x) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta], \tag{12}$$

и последовательность периодических функций $h_n = h_n(t) \in C^0$, для которых

$$R(h_n) \subset [a, b],\ n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

и

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0} h \text{ при } n \to \infty. \tag{14}$$

Согласно лемме 2, уравнение

$$\frac{dy}{dt} + f^*(y) = h_n(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

имеет периодическое решение $y_n(t)$, которое в некоторых точках t_1 и t_2 принимает наименьшее $y_{n,\min}$ и наибольшее $y_{n,\max}$ значения. В этих точках $\dfrac{dy_n}{dt} = 0$. Поэтому $\{f^*(y_{n,\min}), f^*(y_{n,\max})\} = \{h_n(t_1), h_n(t_2)\}$ и на основании (12) $\{y_{n,\min}, y_{n,\max}\} \subset [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$R(y_n) \subset [\alpha, \beta]\ , n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Поскольку $f^*(x) = f(x)$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то решение $y_n = y_n(t)$ уравнения (15) также является решением уравнения (1) при $h(t) = h_n(t)$, т. е.

$$\frac{dy_n(t)}{dt} + f(y_n(t)) = h_n(t),\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Отсюда, из включений (13), (16) и из непрерывности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_{C^1} < \infty.$$

Поэтому на основании леммы 3 можно считать, не ограничивая общности, что для некоторой функции $y = y(t) \in C^0$

$$y_n \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0} y \text{ при } n \to \infty \tag{18}$$

(из (16) следует, что $R(y) \subset [\alpha, \beta]$). Поскольку согласно (17)

$$y_n(t) - y_n(0) + \int_0^t f(y_n(\tau))d\tau = \int\limits_0^t h_n(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

то на основании (14), (18) и непрерывности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$

$$y(t) - y(0) + \int_0^t f(y(\tau))d\tau = \int\limits_0^t h(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R},$$

и, следовательно, $y = y(t) \in C^1$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $g(x)$ — непрерывная и строго возрастающая на $[a, b]$ функция. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, b - a)$ найдется $k > 0$ такое, что*

$$g(u) - g(v) \geq k(u - v)$$

для всех $u, v \in [a, b]$, для которых $u - v \geq \varepsilon$.

Доказательство. Пусть утверждение леммы ложно. Тогда найдутся последовательности чисел $u_n, v_n \in [a, b]$, для которых $u_n - v_n \geq \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}$, и

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(u_n) - g(v_n)}{u_n - v_n} = 0.$$

Поэтому, согласно непрерывности функции $g(x)$ на $[a, b]$, найдутся числа $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что $\beta - \alpha \geq \varepsilon$ и $g(\beta) = g(\alpha)$. Последнее равенство противоречит условиям леммы. Итак, предположение о ложности утверждения леммы ошибочно.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $g(x)$ — непрерывная и строго убывающая на $[a, b]$ функция. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, b-a)$ найдется $k < 0$ такое, что*

$$g(u) - g(v) \leq k(u - v)$$

для всех $u, v \in [a, b]$, для которых $u - v \geq \varepsilon$.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 5.

Лемма 7. *Пусть отображение $\mathcal{A} : C^0 \to C^0$ является c-непрерывным и для некоторых чисел $r > 0$ и $R > 0, r \leq R$ выполняются включения $\mathcal{A}S_r^0 \subset S_r^0$ и $\mathcal{A}S_r^0 \subset S_R^1$. Тогда отображение $\mathcal{A}$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку $x^* \in S_r^0 \cap S_R^1$.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| \leq n; \\ \cos^2(|t| - n), & \text{если } n < |t| \leq n + \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| > n + \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

и отображения $\mathcal{A}_n : C^0 \to C^0$, определенные равенствами

$$(\mathcal{A}_n x)(t) = \delta_n(t)(\mathcal{A}x)(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Из условий леммы и того, что $\|\delta_n\|_{C^0} = 1$ и $\left\|\dfrac{d\delta_n}{dt}\right\|_{C^0} = 1$, следуют включения

$$\mathcal{A}_n S_r^0 \subset S_r^0 \text{ и } \mathcal{A}_n S_r^0 \subset S_{R+r}^1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Поэтому отображения $\mathcal{A}_n : S_r^0 \to S_r^0,\ n \geq 1$, вполне непрерывны (согласно теореме Арцела) и на основании теоремы Шаудера о неподвижной точке найдется множество $\{x_n^* \in S_r^0 \cap S_{R+r}^1 : n \in \mathbb{N}\}$ такое, что

$$\mathcal{A}_n x_n^* = x_n^* \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Тогда, согласно лемме 3,

$$x_{n_k}^* \xrightarrow{\text{лок., } C^0} x^* \text{ при } k \to \infty \tag{22}$$

