НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 4 • 1999

УДК 517 . 947

# ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА ВОЗМУЩЕНИИ ГРАНИЦЫ СЛОЯ

**В. В. Барковский**

*Киев. ин-т связи,*
*Украина, 252035, Киев, ул. Соломенская, 7*

*We formulate and solve by the limiting absorption method scattering problems in unbounded domain of a boundary value problem for Laplase's equation with spectral parameter in a boundary condition on a part of the boundary of the domain. We investigate the influence of the various another a part of the boundary on the spectrums and Green's functions. We obtain the solves of linearity back scattering problems.*

*Сформульовано та розв'язано методом граничного поглинання задачі розсіяння в необмеженій області у випадку задач на власні значення для рівняння Лапласа із спектральним параметром в умовах на частині межі області. Досліджено вплив деформації іншої частини межі області на спектри та функції Гріна. Одержано розв'язки лінеаризованих обернених задач розсіяння.*

**1. Введение.** Обозначим через $G$ слой $R_3$, ограниченный плоскостями $\Gamma$ и $\Gamma_0$, уравнения которых $x_3 = 0$ и $x_3 = -h\,(h > 0)$ соответственно.

Пусть $G$ посредством деформации преобразуется в $G_\tau$ с границей $\partial G_\tau = \Gamma \cup \Gamma_\tau$, где $\Gamma_\tau$ — поверхность $x_3 = -h + \tau(x_1, x_2)$, $\tau(x_1, x_2)$ — однозначная, неотрицательная функция, равная нулю вне ограниченной области.

Рассмотрим задачу на собственные значения В.А. Стеклова для уравнения Лапласа со спектральным параметром $\lambda$ в граничном условии:

$$(\Delta u)(x) = 0, \quad x \in G_\tau; \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \begin{cases} \lambda u(x), \ x \in \Gamma; \\ 0, \ x \in \Gamma_\tau. \end{cases} \tag{1}$$

В этой работе для задачи (1) решены прямая и линеаризованная обратная задачи рассеяния, указанные в [1].

**2. Постановка задач рассеяния.** Задаче (1) можно придать операторный вид, если ввести оператор $B_\tau$ — замыкание в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$ оператора, действующего по закону

$$\phi(\tilde{x}) = \phi(x)|_\Gamma \rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial n}\Big|_\Gamma$$

на $\phi(x) \in C_0^2\,(G_\tau \cup \Gamma)$ и таких, что

$$(\Delta\phi)(x) = 0, \ x \in G_\tau; \quad \phi(x)|_\Gamma = \phi(\tilde{x}), \ \tilde{x} \in \Gamma; \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = 0, \ x \in \Gamma_\tau. \tag{2}$$

Согласно [2], оператор $B_\tau$ самосопряжен в $L_2(\Gamma)$, неотрицателен. $B_\tau$ можно понимать как возмущение оператора $B$, который строится как $B_\tau$, но в слое $G$. Такой подход позволяет поставить и решить методом предельного поглощения следующую задачу рассеяния на возмущении $\Gamma_0$ :

 

требуется найти обобщенные собственные функции $B_\tau$ в виде

$$u(\tilde{x},\lambda)=u_0(\tilde{x},\lambda,\nu)+u_\tau(\tilde{x},\lambda,\nu), \tag{3}$$

где $u_0(\tilde{x},\lambda,\nu)$ — обобщенные собственные функции невозмущенного оператора $B$, имеющие вид плоской волны, проходящей в направлении орта $\nu$, а $u_\tau(\tilde{x},\lambda,\nu)$ — добавка, возникающая из-за возмущения $\Gamma_0$ и являющаяся сужением на $\Gamma$ решения задачи

$$(\Delta u_\tau)(x),\ x\in G_\tau,\quad \frac{\partial u_\tau(\tilde{x})}{\partial x_3}=\lambda u_\tau(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Gamma;$$

$$\frac{\partial u_\tau(x)}{\partial n}=\begin{cases} 0, & x\in\overline{\Gamma}_\tau\cap\overline{\Gamma}_0;\\ -\dfrac{\partial u_0(x,\lambda,\nu)}{\partial n}, & x\in\Gamma_\tau^+=\Gamma_\tau\setminus\left(\overline{\Gamma}_\tau\cap\overline{\Gamma}_0\right),\end{cases} \tag{4}$$

удовлетворяющего условиям излучения

$$u_\tau(\tilde{x})=O\left(|\tilde{x}|^{-3/2}\right);\quad \frac{\partial u_\tau(\tilde{x})}{\partial|\tilde{x}|}-i\alpha(\lambda)u_\tau(\tilde{x})=O\left(|\tilde{x}|^{-1/2}\right),\quad |\tilde{x}|\to\infty, \tag{5}$$

$$\alpha(\lambda)\tanh\alpha(\lambda)h=\lambda. \tag{6}$$

Обратная задача рассеяния — задача нахождения возмущения $\Gamma_0$ по спектральным данным.

**3. Спектральный анализ невозмущенного оператора *B*.**

**Лемма 1.***Оператор $B$ — псевдодифференциален с символом $|\xi|\tanh|\xi|h$ и имеет непрерывный спектр $[0,\infty)$.*

Действительно, по построению $B$ при $\phi(\tilde{x})\in\mathcal{D}(B),\ f(\tilde{x})=(B\phi)(\tilde{x})$ имеем

$$(\Delta\phi)(x)=0,\ x\in G;\quad \phi(x)|_\Gamma=\phi(\tilde{x});\quad \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_3}\Big|_\Gamma=f(\tilde{x});\quad \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_0}=0.$$

Так как $\phi(\tilde{x}),\ f(\tilde{x})\in L_2(\Gamma)$, то к этой задаче можно применить преобразование Фурье по $(x_1,\,x_2)$. Тогда получим равенство

$$\hat{f}(\xi)=|\xi|\tanh|\xi|h\cdot\hat{\phi}(\xi),$$

которое означает, что образ оператора $B$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $|\xi|\tanh|\xi|h$. Поэтому оператор $B$ псевдодифференциален с указанным в лемме символом и спектром.

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda\in[0,\infty)$, функция $\alpha(\lambda)\geq 0$ и удовлетворяет условию (6), $\langle\tilde{x},\nu\rangle$ — скалярное произведение $\tilde{x}=(x_1,\,x_2)$ и орта $\nu$, произвольно меняющегося на окружности $C(1)$ единичного радиуса плоскости $\Gamma$.*

*Тогда совокупность плоских волн $u_0(\tilde{x},\lambda,\nu)=\exp\{i\alpha(\lambda)\langle\tilde{x},\nu\rangle\}$ образует полную систему обобщенных собственных функций оператора $B$ и для любой $f(\tilde{x})\in L_2(\Gamma)$ имеет место равенство Парсеваля в виде*

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{C(1)}|\hat{f}(\alpha(\lambda),\nu)|^2\alpha(\lambda)\alpha'(\lambda)d\lambda d\nu=\int\limits_\Gamma|f(\tilde{x})|^2d\tilde{x};\quad \alpha'(\lambda)>0, \tag{7}$$

$$\hat{f}(\alpha(\lambda),\nu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \overline{u_0(\tilde{x},\lambda,\nu)} f(\tilde{x}) d\tilde{x}. \tag{8}$$

***Доказательство.*** В силу (6) непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$u_0(x,\lambda,\nu) = \frac{\cosh\alpha(\lambda)(h+x_3)}{\cosh\alpha(\lambda)h} \exp\{i\alpha(\lambda)\langle\tilde{x},\nu\rangle\}$$

удовлетворяет задаче (1) в слое $G$.

