УДК 517.9

УМОВИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

О. Є. Лаврова

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: lavrova_olia@mail.ru

We consider a class of optimal control problems on finite and infinite time scales. Sufficient conditions for the existence of optimal control for such optimal control problems are obtained. These conditions are presented in terms of functions included in the right-hand side of the system and the functional.

Рассматривается задача оптимального управления на конечных и бесконечных временных шкалах. Получены достаточные условия существования оптимального управления в терминах правых частей системы и функции, входящей в критерий качества.

1. Вступ. Часовою шкалою $\mathbb{T}$ називається довільна непорожня замкнена підмножина дійсних чисел. Вивчення диференціальних рівнянь на часових шкалах останнім часом викликає великий інтерес серед дослідників. Поняття Δ-похідної ввів у 1988 р. S. Hilger в [1], що дозволило об'єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз. Основи такого аналізу викладено в монографії [2].

Останнім часом багато авторів вивчають проблеми оптимального керування на часових шкалах. Основними методами дослідження задач оптимального керування є метод динамічного програмування Беллмана і принцип максимуму Понтрягіна.

Щодо методу динамічного програмування Беллмана слід відзначити роботу [3], де отримано рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана в одномірному випадку для оптимального керування рівнянням, яке містить лінійну частину, а також роботу [4], де розглянуто загальний випадок. Відносно принципу максимуму Понтрягіна вкажемо на роботу [5], в якій отримано сильну версію принципу максимуму Понтрягіна.

Зазначимо, що вказані вище результати, як правило, дають необхідні умови оптимальності і для їх перевірки потрібно використовувати спеціальні об'єкти: функції Беллмана та Понтрягіна. Тому бажано було б мати достатні умови оптимальності у термінах вихідних об'єктів: правих частин керованих систем та критерію якості. Один із варіантів такого роду результатів наведено в [6]. Однак у вказаній роботі розглянуто лише одновимірну задачу на скінченному інтервалі. При цьому у керованому рівнянні виділено головну лінійну частину, а саме керування входить у рівняння лише адитивно.

В даній роботі розглянуто багатовимірний випадок, причому задача вивчається як на скінченному, так і на нескінченному часових інтервалах. Зауважимо також, що суттєвою відмінністю нашої постановки задачі є те, що кожний розв'язок розглядається до моменту його виходу з області, а тому у критерія якості з'являється ще один параметр, залежний від керування, — момент виходу, що значно ускладнює задачу.

Робота складається зі вступу і двох пунктів. У першому пункті розглядається задача оптимального керування на скінченному інтервалі, а у другому — на півосі.

2. Задача на скінченному інтервалі. На часовій шкалі $\mathbb{T}$ розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{gathered} x^{\Delta} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) = x_0 \end{gathered} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} L(t,x(t),u(t))\Delta t \to \inf . \tag{2}$$

Тут $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $0 \in \mathbb{T}$, $T_0 \in \mathbb{T}$, $x \in D$ — фазовий вектор, $x_0 \in D$ — фіксований вектор, x^{Δ} — Δ-похідна на часовій шкалі [2], D — область в $\mathbb{R}^d$, ∂D — її межа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, $\sigma(\tau)$ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на межу області D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла замкнена множина, вектор-функція $f_1(t,x)\colon [0,T_0]_{\mathbb{T}} \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d$ і матриця $f_2(t,x)\colon [0,T_0]_{\mathbb{T}} \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ є неперервними за сукупністю змінних і для них виконується умова лінійного росту: існує така стала $C > 0$, що для будь-яких $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $x \in \overline{D}$

$$|f_1(t,x)| \le C(1+|x|), \quad \|f_2(t,x)\| \le C(1+|x|). \tag{3}$$

Функції $L(t,x,u)$, $L_x(t,x,u)$ і $L_u(t,x,u)$ є неперервними за сукупністю змінних для довільних $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$ і задовольняють такі умови:

1) існують сталі $k > 0$ і $p > 1$ такі, що

$$L(t,x,u) \ge k|u|^p \tag{4}$$

для $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

2) існують сталі $K > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що

$$|L_x(t,x,u)| + |L_u(t,x,u)| \le K\left(1 + |u|^{p-1} + |x|^{\alpha}\right) \tag{5}$$

для $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

3) $L(t,x,u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $x \in \overline{D}$.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо:

а$_1$) $u(t) \in L_p[0,T_0)_{\mathbb{T}}$,

а$_2$) $u(t) \in U$ при $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$.