для некоторой строго возрастающей последовательности $n_k,\ k \in \mathbb{N}$, и функции $x^* = x^*(t) \in C^0$, а согласно (19) и (21)

$$\mathcal{A}x^* - x^* = (\mathcal{A}x^* - \delta_{n_k}\mathcal{A}x^*) + (\delta_{n_k}\mathcal{A}x^* - \delta_{n_k}\mathcal{A}x_{n_k}^*) +$$

$$+ (\delta_{n_k}\mathcal{A}x_{n_k}^* - x_{n_k}^*) + (x_{n_k}^* - x^*) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$\mathcal{A}x^* - \delta_{n_k}\mathcal{A}x^* \xrightarrow{\text{лок., } C^0} 0 \text{ при } k \to \infty,$$

$$x^*_{n_k} - x^* \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0} 0 \text{ при } k \to \infty,$$

$$\delta_{n_k}\mathcal{A}x^* - \delta_{n_k}\mathcal{A}x^*_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0} 0 \text{ при } k \to \infty$$

и

$$\delta_{n_k}\mathcal{A}x^*_{n_k} - x^*_{n_k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(здесь использована c-непрерывность отображения $\mathcal{A}$), то $\mathcal{A}x^* - x^* = 0$, т. е. x^* — неподвижная точка отображения $\mathcal{A}$. Эта точка находится в шаре S^0_r на основании (20) и (22), а следовательно, и во множестве $S^0_r \cap S^1_R$ (в силу включения $\mathcal{A}S^0_r \subset S^1_R$).

Лемма 7 доказана.

Заметим, что утверждения, близкие к лемме 7, применялись в [8, 19, 20] для исследования ограниченных решений функционально-дифференциальных, дискретных и дифференциальных (с импульсным воздействием) уравнений.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $R(f) \supset [a, b]$ и $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$. В силу непрерывности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ найдется отрезок $[\alpha, \beta]$, для которого

$$R(f|_{[\alpha,\beta]}) \supset [a, b].$$

Тогда на основании леммы 4 $\{x \in (L^{-1}h) \cap C^1 : R(x) \subset [\alpha, \beta]\} \neq \emptyset$.

Итак, выполнение соотношения $R(f) \supset [a, b]$ обеспечивает выполнение соотношения $(L^{-1}h) \cap C^1 \neq \emptyset$ для всех $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$.

Пусть соотношение $R(f) \supset [a, b]$ не выполняется. Тогда $[a, b] \setminus R(f) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольные число $\gamma \in [a, b] \setminus R(f)$ и функцию $h = h(t) \in C^0$ такие, чтобы $R(h) \subset (a, b)$ и

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \gamma.$$

Предположим, что уравнение (1) из рассмотренной правой частью $h(t)$ имеет в пространстве C^1 решение $y = y(t)$. Пусть $[\rho, \nu] \stackrel{\text{def}}{=} R(f|_{\overline{R(y)}})$. Поскольку $[\rho, \nu] \subset R(f)$, то

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{dy(t)}{dt} = \varliminf_{t \to +\infty} (-f(y(t)) + h(t)) \geq -\nu + \gamma > 0, \tag{23}$$

если $\gamma > f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{dy(t)}{dt} = \varlimsup_{t \to +\infty} (-f(y(t)) + h(t)) \leq -\rho + \gamma < 0, \tag{24}$$

если $\gamma < f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Каждое из соотношений (23) и (24) противоречит ограниченности функции $y = y(t)$ на $\mathbb{R}$, т. е. предположение о том, что уравнение (1) имеет решение, принадлежащее пространству C^1, ложно.

Итак, если соотношение $R(f) \supset [a, b]$ не выполняется, то не для каждой функции $h = h(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$ уравнение (1) имеет решение $y = y(t) \in C^1$.