Докажем, что плоские волны

$$u_0(\tilde{x},\lambda,\nu) = \lim_{x_3\to 0} u_0(x,\lambda,\nu) = \exp\{i\alpha(\lambda)\langle\tilde{x},\nu\rangle\}$$

будут обобщенными собственными функциями оператора $B$.

Действительно, самосопряженный оператор $B$ действует в оснащенном гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$, причем оснащением $L_2(\Gamma) = H_0$ будет

$$H_- = L_2\left(\Gamma, \frac{d\tilde{x}}{(1+|\tilde{x}|)^{2+\varepsilon}}\right) \supseteq H_0 = L_2(\Gamma) \supseteq H_+ = L_2\left(\Gamma, (1+|\tilde{x}|)^{2+\varepsilon} d\tilde{x}\right),\ \varepsilon > 0.$$

Оператор $B$ допускает продолжение оснащения (см., например, [3, с. 339]): в качестве $D$ возьмем сужение на $\Gamma$ множества функций из $C^\infty(G\cup\Gamma)$, финитных на $\infty$ и удовлетворяющих (2) в слое $G$. Указанное $D$ входит в область определения оператора $B$, является линейным топологическим пространством, плотным в $H_+$, и переводится оператором $B$ непрерывно в $H_+$. Поэтому такой выбор $D$ законен.

Функции $u_0(\tilde{x},\lambda,\nu) \in H_-$ и на $\phi \in D$ в силу формулы Грина получаем

$$\begin{aligned}
&(u_0(\tilde{x},\lambda,\nu), (B-\overline{\lambda}E)\phi(\tilde{x}))_{L_2(\Gamma)} = \\
&\quad = -(u_0(x,\lambda,\nu), (\Delta\phi)(x))_{L_2(G)} + \left(u_0(x,\lambda,\nu), \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)(x)\right)_{L(\Gamma\cup\Gamma_0)} - \\
&\quad\quad - (u_0(\tilde{x},\lambda,\nu), \overline{\lambda}\phi(\tilde{x}))_{L_2(\Gamma)} = \\
&\quad = \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\right)(x,\lambda,\nu), \phi(x)\right)_{L_2(\Gamma\cup\Gamma_0)} - (u_0(\tilde{x},\lambda,\nu), \overline{\lambda}\phi(\tilde{x}))_{L_2(\Gamma)} = \\
&\quad = (\lambda u_0(\tilde{x},\lambda,\nu), \phi(\tilde{x})_{L_2(\Gamma)} - (\lambda u_0(\tilde{x},\lambda,\nu), \phi(\tilde{x})_{L_2(\Gamma)} = 0,
\end{aligned}$$

т. е. $u_0(\tilde{x},\lambda,\nu)$ являются обобщенными собственными функциями оператора $B$.

Так как $\alpha(\lambda) \in [0,\infty)$ при $\lambda \in [0,\infty)$, то преобразование Фурье по обобщенным собственным функциям оператора $B$ сходно с обычным преобразованием Фурье. Поэтому для любой $f(\tilde{x}) \in L_2(\Gamma)$ справедливы равенства (8) и

$$f(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \int\limits_{C(1)} u_0(\tilde{x},\lambda,\nu)\hat{f}(\alpha(\lambda),\nu) d\alpha(\lambda) d\nu,$$

а равенство Парсеваля имеет вид (7). Из (7) следует полнота обобщенных собственных функций оператора $B$.

Функция $\alpha(\lambda)$ — обратная к растущей, будет возрастающей, поэтому $\alpha'(\lambda) > 0$. Теорема доказана.

Для изучения свойств резольвенты $(B - zE)^{-1}$ оператора $B$ понадобятся функции Грина $R(\cdot)$ и $E(\cdot)$ — обобщенные решения указанных ниже задач (9) и (14).

Согласно [4], функция Грина $R(\tilde{x}, \tilde{y}, z)$ — ядро резольвенты оператора $B$ — существует, если при фиксированном $\tilde{y} \in \Gamma$ существует обобщенное решение задачи

$$(\Delta R)(x) = 0,\ x \in G;\ \ \left(\frac{\partial R(x)}{\partial x_3} - zR(x)\right)\Big|_{x_3=0} = \delta_{\tilde{y}};\ \ \frac{\partial R(x)}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_0} = 0 \tag{9}$$

и сужение этого решения на $\Gamma$.

**Лемма 2.** *При фиксированном $\tilde{y} \in \Gamma$ в классе обобщенных функций медленного роста существует единственное решение задачи (9) в виде*

$$R(x, \tilde{y}, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\xi \cosh \xi (h + x_3)\, J_0(\xi |x - \tilde{y}|)}{\cosh \xi h\, (\xi \tanh \xi h - z)} d\xi \tag{10}$$

($J_0(\cdot)$ — *функция Бесселя нулевого порядка,* $\operatorname{Im} z \neq 0$), *имеющее свойства:*

1) $R(x, \tilde{y}, \overline{z}) = \overline{R(x, \tilde{y}, z)}$;

2) *при $z \notin [0, \infty)$ и любом направлении $l$ существует в смысле обобщенных функций*

$$\frac{\partial R(x, \tilde{y}, z)}{\partial l} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\xi \dfrac{\partial}{\partial l_x} [\cosh \xi (h + x_3)\, J_0(\xi |x - \tilde{y}|)]}{\cosh \xi h\, (\xi \tanh \xi h - z)} d\xi;$$

3) $R(x, \tilde{y}, z) = O\left(|x - \tilde{y}|^{-3/2}\right)$, $\ |x - \tilde{y}| \to \infty$, $\ z \notin [0, \infty)$, *где $O(r)$ означает величину порядка $r$;*

4) *при $z = \lambda + i\varepsilon,\ \lambda \in (0, \infty),\ \varepsilon \geq 0$ и указанной в теореме 1 $\alpha(\lambda)$ существует*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R(x, \tilde{y}, \lambda + i\varepsilon) = R(x, \tilde{y}, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \frac{\sigma \cosh \sigma (h + x_3) J_0(\sigma |x - \tilde{y}|)}{\cosh \sigma h (\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma,$$

*где $L$ — контур в комплексной плоскости $\sigma$, который получается из вещественной положительной полуоси путем замены отрезка $|\operatorname{Re} \sigma - \alpha(\lambda)| < \rho$ на нижнюю полуокружность $|\sigma - \alpha(\lambda)| = \rho$. При этом $\rho$ настолько мало, что в круге $|\sigma - \alpha(\lambda)| \leq \rho$ нет других нулей функции $\lambda = \sigma \tanh \sigma h$, кроме $\sigma = \alpha(\lambda)$;*

5) *при $|x - \tilde{y}| \to \infty$ для всех $\alpha(\lambda) > 0$ имеет место асимптотическое представление*

$$R(x, \tilde{y}, \lambda) = i \exp(-i\pi/4) \left[\frac{\alpha^3(\lambda)}{2\pi |x - \tilde{y}|}\right]^{1/2} \frac{\cosh(\alpha(\lambda)(h + x_3) \exp(i\alpha(\lambda)|\tilde{x} - \tilde{y}|}{[\lambda + h(\alpha^2(\lambda) - \lambda^2)] \cosh \alpha(\lambda) h} +$$

$$+ O\left(|\tilde{x} - \tilde{y}|^{-1}\right).$$

***Доказательство.*** Задача (9) рассматривается в классе обобщенных функций медленного роста, где возможно применение прямого и обратного преобразований Фурье. Прямое преобразование Фурье сводит (9) к задаче

$$\frac{d^2\hat{R}(x_3)}{dx_3^2} - |\xi|^2\hat{R}(x_3) = 0, \quad 0 > x_3 > -h; \quad \frac{d\hat{R}(x_3)}{dx_3} = 0, \quad x_3 = -h;$$

$$\left(\frac{d\hat{R}(x_3)}{dx_3} - z\hat{R}(x_3)\right)\Big|_{x_3=0} = \frac{1}{2\pi}\exp\{-i\langle\xi,\tilde{y}\rangle\} \tag{11}$$

в смысле обобщенных функций, где $\hat{R}$ — преобразование Фурье искомой функции, $\langle\xi,\tilde{y}\rangle$ — скалярное произведение $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $\tilde{y} = (y_1, y_2)$.