Множину допустимих керувань позначатимемо через V.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови 1–3. Тоді задача (1), (2) має розв'язок у класі допустимих керувань.*

Доведення. Зазначимо, що керування $u(t) = u_0$, $u_0 \in U$, є допустимими. Покажемо, що розв'язки $x(t)$, що відповідають керуванню u_0, є обмеженими при $t \in [0,\sigma(\tau)]_{\mathbb{T}}$, де

$\sigma(\tau)$ — момент виходу $x(t)$ на межу області D. Згідно з (3) маємо

$$|x(t)| \leq 3|x_0| + 3C(1+|u_0|) \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} (1+|x(t)|)\Delta t \leq$$

$$\leq 3|x_0| + 3C(1+|u_0|)T_0 + 3C(1+|u_0|) \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} |x(t)|\Delta t.$$

Застосовуючи аналог леми Гронуолла – Беллмана [6] (лема 2.1), отримуємо

$$|x(t)| \leq 3\left(|x_0| + C(1+|u_0|)T_0\right) e_{3C(1+|u_0|)}(T_0,0) < \infty,$$

де $e_{3C(1+|u_0|)}(T_0,0)$ — експонента на часовій шкалі, яка в даному випадку є обмеженою.

Отже, розв'язки $x(t)$ є обмеженими. Тому, оскільки функція $L(t,x,u)$ неперервна за сукупністю змінних,

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} L(t,x(t),u_0)\Delta t < \infty. \tag{6}$$

Критерій якості — невід'ємна величина, тому існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$, а отже, існує послідовність таких допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$, що $J(u_n) \to$ $\to m$ при $n \to \infty$, тобто

$$J(u_n) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} L(t,x_n(t),u_n(t))\Delta t \to m \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, $\sigma(\tau_n)$ — моменти виходу розв'язку $x_n(t)$ на межу області D. Зауважимо, що для достатньо великих n

$$J(u_n) \leq m+1.$$

Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $u_n(s) = 0$ для $\sigma(\tau_n) < s \leq T_0$, якщо $\sigma(\tau_n) < T_0$. Тоді, використовуючи умову (4), отримуємо

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} |u_n(t)|^p\Delta t = \int\limits_{[0,T_0)_{\mathbb{T}}} |u_n(t)|^p\Delta t \leq \frac{m+1}{k},$$

$$\|u_n(\cdot)\|_p \leq \left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/p}. \tag{7}$$

Отже, сім'я $u_n(\cdot)$ є слабко компактною в $L_p[0,T_0)_{\mathbb{T}}$. Тому можна вибрати підпослідовність (яку також будемо позначати через $u_n(t)$), що слабко збігається до границі $u^*(t) \in$ $\in L_p[0,T_0)_{\mathbb{T}}$ і така, що виконується умова (7). Тоді за лемою Мазура [9, с. 173] знайдеться така опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U$ $\Big(\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) = 1\Big)$, що в L_p маємо $b_k \to u^*$, $k \to \infty$. Отже, існує майже скрізь збіжна на $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$ підпослідовність b_{kl} така, що $b_{kl}(t) \to u^*(t)$ при $l \to \infty$. Оскільки U — опукла та замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$ і $u^*(t) \in U$ майже для всіх t.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків $x_n(t)$ системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$. Встановимо їх існування. Для цього перевіримо умови теореми Каратеодорі [11].

Функція $f_1(t,x) + f_2(t,x)u_n(t)$ є неперервною по x і вимірною по t для будь-якого x, а $|f_1(t,x) + f_2(t,x)u_n(t)| \leq C(1+|u_n(t)|)(1+|x(t)|)$ — інтегровною для будь-якого $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$. Отже, для будь-якого керування $u_n(t)$ існує відповідний йому розв'язок $x_n(t)$, визначений на відрізку $[0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$, і для нього справедливим є інтегральне зображення

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\,\Delta s, \quad \text{де} \quad t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}.$$

Покажемо рівномірну обмеженість розв'язків x_n при $t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$. Використовуючи нерівність Гельдера і умову лінійного росту (3), для довільного $t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$ маємо

$$|x_n(t)|^q \leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + \left|\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_1(s,x_n(s))\Delta s\right|^q + \left|\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_2(s,x_n(s))u_n(s)\Delta s\right|^q\right) \leq$$

$$\leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + \left(CT_0 + C\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|\Delta s\right)^q + \right.$$

$$\left. + C\left(\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |u_n(s)|\Delta s + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|\,|u_n(s)|\Delta s\right)^q\right) \leq$$

$$\leq 6^{q-1}C^q\left(\frac{|x_0|^q \cdot 2^{1-q}}{C^q} + T_0^q + T_0^{q/p}\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|^q\Delta s + T_0\left(\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |u_n(s)|^p\Delta s\right)^{q/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |u_n(s)|^p\Delta s\right)^{q/p}\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|^q\Delta s\right) \leq$$

$$\leq 6^{q-1}C^q\left(\frac{2^{1-q}|x_0|^q}{C^q} + T_0^q + T_0^{q/p}\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|^q\Delta s + T_0\|u_n\|_p^q + \|u_n\|_p^q\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|^q\Delta s\right).$$