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть $R(f) = \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную функцию $h = h(t) \in C^0$. Поскольку $\overline{R(h)} \subset R(f)$, то согласно теореме 1 $(L^{-1}h) \cap C^1 \neq \emptyset$. Итак, в силу произвольности $h \in C^0$ справедливо равенство $R(L) = C^0$.

Пусть $R(f) \neq \mathbb{R}$. Тогда $\overline{R(f)} \neq \mathbb{R}$, так как отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) + m,\ t \in \mathbb{R},$$

где $m \in \mathbb{R} \setminus \overline{R(f)}$. Каждое решение $x = x(t)$ этого уравнения является неограниченным, поскольку

$$\left|\frac{dx(t)}{dt}\right| \geq \inf_{y \in R(f)} |m - y| > 0$$

для всех точек t области определения решения. Отсюда вытекает, что существование ограниченных решений уравнения (1) с произвольной функцией $h = h(t) \in C^0$, т. е. выполнение равенства $R(L) = C^0$, гарантирует выполнение равенства $R(f) = \mathbb{R}$.

Вторая часть утверждения теоремы является следствием леммы 4.

Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3. Докажем сначала часть „только тогда". Пусть уравнение (1) для каждой функции $h = h(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$ имеет единственное решение $y_h = y_h(t) \in C^1(\mathbb{R}, [\alpha, \beta])$ и выполняется соотношение (2). Тогда для каждого числа $c \in \in \mathcal{I}$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} + f(y) = c$$

имеет единственное решение y_c, которое является постоянным, и, следовательно, уравнение

$$f(y) = c \tag{25}$$

имеет единственное решение $y = y_c$ для каждого $c \in \mathcal{I}$. Поэтому отображение $f : \mathcal{M} \longrightarrow \longrightarrow \mathcal{I}$, где $\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \{y_c : c \in (a, b)\}$, имеет обратное отображение $f^{-1} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{M}$. Рассмотрим произвольные числа $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$. Пусть $m_1 < m_2$. Функция $f(x)$ непрерывна на $[m_1, m_2]$ и $\{f(m_1), f(m_2)\} \subset \mathcal{I}$. Покажем, что

$$f(x) \in [A, B] \quad \forall x \in [m_1, m_2], \tag{26}$$

где $A = \min\{f(m_1), f(m_2)\}$ и $B = \max\{f(m_1), f(m_2)\}$.

Предположим, что соотношение (26) не выполняется, т. е. $f(x_0) \notin [A, B]$ для некоторого числа $x_0 \in (m_1, m_2)$. Согласно теореме Больцано – Коши о промежуточном значении [21, с. 171], найдется такое число $x_1 \in (m_1, m_2)$, что $f(x_1) \in \{f(m_1), f(m_2)\}$. Это включение противоречит тому, что уравнение (25) имеет единственное решение для каждого $c \in \mathcal{I}$ (при $c = f(x_1)$ уравнение (25) имеет по крайней мере два решения). Следовательно, соотношение (26) выполняется. Поэтому $[m_1, m_2] \subset \mathcal{M}$. Отсюда и из произвольности чисел $m_1, m_2 \in \mathcal{I}$ следует связность множества $\mathcal{M}$. Тогда функция $f(x)$, если учесть, что отображение $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{I}$ имеет обратное отображение, является строго монотонной на множестве $\mathcal{M}$, а следовательно, и на замыкании $\overline{\mathcal{M}}$ этого множества. В силу непрерывности отображения f выполняется равенство

$$R(f|_{\overline{\mathcal{M}}}) = \overline{\mathcal{I}}.$$

Отсюда и из соотношения (2) на основании леммы 4 получаем $\overline{\mathcal{M}} = [\alpha, \beta]$.

Таким образом, часть „только тогда” доказана.