Легко видеть, что решение этой задачи существует, единственно и имеет вид

$$\hat{R}(x_3,\xi,\tilde{y},z) = \frac{\cosh|\xi|(h+x_3)\exp(-i\langle\xi,\tilde{y}\rangle)}{2\pi\cosh|\xi|h(|\xi|\tanh|\xi|h - z)}.$$

Обратное преобразование Фурье и переход к полярным координатам дают

$$R(x,\tilde{y},z) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{|\xi|\cosh|\xi|(h+x_3)}{\cosh|\xi|h(|\xi|\tanh|\xi|h - z)}\left(\int\limits_0^{2\pi} e^{-i|\xi|\,|\tilde{x}-\tilde{y}|\cos\phi}d\phi\right)d|\xi|.$$

Отсюда, используя интегральное представление функции Бесселя нулевого порядка, получаем представление (10).

Единственность этого решения вытекает из единственности решения задачи (11), а также из свойств преобразования Фурье в классе обобщенных функций медленного роста.

Теперь докажем указанные в лемме свойства решения (10). Если в задаче (9) $\delta_{\tilde{y}}$ и $z$ заменить соответственно на $\delta_{\tilde{x}}$ и $\overline{z}$ и рассмотреть задачу по переменной $y$, то получим

$$R(y,\tilde{x},\overline{z}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{|\xi|\cosh|\xi|(h+y_3)J_0(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h - \overline{z})}d\xi.$$

Отсюда и из (10) следует первое свойство.

При $\operatorname{Im} z \neq 0$ несобственный интеграл в (10) равномерно сходится в областях $0 > x_3 \geq$ $\geq -h,\ 0 \leq |\tilde{x}-\tilde{y}| < \infty$ и $0 \geq x_3 \geq -h,\ 0 < \delta \leq |\tilde{x}-\tilde{y}| < \infty$. В силу свойств функции Бесселя и гиперболических функций интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{\xi J_0(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\xi\tanh\xi h - z}d\xi, \quad \int\limits_0^\infty \frac{\xi\cosh\xi(h+x_3)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h - z)}d\xi$$

оценивают его и сходятся. Дифференцируя под знаком несобственного интеграла по параметрам $x_1,\ x_2,\ x_3$ и учитывая равенство

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \langle\operatorname{grad}\phi, l\rangle,$$

убеждаемся в справедливости второго свойства.

Переходя к пределу при $|\tilde{x}-\tilde{y}|\to\infty$ под знаком интеграла и учитывая асимптотику функции Бесселя (см., например, [5, с. 604]), получаем

$$R(x,\tilde{y},z)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi|\tilde{x}-\tilde{y}|}}\int\limits_0^\infty \frac{\xi^{1/2}\cosh\xi(h+x_3)\cos(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|-\pi/4)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h-z)}d\xi+O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-3/2}\right).$$

Интегрируя несобственный интеграл по частям, получаем асимптотическое представление, указанное в третьем свойстве.

В интеграле (10) продолжим $\xi$ в комплексную плоскость и заметим, что подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точек $\sigma$, в которых $\cosh\sigma h(\sigma\tanh\sigma h-z)=0$. Выбранный путь интегрирования не проходит через эти точки, поэтому существует предел, указанный в четвертом свойстве.

Для доказательства последнего свойства представим контур интегрирования (10) в виде

$$L=[0,\alpha(\lambda)-\rho)\cup C_\rho^-\cup(\alpha(\lambda)+\rho,\infty),$$

где $C_\rho^-$ — полуокружность радиуса $\rho$ с центром в точке $\alpha(\lambda)$, лежащей в нижней полуплоскости. Введем

$$\int\limits_0^\xi J_0(t)dt=f(\xi)$$

и заметим, что $|f(\xi)|$ ограничен при вещественных $\xi$. Тогда

$$\int\limits_0^{\alpha(\lambda)-\rho}\frac{\xi\cosh\xi(h+x_3)J_0(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h-\lambda)}d\xi=$$

$$=\int\limits_0^{\alpha(\lambda)-\rho}\frac{\xi\cosh\xi(h+x_3)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h-\lambda)}d\left[\frac{f(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}\right]=$$

$$=\frac{(\alpha(\lambda)-\rho)\cosh(\alpha(\lambda)-\rho)(h+x_3)}{\cosh(\alpha(\lambda)-\rho)h((\alpha(\lambda)-\rho)\tanh(\alpha(\lambda)h-\lambda))}\left[\frac{f(\alpha(\lambda)-\rho)|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}\right]-$$

$$-\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}\int\limits_0^{\alpha(\lambda)-\rho}f(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)d\left[\frac{\xi\cosh\xi(h+x_3)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h-\lambda)}\right]=O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-1}\right).$$

Аналогично доказывается оценка

$$\int\limits_{\alpha(\lambda)+\rho}^\infty\frac{\xi\cosh\xi(h+x_3)J_0(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h-\lambda)}d\xi=O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-1}\right).$$

Для оценки оставшейся части воспользуемся представлением функции Бесселя через функции Ханкеля первого и второго рода. Тогда

$$\int\limits_{C_\rho^-} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) J_0(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma = \frac{1}{2} \int\limits_{C_\rho^-} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) H_0^{(1)}(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{C_\rho^-} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) H_0^{(2)}(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma.$$

Обозначим через $C_\rho^+$ полуокружность $|\sigma-\alpha(\lambda)|=\rho,\ \operatorname{Im}\sigma>0$, проходящую в направлении движения часовой стрелки. С помощью теоремы о вычетах имеем

$$\int\limits_{C_\rho^-} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) H_0^{(1)}(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma =$$

$$= \int\limits_{C_\rho^+} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) H_0^{(1)}(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma +$$

$$+ i\pi \frac{\alpha^2(\lambda) \cosh \alpha(\lambda)(h+x_3) H_0^{(1)}(\alpha(\lambda)|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{[\lambda + h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)] \cosh \alpha(\lambda) h}.$$

В силу асимптотических представлений функций Ханкеля получаем оценки

$$\int\limits_{C_\rho^+} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) H_0^{(1)}(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma = O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-1}\right), \quad |\tilde{x}-\tilde{y}| \to \infty;$$

$$\int\limits_{C_\rho^-} \frac{\sigma \cosh \sigma(h+x_3) H_0^{(2)}(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh \sigma h(\sigma \tanh \sigma h - \lambda)} d\sigma = O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-1})\right), \quad |\tilde{x}-\tilde{y}| \to \infty,$$

а значит, и асимптотическое представление, указанное в пятом свойстве. Лемма доказана.