Нехай

$$M_1 = 6^{q-1}C^q\left(\frac{2^{1-q}|x_0|^q}{C^q} + T_0^q + T_0\|u_n\|_p^q\right) = \text{const}, \quad M_2 = 6^{q-1}C^q\left(T_0^{q/p} + \|u_n\|_p^q\right).$$

Тоді за аналогом леми Гронуолла – Беллмана [6] (лема 2.1) маємо

$$|x_n(t)|^q \le M_1 e_{M_2}(T_0, 0) = A^q < \infty, \quad \text{при} \quad t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}. \tag{8}$$

Отже, ми отримали рівномірну обмеженість розв'язку x_n при $t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$. Тому функції x_n можна продовжити на весь інтервал $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$ таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{при} \quad t \in [0, \sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}, \\ x_n(\sigma(\tau_n)) & \text{при} \quad t \in [\sigma(\tau_n), T_0]_{\mathbb{T}}. \end{cases} \tag{9}$$

Доведемо рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T_0]_{\mathbb{T}}$.

Розглянемо такі випадки:

1) для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$ таких, що $s_1 < s_2$, використовуючи умову лінійного росту (3) і нерівність Гельдера, маємо

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \left|\int\limits_{[s_1,s_2)_{\mathbb{T}}} [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t)]\,\Delta t\right| \le$$

$$\le \int\limits_{[s_1,s_2)_{\mathbb{T}}} C(1 + |x_n(t)|)(1 + |u_n(t)|)\Delta t \le$$

$$\le C\left((s_2 - s_1) + \int\limits_{[s_1,s_2)_{\mathbb{T}}} |x_n(t)|\Delta t + \int\limits_{[s_1,s_2)_{\mathbb{T}}} |u_n(t)|\Delta t + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{[s_1,s_2)_{\mathbb{T}}} |x_n(t)|\,|u_n(t)|\Delta t\right) \le C((s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)A +$$

$$+ (s_2 - s_1)^{1/q}\|u_n(t)\|_p + \|u_n(t)\|_p A(s_2 - s_1)^{1/q}) \to 0 \ \text{ при } \ |s_2 - s_1| \to 0;$$

2) якщо $s_1 < \sigma(\tau_n) < s_2 < T_0$, то аналогічно попередньому випадку маємо

$$|y_n(s_1) - y_n(\sigma(\tau_n))| = |x_n(s_1) - x_n(\sigma(\tau_n))| \le C\Big((\sigma(\tau_n) - s_1) + (\sigma(\tau_n) - s_1)A +$$

$$+ (\sigma(\tau_n) - s_1)^{1/q}\|u_n(t)\|_p + \|u_n(t)\|_p A(\sigma(\tau_n) - s_1)^{1/q}\Big) \le$$

$$\le C\Bigg((s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)A + (s_2 - s_1)^{1/q}\|u_n(t)\|_p +$$

$$+ \|u_n(t)\|_p A(s_2 - s_1)^{1/q}\Bigg) \to 0 \quad \text{при} \quad |s_2 - s_1| \to 0;$$

3) якщо $\sigma(\tau_n) < s_1 < s_2 < T_0$, то $|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\sigma(\tau_n)) - x_n(\sigma(\tau_n))| = 0$, що і означає рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ на $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$.

За аналогом теореми Арцела – Асколі [8] (теорема 4.2) можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n(t), n \ge 1\}$ (яку знову позначимо $\{y_n(t), n \ge 1\}$) таку, що $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно на відрізку $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$.