Докажем теперь часть „тогда". Пусть функция $f(x)$ является строго монотонной на $[\alpha, \beta]$ и $R(f|_{[\alpha,\beta]}) = [a, b]$. Зафиксируем произвольную функцию $h = h(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$. Согласно лемме 4, уравнение (1) имеет решение $y = y(t) \in C^1(\mathbb{R}, [\alpha, \beta])$. Покажем единственность этого решения. Предположим противное. Пусть $y_1 = y_1(t)$ и $y_2 = y_2(t)$ — решения рассматриваемого уравнения,

$$R(y_k) \subset [\alpha, \beta], \ k \in \{1, 2\}, \tag{27}$$

и

$$y_1(\tau) < y_2(\tau)$$

для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Очевидно, что

$$\frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt} = f(y_2(t)) - f(y_1(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Отсюда и из непрерывности функции $f(y_2(t)) - f(y_1(t))$ на $\mathbb{R}$ следует, что или

$$\frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt} > 0 \quad \forall t \geq \tau$$

и, следовательно,

$$y_2(t) - y_1(t) \geq \nu \quad \forall t \geq \tau, \tag{29}$$

если функция $f(x)$ является строго возрастающей на $[\alpha, \beta]$, или

$$\frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt} < 0 \quad \forall t \leq \tau$$

и, следовательно,

$$y_2(t) - y_1(t) \geq \nu \quad \forall t \leq \tau, \tag{30}$$

если функция $f(x)$ является строго убывающей на $[\alpha, \beta]$. В первом случае на основании соотношений (27) — (29) и леммы 5

$$\frac{(y_2(t) - y_1(t))}{dt} \geq k(y_2(t) - y_1(t)) \quad \forall t \geq \tau \tag{31}$$

(здесь k — некоторое положительное число). Во втором случае на основании соотношений (27), (28), (30) и леммы 6

$$\frac{(y_2(t) - y_1(t))}{dt} \leq k(y_2(t) - y_1(t)) \quad \forall t \leq \tau \tag{32}$$

(здесь k — некоторое отрицательное число). Каждое из соотношений (31) и (32) противоречит соотношению (27).

Итак, предположение о неединственности решений уравнения (1) с правой частью из множества $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$ ложно.

Следовательно, для каждой функции $h = h(t) \in {}^0(\mathbb{R}, \mathcal{I})$ уравнение (1) имеет единственное решение $y_h = y_h(t) \in C^1(\mathbb{R}, [\alpha, \beta])$. Отсюда, из равенства $R(f|_{[\alpha,\beta]})$ и строгой монотонности функции $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$ получаем соотношение (25).

Таким образом, часть „тогда"также доказана.

Теорема 3 доказана.

7. Доказательство теоремы 4. Докажем импликацию $1) \Rightarrow 2)$. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет непрерывное обратное отображение. Тогда функция $f(x)$ будет строго монотонной на $\mathbb{R}$ и $R(f) = \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольные функции $h = h(t) \in C^0$ и $h_n = h_n(t) \in C^0,\ n \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{n\to+\infty} ||h - h_n||_{C^0} = 0. \tag{33}$$

Согласно теореме 2 найдутся функции $x = x(t) \in C^1$ и $x_n = x_n(t) \in C^1,\ n \in \mathbb{N}$, которые будут решениями соответственно уравнений

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

и

$$\frac{dx_n}{dt} + f(x_n) = h_n(t),\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Также найдется отрезок $[a, b]$, для которого

$$R(x) \bigcup \left(\bigcup_{n\geq 1} R(x_n) \right) \subset [a, b]. \tag{36}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} ||x - x_n||_{C^1} = 0. \tag{37}$$

Отсюда будет вытекать, что уравнение (34) имеет в пространстве C^1 единственное решение для каждой функции $h = h(t) \in C^0$, т. е. отображение $L : C^1 \to C^0$ обратимо, и отображение $L^{-1} : C^0 \to C^1$непрерывно.

Предположим, что соотношение (37) не выполняется, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} ||x - x_n||_{C^1} > 0.$$

Из соотношений (33) — (35) и равномерной непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$ вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} ||x - x_n||_{C^0} > 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что для некоторого числа $\mu \in (0, b - a)$ выполняется неравенство

$$||x - x_n||_{C^0} \geq \mu,\ n \geq 1. \tag{38}$$

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ является строго убывающей на $\mathbb{R}$. На основании леммы 4 найдется число $k > 0$ такое, что

$$-f(\alpha) + f(\beta) \geq k(\alpha - \beta) \tag{39}$$

для всех $\alpha, \beta \in [a, b]$, для которых $\alpha - \beta \geq \mu/2$. Возьмем такое число $\delta > 0$, чтобы