**Теорема 2.** *В классе обобщенных функций медленного роста функция Грина $R(\tilde{x},\tilde{y},z)$ оператора $B$ существует, единственна, представима в виде*

$$R(|\tilde{x}-\tilde{y}|,z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\xi J_0(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\xi \tanh \xi h - z} d\xi \tag{12}$$

*и имеет следующие свойства:*

1) $R(|\tilde{x}-\tilde{y}|,z) = O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-3/2}\right), \quad |\tilde{x}-\tilde{y}| \to \infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0;$

2) *существует*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R(|\tilde{x}-\tilde{y}|,\lambda+i\varepsilon) = R(|\tilde{x}-\tilde{y}|,\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \frac{\sigma J_0(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\sigma \tanh \sigma h - \lambda} d\sigma, \tag{13}$$

*где $\lambda \in [0,\infty)$, контур $L$ в комплексной плоскости $\sigma$ описан в лемме 2;*

3) *при* $r=|\tilde{x}-\tilde{y}|\to\infty$

$$R(r,\lambda)=i\exp\{-i\pi/4\}\left[\frac{\alpha^3(\lambda)}{2\pi r}\right]^{1/2}\frac{\exp\{i\alpha(\lambda)r\}}{\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)]}+O\left(r^{-1}\right)$$

*и удовлетворяет условиям излучения (5);*

4) $R(|\tilde{x}-\tilde{y}|,\lambda)\le\dfrac{c}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}$, $|\tilde{x}-\tilde{y}|\to 0$, $c$ — *постоянная;*

5) $R(|\tilde{x}-\tilde{y}|,\lambda)=i\exp\{-i\pi/4\}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2\pi|\tilde{x}-\tilde{y}|}}\exp\{i\lambda|\tilde{x}-\tilde{y}|\}\left[1+O\left((\lambda|\tilde{x}-\tilde{y}|)^{-1}\right)\right]$ *при* $\lambda\to\infty$ *для всех* $|\tilde{x}-\tilde{y}|\ge\delta>0$.

***Доказательство*** существования, единственности, представления функции Грина оператора $B$ и указанных в теореме ее первых трех свойств непосредственно следует из леммы 2 в силу законности предельного перехода при $x_3\to 0$ в (10).

Докажем последние два свойства. Обозначим $|\tilde{x}-\tilde{y}|=r$. Замена переменной $\tau=r\sigma$ в интеграле (13) дает

$$R(r,\lambda)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_L\frac{\tau J_0(\tau)}{\tau\tanh(\tau h/r)-r\lambda}d\tau.$$

Отсюда в силу известного равенства

$$\int\limits_0^\infty J_0(\tau)d\tau=1$$

следует $R(r,\lambda)\le\dfrac{c}{r}$, $r\to 0$ ($c$ – постоянная).

Асимптотику функции Грина оператора $B$ при $\lambda\to\infty$ легко получить, используя рассуждения доказательства четвертого свойства из леммы 2, эквивалентность $\alpha(\lambda)$ и $\lambda$ при $\lambda\to\infty$, а также свойства функций Ханкеля.

Аналогично доказываются следующие утверждения относительно используемой ниже вспомогательной функции Грина $E(x,y,z)$.

**Лемма 3.** *При фиксированном* $y\in G$ *в классе обобщенных функций медленного роста существует единственное решение задачи*

$$(\Delta E)(x)=-\delta_y,\ x\in G;\ \left(\frac{\partial E(x)}{\partial x_3}-zE(x)\right)\Big|_{x_3=0}=0;\ \frac{\partial E(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=-h}=0, \tag{14}$$

*представимое в виде*

$$E(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\phi(\xi,x_3,y_3)J_0(\xi|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\cosh\xi h(\xi\tanh\xi h-z)}d\xi,$$

*где* $J_0(\cdot)$ — *функция Бесселя нулевого порядка,*

$$\phi(\cdot)=(\xi\sinh\xi h-z\cosh\xi h)\exp\{-\xi|x_3-y_3|\}+(z+\xi)\cosh\xi(h+x_3)\exp\{\xi y_3\}+$$
$$+(\xi\cosh\xi x_3+z\sinh\xi x_3)\exp\{-\xi(h+y_3)\}.$$

*Это решение имеет следующие свойства:*

1) $E(y,x,\overline{z}) = \overline{E(x,y,z)}$;
2) $E(x,y,z) = O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-3/2}\right), \quad |\tilde{x}-\tilde{y}| \to \infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0$;
3) *существует*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E(x,y,\lambda+i\varepsilon) = E(x,y,\lambda) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{4\pi|\tilde{x}-\tilde{y}|} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{(\lambda+\sigma)\cosh\sigma(h+x_3)\cosh\sigma(h+y_3)\exp\{-\sigma h\}J_0(\sigma|\tilde{x}-\tilde{y}|)}{\sigma\sinh\sigma h - \lambda\cosh\sigma h}d\sigma,$$

*где* $L$ *— контур, указанный в лемме 2;*

4) $E(x,y,\lambda) = \dfrac{1}{4\pi|x-y|} + O(1), \quad |x-y| \to 0$;
5) *при* $|\tilde{x}-\tilde{y}| \to \infty$ *имеет место асимптотическое представление*

$$E(x,y,\lambda) = i\exp\{-i\pi/4\}\sqrt{\frac{\alpha^3(\lambda)}{2\pi}}\times$$

$$\times\frac{\cosh\alpha(\lambda)(h+x_3)\cosh\alpha(\lambda)(h+y_3)\exp\{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}-\tilde{y}|\}}{\cosh^2\alpha(\lambda)h\left[\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)\right]|\tilde{x}-\tilde{y}|^{1/2}} + O\left(|\tilde{x}-\tilde{y}|^{-1}\right).$$

***Следствие 1.*** *Существует* $\lim_{x_3\to 0} E(x,y,\lambda) = E(\tilde{x},y,\lambda)$ *и при* $\tilde{x} = |\tilde{x}|\omega \to \infty$ *имеет место асимптотическое представление*

$$E(\tilde{x},y,\lambda) = i\exp\{-i\pi/4\}\frac{\exp\{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}|\}}{|\tilde{x}|^{1/2}}\sqrt{\frac{\alpha^3(\lambda)}{2\pi}}\,\frac{\overline{u_0(y,\lambda,\omega)}}{\left[\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)\right]} + O\left(|\tilde{x}|^{-1}\right), \quad (15)$$

*которое позволяет убедиться, что* $E(\tilde{x},y,\lambda)$ *при* $|\tilde{x}| \to \infty$ *удовлетворяет условиям излучения (5).*

**4. Спектральный анализ возмущенного оператора.**

**Лемма 4.** *Пусть граница* $\partial G_\tau$ *будет дважды непрерывно дифференцируемой,*

$$\Gamma_\tau^+ = \Gamma_\tau \setminus (\Gamma_\tau \cap \Gamma_0), \quad 0 < \sup_{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}(\tau)} \tau(x_1,x_2) < h.$$

*Тогда при любом фиксированном* $\tilde{y} \in \Gamma$ *и* $z \notin [0,\infty)$ *в классе обобщенных функций медленного роста существует единственное решение задачи*

$$(\Delta R_\tau)(x) = 0, \; x \in G_\tau; \; \left(\frac{\partial R_\tau(x)}{\partial x_3} - zR_\tau(x)\right)\Big|_{x_3=0} = \delta_{\tilde{y}}; \; \frac{\partial R_\tau(x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma_\tau} = 0, \quad (16)$$

*представимое в виде*

$$R_\tau(x,\tilde{y},z) = R(x,\tilde{y},z) + 4\pi\int\limits_{\Gamma_\tau^+} E_(x,s,z)\rho(s,\tilde{y},z)ds, \quad (17)$$