$$k\mu - 2\delta > 0. \tag{40}$$

Из (33) и (38) вытекает, что найдутся числа $n_1 \in \mathbb{N}$ и $t_1 \in \mathbb{R}$, для которых

$$||h - h_{n_1}||_{C^0} \leq \delta \tag{41}$$

и

$$|x(t_1) - x_{n_1}(t_1)| \geq \frac{\mu}{2}.$$

Не ограничивая общности, можна считать, что

$$x(t_1) - x_{n_1}(t_1) \geq \frac{\mu}{2}. \tag{42}$$

Используем соотношение

$$\frac{d(x(t) - x_{n_1}(t))}{dt} = -f(x(t)) + f(x_{n_1}(t)) + h(t) - h_{n_1}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

которое вытекает из (34) и (35). Из этого соотношения с учетом (39)—(41) и (42) получаем

$$\frac{d(x(t_1) - x_{n_1}(t_1))}{dt} > 0. \tag{44}$$

Рассмотрим произвольный интервал $[t_1, T)$, для которого

$$\frac{d(x(t) - x_{n_1}(t))}{dt} > 0 \quad \forall t \in [t_1, T) \tag{45}$$

(множество таких интервалов непустое, поскольку функция $-f(x(t)) + f(x_{n_1}(t)) + h(t) - -h_{n_1}(t)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ и выполняются соотношения (43) и (44)). Тогда на основании (45) функция $x(t) - x_{n_1}(t)$ является строго возрастающей на интервале $[t_1, T)$. Поэтому на основании непрерывности функции $x(t) - x_{n_1}(t)$ в точке T выполняется неравенство

$$x(T) - x_{n_1}(T) > \frac{\mu}{2}.$$

А поскольку на основании (36) $\{x(T), x_{n_1}(T)\} \subset [a, b]$, то согласно (39), (40) и (41)

$$-f(x(T)) + f(x_{n_1}(T)) + h(T) - h_{n_1}(T) > \frac{k\mu}{2} - \delta > 0.$$

Отсюда вытекает, что на интервале $[t_1, +\infty)$ не найдется точки τ, в которой

$$\left.\frac{d(x(t) - x_{n_1}(t))}{dt}\right|_{t=\tau} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{d(x(t) - x_{n_1}(t))}{dt} > 0 \quad \forall t \geq t_1.$$

Следовательно,

$$x(t) - x_{n_1}(t) \geq \frac{\mu}{2} \quad \forall t \geq t_1.$$

Тогда на основании (39) — (41) и (43)

$$\frac{d(x(t) - x_{n_1}(t))}{dt} \geq \frac{k\mu}{2} - \delta > 0 \quad \forall t \geq t_1.$$

Это соотношение, очевидно, противоречит соотношению (36).

Таким образом, предположение о том, что не выполняется соотношение (37), является ложным в случае, когда функция $f(t)$ является строго убывающей на $\mathbb{R}$.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}$. На основании леммы 6 найдется число $k < 0$ такое, что

$$-f(\alpha) + f(\beta) \leq k(\alpha - \beta) \tag{46}$$

для всех $\alpha, \beta \in [a, b]$, для которых $\alpha - \beta \geq \mu/2$. Возьмем такое число $\gamma > 0$, чтобы

$$k\mu + 2\gamma < 0. \tag{47}$$

Из (33) вытекает, что найдется $n_2 \in \mathbb{N}$, для которого

$$||h - h_{n_2}||_{C^0} \leq \gamma. \tag{48}$$

Тогда согласно (38) для некоторого $t_2 \in \mathbb{R}$

$$|x(t_2) - x_{n_2}(t_2)| \geq \frac{\mu}{2}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$x(t_2) - x_{n_2}(t_2) \geq \frac{\mu}{2}. \tag{49}$$

Из соотношения

$$\frac{d(x(t) - x_{n_2}(t))}{dt} = -f(x(t)) + f(x_{n_2}(t)) + h(t) - h_{n_2}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{50}$$