*где $R(\cdot)$ и $E(\cdot)$ — функции Грина, описанные в леммах 2 и 3, функция $\rho(\cdot,\tilde{y},z) \in C\,(\Gamma_\tau^+)$ и является единственным решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$\rho(x,\tilde{y},z) + 2\int\limits_{\Gamma_\tau^+} \frac{\partial E(x,s,z)}{\partial n_x}\rho(s,\tilde{y},z)ds = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial R(x,\tilde{y},z)}{\partial n_x},\ x \in \Gamma_\tau^+, \tag{18}$$

*зависящим от $\tilde{y}$ и $z$, как от параметров. Решение задачи (16) имеет следующие свойства:*

1) *существует в смысле обобщенных функций*

$$\lim_{x_3\to 0} R_\tau(x,\tilde{y},z) = R_\tau(\tilde{x},\tilde{y},z) =$$

$$= R(\tilde{x},\tilde{y},z) + 4\pi\int\limits_{\Gamma_\tau^+} E(\tilde{x},s,z)\rho(s,\tilde{y},z)ds,\quad x \in G_\tau;\ \tilde{x},\ \tilde{y} \in \Gamma; \tag{19}$$

2) $R_\tau(\tilde{x},\tilde{y},z) = O\left(|\tilde{x}|^{-3/2}\right),\quad |\tilde{x}| \to \infty;$
3) $R_\tau(\tilde{x},\tilde{y},z) = O\left(|\tilde{y}|^{-3/2}\right),\quad |\tilde{y}| \to \infty;$
4) $R_\tau(y,\tilde{x},\overline{z}) = \overline{R_\tau(x,\tilde{y},z)},\quad x,\ y \in G_\tau;\quad \tilde{x},\ \tilde{y} \in \Gamma.$

***Доказательство.*** Вначале убедимся, что задача (16) сводится к интегральному уравнению. Действительно, функция $R(x,\tilde{y},z)$ гармонична при $x \neq \tilde{y}$, поэтому решение задачи (16) можно искать в виде

$$R_\tau(x,\tilde{y},z) = R(x,\tilde{y},z) + V(x), \tag{20}$$

где $V(x)$ — обобщенное решение задачи

$$(\Delta V)(x) = 0,\ x \in G_\tau;\quad \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_3} - zV(x)\right)\Big|_{x_3=0} = 0;$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma_\tau \cap \Gamma_0,\quad \frac{\partial V(x)}{\partial n} = -\frac{\partial R(x,\tilde{y},z)}{\partial n_x},\ x \in \Gamma_\tau^+. \tag{21}$$

Решение задачи (21) естественно искать с помощью потенциала простого слоя

$$V(x) = 4\pi\int\limits_{\Gamma_\tau^+} E(x,s,z)\rho(s,\tilde{y},z)ds,$$

где $\rho(\cdot)$ — неизвестная плотность.

Используя граничное условие на $\Gamma_\tau$ и предельное значение производной по внешней нормали потенциала простого слоя в точке $x \in \Gamma_\tau^+$ внутри области (см., например, п. 7 § 27 работы [6]), имеем

$$2\pi\rho(x,\tilde{y},z) + \int\limits_{\Gamma_\tau^+} \frac{\partial(|x-s|^{-1})}{\partial n_x}\rho(s,\tilde{y},z)ds + \int\limits_{\Gamma_\tau^+} \frac{\partial g(x,s,z)}{\partial n_x}\rho(s,\tilde{y},z)ds = -\frac{\partial R(x,\tilde{y},z)}{\partial n_x},$$

где $x \in \Gamma_\tau^+,\ g(x,s,z) = E(x,s,z) - (4\pi|x-s|)^{-1}$ — непрерывная функция при $x \to s$. В силу представления $E(x,y,z)$ отсюда получаем интегральное уравнение (18), ядро и правая часть которого равны нулю на $\partial\Gamma_\tau^+$ в силу свойств $E(\cdot)$ и $R(\cdot)$. Особенность $E(x,s,z)$ при $x \to s$ и гладкость $\Gamma_\tau^+$ позволяют заключить, что для интегрального уравнения (18) в $C\left(\Gamma_\tau^+\right)$ справедливы все теоремы теории Фредгольма.

Для указанной в лемме $G_\tau$ множество $\Gamma \cap \Gamma_\tau \neq \emptyset$, поэтому при $x \in \Gamma_\tau^+,\ \tilde{y} \in \Gamma,\ |x-\tilde{y}|$ не стремится к нулю, а значит, правая часть уравнения (18) имеет единственное решение в $C\left(\Gamma_\tau^+\right)$, если соответствующее однородное интегральное уравнение имеет лишь тривиальное решение.

Предположим противное. Пусть однородное интегральное уравнение имеет нетривиальное решение $\rho_1(x,\tilde{y},z)$. Тогда в силу свойства $E(x,s,z)$ функция

$$V_1(x) = 4\pi \int\limits_{\Gamma_\tau^+} E(x,s,z)\rho_1(s,\tilde{y},z)ds$$

будет обобщенным решением задачи

$$(\Delta V_1)(x) = 0,\ x \in G_\tau;\quad \left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} - zV_1(x)\right)\Big|_{x_3=0} = 0;\quad \frac{\partial V_1(x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma_\tau} = 0, \tag{22}$$

убывающим на $\infty$ как $O\left(|\tilde{x}|^{-3/2}\right)$ при $z \notin [0,\infty)$. Но задача (22) в $L_2(\Gamma)$ эквивалентна задаче $\left(B_\tau V_1\right)(\tilde{x}) = zV_1(\tilde{x})$, которая в силу самосопряженности и неотрицательности $B_\tau$ имеет лишь тривиальное решение. Нетрудно видеть, что из $V_1(\tilde{x}) \equiv 0$ следует $V_1(x) \equiv 0$ при $x \in \overline{G_\tau}$. Следовательно, $\partial V_1(x)/\partial n = 0$ на $\Gamma_\tau^+$ изнутри $G_\tau$.

При $\tau(x_1,x_2) > 0$ в силу свойств $E(x,s,z)$ функция $V_1(x)$ будет обобщенным решением задачи

$$\Delta V_1(x) = 0,\ x \in G_\tau^+,\quad \frac{\partial V_1(x)}{\partial n}\Big|_{\partial G_\tau^+} = 0$$

в ограниченной области $G_\tau^+ = G \setminus G_\tau$. Так как решением этой задачи Неймана будет $V_1(x) = \mathrm{const}$, то $\partial V_1(x)/\partial n = 0$ на $\Gamma_\tau^+$ изнутри $G_\tau^+$, т. е. извне $G_\tau$.

В силу равенства нулю скачка $\partial V_1(x)/\partial n$ на $\Gamma_\tau^+$ и равенства

$$4\pi\rho_1(x,\tilde{y},z) = \left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial n}\right)_-(x) - \left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial n}\right)_+(x),\quad x \in \Gamma_\tau^+$$

(см. [6, с. 412]) заключаем, что $\rho_1(x,\tilde{y},z) \equiv 0,\ x \in \Gamma_\tau^+$, но это противоречит сделанному предположению.

Таким образом, однородное интегральное уравнение имеет лишь тривиальное решение, поэтому уравнение (18) имеет единственное решение $\rho(\cdot,\tilde{y},z) \in C\left(\Gamma_\tau^+\right)$.

Тем самым доказано, что для $z \notin [0,\infty)$ в классе обобщенных функций медленного роста существует единственное решение задачи (16), представимое в виде (17). Из представления (17) в силу свойств $E(x,s,z)$ и $R(x,\tilde{y},z)$ непосредственно следуют первые два свойства $R_\tau(x,\tilde{y},z)$, указанные в лемме. Используя асимптотическое свойство правой части уравнения (18) при $|\tilde{y}| \to \infty$, убеждаемся в справедливости третьего свойства $R_\tau$.