которое получается из (34) и (35), и соотношений (46) — (49) вытекает

$$\frac{d(x(t_2) - x_{n_2}(t_2))}{dt} < 0. \tag{51}$$

Рассмотрим произвольный интервал $(T, t_2]$, для которого

$$\frac{d(x(t) - x_{n_2}(t))}{dt} < 0 \quad \forall t \in (T, t_2] \tag{52}$$

(множество таких интервалов является непустым, поскольку функция $-f(x(t)) + $ $+ f(x_{n_2}(t)) + h(t) - h_{n_2}(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и выполняются соотношения (50) и (51)). Поэтому на основании (52) функция $x(t) - x_{n_2}(t)$ является строго убывающей на $(T, t_2]$. Следовательно, для непрерывной функции $x(t) - x_{n_2}(t)$ в точке T выполняется неравенство

$$x(T) - x_{n_2}(T) > \frac{\mu}{2}.$$

А поскольку на основании (36) $\{x(T), x_{n_2}(T)\} \subset [a,b]$, то согласно (46), (47) и (23)

$$-f(x(T)) + f(x_{n_2}(T)) + h(T) - h_{n_2}(T) < \frac{k\mu}{2} + \gamma < 0.$$

Отсюда вытекает, что на интервале $(-\infty, t_2]$ не найдется точки τ, в которой

$$\left.\frac{d(x(t) - x_{n_2}(t))}{dt}\right|_{t=\tau} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{d(x(t) - x_{n_2}(t))}{dt} < 0 \quad \forall t \le t_2$$

и, следовательно,

$$x(t) - x_{n_2}(t) \ge \frac{\mu}{2} \quad \forall t \le t_2.$$

Тогда на основании (46) — (48) и (50)

$$\frac{d(x(t) - x_{n_2}(t))}{dt} \le \frac{k\mu}{2} + \gamma < 0 \quad \forall t < t_2.$$

Это соотношение противоречит соотношению (36).

Итак, предположение о том, что соотношение (37) не выполняется, ложно и в случае, когда функция $f(x)$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}$.

Таким образом, отображение $L : C^1 \to C^0$ имеет обратное непрерывное отображение, т. е. импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что непрерывное отображение $L^{-1} : C^0 \to C^1$ не является c-непрерывным. Тогда найдутся функции $h = h(t) \in C^0$ и $h_n = h_n(t) \in C^0,\ n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} h \text{ при } n \to \infty \tag{53}$$

и

$$\max_{a \le t \le b} \left(|(L^{-1}h)(t) - (L^{-1}h_n)(t)| + \left| \frac{(L^{-1}h)(t)}{dt} - \frac{(L^{-1}h_n)(t)}{dt} \right| \right) > \delta \tag{54}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно ограниченности множества $\{h_n \in C^0 : n \in \mathbb{N}\}$ (на основании (53)) и теореме 2, множество $\{L^{-1}h_n : n \in \mathbb{N}\}$ также ограничено. Поэтому на основании леммы 3 можно считать, не ограничивая общности, что

$$L^{-1}h_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} y \text{ при } n \to \infty, \tag{55}$$

где $y = y(t)$ — некоторый элемент пространства C^0. Из равенств

$$(L^{-1}h_n)(t) - (L^{-1}h_n)(0) + \int_0^t f((L^{-1}h_n)(\tau))d\tau = \int_0^t h_n(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

соотношений (53), (55) и непрерывности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ получаем

$$y(t) - y(0) + \int\limits_0^t f(y(\tau))\tau = \int\limits_0^t h(\tau)\tau,\ t \in \mathbb{R},$$

и

$$L^{-1}h_n \xrightarrow{\text{лок.},\, C^1} y \text{ при } n \to \infty. \tag{56}$$

Следовательно, уравнение (1) имеет решения $x = x(t)$ и $y = y(t)$, для которых

$$\|x - y\|_{C^1} \geq \delta > 0$$

(согласно (54) и (56)). Последнее соотношение противоречит тому, что отображение $L : C^1 \to C^0$ имеет обратное непрерывное отображение.

Итак, предположение о том, что отображение $L^{-1} : C^0 \to C^1$ не является c-непрерывным, ложно.

Следовательно, импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана.