Если при фиксированном $\tilde{x} \in \Gamma$ рассмотреть задачу (16) по $y$, заменив в ней $\delta_{\tilde{y}}$ на $\delta_{\tilde{x}}$ и $z$ на $\overline{z}$, то проведенные рассуждения позволят доказать существование и единственность в классе обобщенных функций медленного роста решения $R_\tau(y,\tilde{x},\overline{z})$, а значит, установить четвертое свойство $R_\tau(x,\tilde{y},z)$. Лемма доказана.

**Теорема 3.** *При указанном в лемме 4 возмущении $\Gamma_0$ предельные спектры операторов $B$ и $B_\tau$ совпадают, изолированные собственные значения не появляются.*

***Доказательство.*** При выполнении условий леммы 4 для $z \notin [0, \infty)$ существует $(B_\tau - -zE)^{-1}$. Рассмотрим оператор

$$P = (B_\tau - zE)^{-1} - (B - zE)^{-1}.$$

Для любой $f(\tilde{x}) \in L_2(\Gamma)$ имеем

$$(Pf)(\tilde{x}) = \int\limits_\Gamma R_\tau(\tilde{x}, \tilde{y}, z) f(\tilde{y}) d\tilde{y} - \int\limits_\Gamma R(\tilde{x}, \tilde{y}, z) f(\tilde{y}) d\tilde{y} = \int\limits_\Gamma K(\tilde{x}, \tilde{y}, z) f(\tilde{y}) d\tilde{y},$$

где в силу (19)

$$K(\tilde{x}, \tilde{y}, z) = 4\pi \int\limits_{\Gamma_\tau^+} E(\tilde{x}, s, z) \rho(s, \tilde{y}, z) ds.$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского

$$|K(\tilde{x}, \tilde{y}, z)|^2 \leq 16\pi^2 \left\{ \int\limits_{\Gamma_\tau^+} |E(\tilde{x}, s, z)|^2 ds \right\} \left\{ \int\limits_{\Gamma_\tau^+} |\rho(s, \tilde{y}, z)|^2 ds \right\}.$$

В силу асимптотических свойств $E(\tilde{x}, s, z)$ и решения уравнения (18) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\tau^+} |E(\tilde{x}, s, z)|^2 ds \leq \frac{c_1}{|\tilde{x}|^3}, \quad \int\limits_{\Gamma_\tau^+} |\rho(s, \tilde{y}, z)|^2 ds \leq \frac{c_2}{|\tilde{y}|^3},$$

где $c_1$ и $c_2$ — постоянные. Из этих соотношений следует

$$\int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma |K(\tilde{x}, \tilde{y}, z)|^2 d\tilde{x} d\tilde{y} < \infty,$$

а значит, разность резольвент $P$ есть оператор Гильберта – Шмидта. Поэтому предельные спектры операторов $B_\tau$ и $B$ совпадают.

Спектром $B$ служит $[0, \infty)$. Из неотрицательности $B_\tau$ и совпадения предельных спектров $B_\tau$ и $B$ следует, что при указанном возмущении $\Gamma_0$ изолированные собственные значения не появляются. Теорема доказана.

***Замечание.*** Из теоремы 3 следует, что при возмущении границы слоя на непрерывном спектре могут появиться точки дискретного спектра возмущенного оператора. В работе Р.М. Гарипова [7] приведен пример возмущения $\Gamma_0$, при котором на непрерывном спектре оператора $B_\tau$ появляются точки дискретного спектра. Отметим, что имеются работы (см., например, [8]), в которых исследуются достаточные условия отсутствия точек дискретного спектра на непрерывном спектре $B_\tau$.

Ниже будет показано, что при достаточно малых возмущениях границы $\Gamma_0$ точки дискретного спектра не появляются на непрерывном спектре оператора $B_\tau$.

**5. Задача рассеяния.**

**Лемма 5.** *Пусть граница $\partial G_\tau$ удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда задача (1) с условиями излучения (5) имеет нетривиальные решения, если $\lambda > 0$ является точкой дискретного спектра оператора $B_\tau$.*

***Доказательство.*** Пусть $G_\tau^+ = G \setminus G_\tau,\ G_r$ — пересечение цилиндра радиуса $r$ и области $G_\tau$, причем $G_\tau^+ \subset G_r$. В силу однородности задачи (1) ее обобщенное решение регулярно и можно воспользоваться формулой Грина

$$\int\limits_{G_r} [\Delta u(x,\lambda)\,\overline{u(x,\lambda)} - u(x,\lambda)\overline{\Delta u(x,\lambda)}]dx = \int\limits_{\partial G_r} \left[ u(x,\lambda)\frac{\overline{\partial u(x,\lambda)}}{\partial n} - \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial n}\overline{u(x,\lambda)} \right] dx.$$

Так как $u(x,\lambda)$ и $\overline{u(x,\lambda)}$ гармоничны, а граничные условия на $\Gamma_{\tau,r} = \Gamma_\tau \cap G_r$ и $\Gamma_r = \Gamma \cap G_r$ однородны, то эта формула принимает вид

$$0 = \int\limits_{S_r} \left[ u(x,\lambda)\frac{\overline{\partial u(x,\lambda)}}{\partial r} - \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial r}\overline{u(x,\lambda)} \right] dx, \tag{23}$$

где $S_r$ — боковая поверхность цилиндра, заключенная между плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = -h,\ \partial/\partial n = \partial/\partial|\tilde{x}| = \partial/\partial r$ на $S_r$.

Из (23) и тождества

$$i\alpha(\lambda) \left[ u(x,\lambda)\frac{\overline{\partial u(x,\lambda)}}{\partial r} - \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial r}\overline{u(x,\lambda)} \right] = \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \alpha^2(\lambda)|u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\alpha(\lambda)u \right|^2$$

вытекает равенство

$$0 = \int\limits_{S_r} \left[ \left| \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial r} \right|^2 + \alpha^2(\lambda)|u(x,\lambda)|^2 \right] dx - \int\limits_{S_r} \left| \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial r} - i\alpha(\lambda)u(x,\lambda) \right|^2 dx.$$

Переходя к пределу и используя условия излучения (5), получаем

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{S_r} \left[ \left| \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial r} \right|^2 + \alpha^2(\lambda)|u(x,\lambda)|^2 \right] dx = 0,$$

а значит,

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{S_r} |u(x,\lambda)|^2\, dx = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \int\limits_{S_r} \left| \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial r} \right|^2 dx = 0.$$

Обозначим $J(r) = \int\limits_{G_r} |u(x,\lambda)|^2 dx$. Тогда $J'(r) = \int\limits_{S_r} |u(x,\lambda)|^2 dx$ и рассуждения доказательства леммы 1.13 из [9] позволяют установить существование такой последовательности $r_n$, что при $r_n \to \infty$

$$\int\limits_{S_{r_n}} \frac{\partial u}{\partial r}\overline{u} ds \to 0, \quad \int\limits_{G_\tau} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \overline{u} \rangle dx < \infty.$$

Переходя к пределу при $r_n \to \infty$ в формуле Грина

$$\int\limits_{G_\tau} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \overline{u} \rangle dx = \int\limits_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} \overline{u} ds + \lambda \int\limits_{\Gamma_r} u \cdot \overline{u} d\tilde{x},$$

получаем $u(\tilde{x},\lambda) \in L_2(\Gamma)$. В силу $\left|\dfrac{\partial u}{\partial n}\right| \leq |\operatorname{grad} u|$ имеем $\dfrac{\partial u(\tilde{x},\lambda)}{\partial n} \in L_2(\Gamma)$. Но эти вложения означают, что $u(\tilde{x},\lambda)$ является обобщенной собственной функцией оператора $B_\tau$, соответствующей точке $\lambda$ его дискретного спектра. Лемма доказана.

Ниже будем называть возмущение $\Gamma_\tau^+ = \Gamma_\tau \setminus \Gamma_0$ границы слоя достаточно малым, если $\operatorname{mes} \Gamma_\tau^+$, $\|\tau(x_1,x_2)\|$ и $\|\nabla\tau\|$ — достаточно малы. Здесь

$$\|f(x_1,x_2)\| = \max_{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}(f)} |f(x_1,x_2)|.$$

**Теорема 4.** *Пусть граница $\partial G_\tau$ удовлетворяет условиям леммы 4 и $\nu$ — орт на $\Gamma$. Тогда:*

1) *при всех $\lambda \in [0,\infty)$, за исключением, возможно, множества точек дискретного спектра оператора $B_\tau$ задача рассеяния (1), (3) – (6) имеет единственное решение, рассеянная поверхностная волна представима в виде*

$$u_\tau(\tilde{x},\lambda,\nu) = 4\pi \int\limits_{\Gamma_\tau^+} E(\tilde{x},s,\lambda)\rho(s,\alpha(\lambda),\nu) ds, \tag{24}$$

*где $E(\cdot)$ — вспомогательная функция Грина, $\rho(\cdot,\alpha(\lambda),\nu)$ — единственное решение интегрального уравнения Фредгольма*

$$\rho(s,\alpha(\lambda),\nu) + 2\int\limits_{\Gamma_\tau^+} \frac{\partial E(s,y,\lambda)}{\partial n_s} \rho(y,\alpha(\lambda),\nu) dy = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u_0(s,\alpha(\lambda),\nu)}{\partial n_s}, \tag{25}$$

*зависящее от $\alpha(\lambda)$ и $\nu$, как от параметров; при наличии точек дискретного спектра оператора $B_\tau$ каждому собственному значению отвечает конечное число линейно независимых собственных функций, принадлежащих $L_2(\Gamma)$;*

2) *рассеянная поверхностная волна допускает асимптотическое представление*

$$u_\tau(\tilde{x},\lambda,\nu) = A(\lambda,\nu,\omega) \frac{\exp\{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}|\}}{|\tilde{x}|^{1/2}} + O\left(|\tilde{x}|^{-1}\right), \quad \tilde{x} = |\tilde{x}|\omega \to \infty,$$

*причем амплитуда круговой рассеянной волны имеет вид*

$$A(\cdot) = 2i\exp(-i\pi/4) \frac{\sqrt{2\pi\alpha^3(\lambda)}}{[\lambda + h(\alpha^2(\lambda) - \lambda)]} \int\limits_{\Gamma_\tau^+} \overline{u_0(s,\lambda,\omega)} \rho(s,\alpha(\lambda),\nu) ds, \tag{26}$$

$$\overline{u_0(\cdot)} = \frac{\cosh\alpha(\lambda)(h+s_3)}{\cosh\alpha(\lambda)h} \exp\{-i\alpha(\lambda)\langle\tilde{s},\omega\rangle\};$$

3) *при достаточно малых возмущениях плоскости $\Gamma_0$ точки дискретного спектра оператора $B_\tau$ не появляются.*

***Доказательство.*** Решение задачи на спектре (4) будем искать с помощью потенциала простого слоя в виде

$$u_\tau(x,\lambda) = 4\pi \int\limits_{\Gamma_\tau^+} E(x,s,\lambda)\rho(s)ds, \tag{27}$$

где $\rho(s)$ — неизвестная плотность. Используя граничное условие на $\Gamma_\tau$ и предельное значение производной по внешней нормали потенциала простого слоя при $x \to \Gamma_\tau^+$ изнутри $G_\tau$, получаем интегральное уравнение (25) относительно $\rho(\cdot,\alpha(\lambda),\nu) \in C\left(\Gamma_\tau^+\right)$, зависящей от $\alpha(\lambda)$ и $\nu$, как от параметров. Правая часть уравнения непрерывна на $\Gamma_\tau^+$ и равна нулю на $\partial\Gamma_\tau^+$. Ядро интегрального уравнения является суммой непрерывного и полярного ядер и равно нулю на $\partial\Gamma_\tau^+$. Поэтому для уравнения (25) справедливы все теоремы теории Фредгольма. Поскольку соответствующее однородное интегральное уравнение имеет лишь тривиальные решения при $\lambda$, не принадлежащих дискретному спектру $B_\tau$, то для таких $\lambda$ неоднородное интегральное уравнение, а значит и задача рассеяния, имеет единственное решение, причем справедливо представление (27). Переходя в этом представлении к пределу при $x_3 \to 0$, получаем (24). Асимптотика $E(x,y,\lambda)$ позволяет убедиться в справедливости асимптотического представления рассеянной поверхностной волны и ее амплитуды.

Для доказательства последнего утверждения теоремы в пространстве $C\left(\Gamma_\tau^+\right)$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{s\in\Gamma_\tau^+} |f(s)|$ определим интегральный оператор

$$(T(\lambda)f)(x) = -2\int\limits_{\Gamma_\tau^+} \frac{\partial E(x,s,\lambda)}{\partial n_x} f(s)ds.$$

Этот оператор вполне непрерывен, так как переводит ограниченное в $L_2\left(\Gamma_\tau^+\right)$ множество $C\left(\Gamma_\tau^+\right)$ в компактное множество, состоящее из равностепенно непрерывных функций на $\Gamma_\tau^+$. Теперь однородное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\rho(x) - (T(\lambda)\rho)(x) = 0.$$

Оценим норму этого оператора

$$\|T(\lambda)\| = 2\max_{x\in\Gamma_\tau^+} \int\limits_{\Gamma_\tau^+} \left|\frac{\partial E(x,s,\lambda)}{\partial n_x}\right| ds$$

при малых возмущениях границы $\Gamma_0$. Обозначим через $U_x^\delta$ окрестность точки $x \in \Gamma_\tau^+$ радиуса $\delta$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_\tau^+} \left|\frac{\partial E(x,s,\lambda)}{\partial n_x}\right| ds_y \le \int\limits_{\Gamma_\tau^+\setminus U_x^\delta} \left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial n_x} + \frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_3}\right| ds_y + \int\limits_{\Gamma_\tau^+\setminus U_x^\delta} \left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_3}\right| ds_y + \int\limits_{U_x^\delta} \left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial n_x}\right| ds_y.$$

Свойства вспомогательной функции Грина $E(\cdot)$ позволяют получить оценки

$$\int\limits_{\Gamma_\tau^+\setminus U_x^\delta} \left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial n_x} + \frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_3}\right| ds_y \le \int\limits_{\Gamma_\tau^+\setminus U_x^\delta} \left|\vec{n_x} + \vec{j}\right| \, |\nabla_x E|\, ds_y \le$$

$$\le \max_{x\in\Gamma_\tau^+} \left|\vec{n_x} + \vec{j}\right| \max_{x\in\Gamma_\tau^+} |\nabla_x E| \; \mathrm{mes}\,\Gamma_\tau^+ \le \|\nabla\tau(\tilde{x})\| \; \frac{c_1}{\delta^2} \mathrm{mes}\,\Gamma_\tau^+,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\tau^+\setminus U_x^\delta}\left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_3}\right|ds_y\le c_2\int\limits_{\Gamma_\tau^+\setminus U_x^\delta}(h+x_3)\left(1+\frac{1}{|x-y|^2}\right)ds_y\le$$

$$\le\max_{x\in\Gamma_\tau^+}|\tau(x)|\,\frac{c_3}{\delta^2}\mathrm{mes}\,\Gamma_\tau^+=\|\tau(x)\|\,\frac{c_3}{\delta^2}\mathrm{mes}\,\Gamma_\tau^+,$$

$$\int\limits_{U_x^\delta}\left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial n_x}\right|ds_y\le c_4\mathrm{mes}\,U_x^\delta\le c_5\delta^2,$$