Теперь докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть отображение $L : C^1 \to C^0$ имеет обратное непрерывное и c-непрерывное отображение. Тогда $R(L) = C^0$ и на основании теоремы 2 $R(f) = \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{dt} + f(y) = h \tag{57}$$

и

$$f(x) = h, \tag{58}$$

в которых $h = \text{const} \in \mathbb{R}$. Каждое постоянное решение уравнения (58) также будет решением уравнения (57). А поскольку согласно обратимости отображения $L : C^1 \to C^0$ уравнение (57) имеет единственное решение $y \in C^1$, то уравнение (58) также будет иметь единственное решение. На основании этого и равенства $R(f) = \mathbb{R}$ непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет иметь непрерывное обратное отображение.

Таким образом, импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказана.

Теорема 4 доказана, поскольку 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

8. Доказательство теоремы 5. Согласно теореме 4, отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет непрерывное обратное. Поэтому функция $f(x)$ является строго монотонной на $\mathbb{R}$ и $R(f) = \mathbb{R}$. Тогда на основании леммы 4 для каждой функции $h = h(t) \in C^0$

$$R(L^{-1}h) \subset f^{-1}(\overline{R(h)}) \tag{59}$$

и, следовательно,

$$\sup\left\{|x| : x \in R(L^{-1}h)\right\} \leq \sup\left\{|x| : x \in f^{-1}(\overline{R(h)})\right\}. \tag{60}$$

Поскольку $|f(x)| \geq k|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\sup\left\{|x| : x \in f^{-1}(\overline{R(h)})\right\} \leq \sup\left\{|x| : x \in \overline{R(k^{-1}h)}\right\}.$$

Отсюда и из неравенства (60) вытекает неравенство (3). Для доказательства неравенства (4) используем то, что

$$\frac{d(L^{-1}h)(t)}{dt} = -f((L^{-1}h)(t)) + h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{61}$$

и

$$f(R(L^{-1}h)) \subset \overline{R(h)}$$

для всех функций $h = h(t) \in C^0$ (последнее соотношение получается из соотношения (59) на основании монотонности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$). Поэтому

$$\|f(L^{-1}h)\|_{C^0} \leq \|h\|_{C^0}$$

и согласно (61)

$$\left\|\frac{dL^{-1}h}{dt}\right\|_{C^0} \leq 2\|h\|_{C^0}.$$

Из этого неравенства и из неравенства (3) вытекает неравенство (4).

Равенство (6) вытекает из того, что уравнение

$$Ly + Gy = h,$$

где $h \in C^0$, равносильно уравнению

$$y = L^{-1}(h - Gy),$$

а последнее уравнение на основании леммы 7 имеет по крайней мере одно решение $y \in C^1$ при каждом $h \in C^0$ (условия леммы 7 выполняются, поскольку отображение $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} L^{-1}(h - Gy))$ является c-непрерывным на основании c-непрерывности отображений L^{-1} (см. теорему 4) и G и на основании соотношений (3) – (5) выполняются включения $\mathcal{A}S_r^0 \subset S_r^0$, $\mathcal{A}S_r^0 \subset S^1_{(2+k^{-1})r}$ при достаточно большом $r > 0$).

Теорема 5 доказана.

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, №3. — С. 269 – 274.
2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Душанбе, 1978. — 289 с.
3. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116**, № 4. — С. 483 – 501.
4. *Слюсарчук В.Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1981. — № 8. — С. 34 – 37.
5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость неавтономных дифференциально- функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130**, № 1. — С. 86 – 104.
6. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.
7. *Слюсарчук В.Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 2. — С. 210 – 215.
8. *Слюсарчук В.Е.* Слабонелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Там же. — № 5. — С. 660 – 662.

9. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Там же. — 1989. — **41**, № 2. — С. 201 – 205.

10. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные решения функциональных и функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Ровно, 1983. — 300 с.

11. *Слюсарчук В.Е.* $\mathcal{P}$-непрерывные операторы и их применение к решению задач математической физики // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — Вип.15. — С.188 – 226.

12. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.

13. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

14. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.

15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

16. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 271 с.

17. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.

18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

19. *Слюсарчук В.Е.* Нелокальные теоремы об ограниченных решениях функционально-дифференциальных уравнений с нелипшицевыми нелинейностями // Исследование дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1980. — С. 121 – 130.

20. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Дифференц. уравнения. — 1983. — **19**, № 4. — С. 588 – 596.

21. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. — М.: Наука, 1966. — Т. 1. — 608 с.

Получено 04.10.99