из которых следует

$$2\int\limits_{\Gamma_\tau^+}\left|\frac{\partial E(\cdot)}{\partial n_x}\right|ds_y\le c\left\{\mathrm{mes}\,\Gamma_\tau^+\left(\|\tau(x)\|+\|(\nabla\tau)(x)\|\right)\right\}^{1/2},$$

а значит, при достаточно малом возмущении $\Gamma_0$ выполняется соотношение $\|T(\lambda)\|<1$. Это означает, что при таком возмущении границы однородное интегральное уравнение имеет лишь тривиальное решение при всех $\lambda\in[0,\infty)$, а значит, на непрерывном спектре точки дискретного спектра оператора $B_\tau$ не появляются. Теорема доказана.

**6. Обратная задача в линеаризованной постановке.** Если для указанного в лемме 4 возмущения $\tau(x_1,x_2)$ плоскости $\Gamma_0$ известна амплитуда $A(\lambda,\nu,\omega)$ круговой рассеянной волны при фиксированном $\lambda\in[0,\infty)$, то для $\omega=-\nu$ эта амплитуда представима в виде

$$A(\lambda,\nu,-\nu)=i\exp\{-i\pi/4\}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^{7/2}(\lambda)\hat\tau[2\alpha(\lambda),\nu]}{[\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)]\cosh^2\alpha(\lambda)h}-\gamma(\tau,\alpha(\lambda),\nu),\tag{28}$$

где $\hat\tau(\cdot)$ — преобразование Фурье возмущения $\tau(x_1,x_2)$,

$$\gamma(\cdot)=4i\exp\{-i\pi/4\}\frac{\sqrt{2\pi\alpha^3(\lambda)}}{[\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)]}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_\tau^+}\overline{u_0(s,\lambda,\nu)}\left(\int\limits_{\Gamma_\tau^+}\frac{\partial E(s,y,\lambda)}{\partial n_s}\rho(y,\alpha(\lambda),\nu)dy\right)ds.$$

При достаточно малом возмущении $\Gamma_0$

$$\gamma(\cdot)=O\left[\left(\mathrm{mes}\,\mathcal{D}(\tau)\left(\|\tau\|+\|\nabla\tau\|\right)\right)^{3/2}\right],\tag{29}$$

где $O(r)$ — величина порядка $r$.

Доказательство этого утверждения вытекает из представления

$$A(\lambda,\nu,\omega)=-\frac{i\exp\{-i\pi/4\}}{[\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)]}\sqrt{\frac{2\alpha^3(\lambda)}{\pi}}\int\limits_{\Gamma_\tau^+}\overline{u_0(s,\lambda,\omega)}\frac{\partial u_0(s,\lambda,\nu)}{\partial n_s}ds-$$

$$-\frac{2i\exp\{-i\pi/4\}}{[\lambda+h(\alpha^2(\lambda)-\lambda^2)]}\int\limits_{\Gamma_\tau^+}\overline{u_0(s,\lambda,\omega)}(\rho-\rho_0)(s,\alpha(\lambda),\nu)ds,$$

где $\rho_0(\cdot)=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial u_0(\cdot)}{\partial n_s}$ — правая часть уравнения (25), а также равенства

$$\int\limits_{\Gamma_\tau^+} \overline{u_0(s,\lambda,\omega)} \frac{\partial u_0(s,\lambda,\nu)}{\partial n_s} ds = \int\limits_{G_\tau^+} \langle \nabla_s \overline{u_0(s,\lambda,\omega)}, \nabla_s u_0(s,\lambda,\nu)\rangle ds,$$

которое при $\omega = -\nu$ имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma_\tau^+} \overline{u_0(s,\lambda,\omega)} \frac{\partial u_0(s,\lambda,\nu)}{\partial n_s} ds =$$

$$= -\frac{\alpha^2(\lambda)}{\cosh^2 \alpha(\lambda) h} \int\limits_{\mathcal{D}(\tau)} \exp\{i2\alpha(\lambda)\langle \tilde{s}, \nu\rangle\} \left( \int\limits_{-h}^{-h+\tau(\tilde{s})} ds_3 \right) d\tilde{s} =$$

$$= -\frac{\alpha^2(\lambda)}{\cosh^2 \alpha(\lambda) h} \int\limits_{\Gamma} \tau(\tilde{s}) \exp\{i2\alpha(\lambda)\langle \tilde{s}, \nu\rangle\} d\tilde{s} = -\frac{\alpha^2(\lambda)}{\cosh^2 \alpha(\lambda) h} \hat{\tau}[2\alpha(\lambda), \nu].$$

Формула (28) позволяет сформулировать и решить обратную задачу рассеяния в следующей линеаризованной постановке.

Пусть известна амплитуда $A(\lambda, \nu, -\nu)$ круговых рассеянных волн для всех $\lambda \in [0, \infty)$. Тогда, рассматривая малые возмущения плоскости $\Gamma_0$, можно пренебречь $\gamma$, имеющей оценку (29), и получить линейную часть возмущения границы слоя по формуле

$$\tau(s_1, s_2) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{C(1)} \psi(\lambda) A(\lambda, \nu, -\nu) \exp\{-2i\alpha(\lambda)\langle \tilde{s}, \nu\rangle\} d\alpha(\lambda) d\nu,$$

где

$$\psi(\lambda) = -\frac{i \exp\{-i\pi/4\}}{4\pi\sqrt{2\pi}} \frac{[\lambda + h(\alpha^2(\lambda) - \lambda^2)] \cosh^2 \alpha(\lambda) h]}{\alpha^{5/2}(\lambda)}$$

и $\nu$ — орт, произвольно меняющийся на окружности $C(1)$ единичного радиуса.

В заключение укажем, что аналогичные результаты можно получить и в случае, когда в задаче (1) на $\Gamma_\tau$ задано условие Дирихле вместо условия Неймана.


1. *Барковский В.В.* Исследование двух задач рассеяния типа задачи Стеклова // Докл. АН СССР. — 1974. — **218**, № 2. — С. 257 – 260.
2. *Барковский В.В.* Самосопряженность оператора, порожденного уравнением Шредингера и неоднородными граничными условиями на части границы // Дифференц. уравнения. — 1970. — **6**, № 3. — С. 513 – 524.
3. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1965. — 798 с.
4. *Барковский В.В.* О функции Грина самосопряженного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением и неоднородными граничными условиями //Укр. мат. журн. — 1966. — **18**, № 2. — С. 84 – 91.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953. — 679 с.
6. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
7. *Гарипов Р.М.* Неустановившиеся волны над подводным хребтом // Докл. АН СССР. — 1965. — **161**, № 3. — С. 547 – 550.
8. *Вайнберг Б.Р., Мазья В.Г.* К задаче об установившихся колебаниях слоя жидкости переменной границы // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1973. — **28**. — С. 57 – 74.
9. *Барковский В.В.* Самосопряженность операторов, порожденных общими задачами Стеклова. — Киев, 1977. — 52 с. — (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; № 77-18).


*Получено 20.04.99*