Позначимо через $\sigma(\tau^*)$ момент першого виходу y^* на межу області D, де

$$\sigma(\tau^*) = \inf\{s \in \mathbb{T}\colon s > \tau^*\}, \quad \text{а} \quad \tau^* = \sup_{t \in [0, T_0]_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0, t]_{\mathbb{T}}\colon y^*(s) \in D\},$$

$$\sigma(\tau_n) = \inf\{s \in \mathbb{T}\colon s > \tau_n\}, \quad \text{а} \quad \tau_n = \sup_{t \in [0, T_0]_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0, t]_{\mathbb{T}}\colon y_n(s) \in D\}.$$

Покажемо, що $\sigma(\tau^*) \le \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$. Припустимо, що це не так. Тоді

$$\sigma(\tau^*) > \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n) = \sigma(\underline{\tau}).$$

1. Розглянемо випадок, коли між $\sigma(\underline{\tau})$ і $\sigma(\tau^*)$ існують точки з часової шкали. За теоремою про характеризацію нижньої межі для довільного $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} | \, \sigma(\tau_n) < \sigma(\underline{\tau}) + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\sigma(\underline{\tau}) + \delta < \sigma(\tau^*)$. Тоді існує підпослідовність $\{\sigma(\tau_{n_k}), n_k \ge 1)\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n), n \ge 1\}$ така, що можна вказати таке число $N \in \mathbb{N}$, що $\sigma(\tau_{n_k}) < \sigma(\underline{\tau}) + \delta$ для довільного $n_k \ge N$.

Тепер виберемо момент часу $t_0 \in \mathbb{T}$ так, що $t_0 \in (\sigma(\underline{\tau}) + \delta, \sigma(\tau^*))$. Тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\sigma(\tau_{n_k})) \in \partial D$. Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для довільного $n_k \ge N$ виконується нерівність

$$|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon.$$

Але якщо вибрати ε таким чином: $0 < \varepsilon < \inf_{v \in \partial D} |y^*(t_0) - v|$, то для фіксованого $t_0 \in \mathbb{T}$ такого, що $t_0 \in (\sigma(\underline{\tau}) + \delta, \sigma(\tau^*))$, будемо мати

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t_0)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\sigma(\tau_{n_k}))| > \varepsilon.$$

У цьому випадку приходимо до суперечності

2. Розглянемо тепер випадок, коли $\sigma(\sigma(\underline{\tau})) = \sigma(\tau^*)$. Як і в попередньому пункті, для фіксованого $\sigma(\underline{\tau}) \in \mathbb{T}$ маємо

$$|y^*(\sigma(\underline{\tau})) - y_{n_k}(\sigma(\underline{\tau}))| = |y^*(\sigma(\underline{\tau})) - x_{n_k}(\sigma(\tau_{n_k}))| > \varepsilon$$

і знову приходимо до суперечності.

Отже, ми показали, що $\sigma(\tau^*) \le \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$.

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$. Покажемо тепер, що функція $x^*(t)$ є розв'язком задачі (1) при $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$, який відповідає керуванню $u^*(t)$.

Розглянемо такі випадки:

1. Нехай $\sigma(\tau^*) < \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$. У цьому випадку за теоремою про характеризацію нижньої межі множина $\{n \in \mathbb{N} | \, \sigma(\tau_n) < \sigma(\tau^*)\}$ є скінченною. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\sigma(\tau_k), k \geq 0\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n), n \geq 0\}$ таку, що $\sigma(\tau_k) > \sigma(\tau^*)$ для будь-якого $k > 0$. Тоді для кожного $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Оскільки для всіх $t \in [0, T_0]_{\mathbb{T}}$ $y_k(t) \to y^*(t)$ рівномірно по $t \in [0, T_0]_{\mathbb{T}}$ при $k \to \infty$, то $x_k(t) \to x^*(t)$ при $k \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$.

З огляду на те, що $x_k(t)$ — розв'язок системи (1), маємо

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u_k(s)]\, \Delta s = \\ &= x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u^*(s)]\, \Delta s + \\ &\quad + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))]\, (u_k(s) - u^*(s))\, \Delta s + \\ &\quad + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_2(s, x^*(s))\, [u_k(s) - u^*(s)]\, \Delta s. \end{aligned} \tag{10}$$

Згідно з теоремою Лебега [10] (теорема 2.1.) з урахуванням нерівностей (3) і (8) другий інтеграл у (10) прямує до нуля при $k \to \infty$. Прямування до нуля третього інтеграла випливає з (3) і (8) внаслідок слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$ при $k \to \infty$.

Аналогічними міркуваннями переконуємося, що перший інтеграл прямує до

$$\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отже, граничним переходом у (10) отримуємо

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \quad \text{для} \quad t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}},$$

а отже, $x^*(t)$ — розв'язок системи (1), який відповідає керуванню $u^*(t)$.

2. Нехай тепер $\sigma(\tau^*) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\tau_n)$. Виберемо довільний момент $t_2 \in \mathbb{T}$ так, що $t_2 < \sigma(\tau^*)$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої межі множина $\{n \in \mathbb{N} | \, \sigma(\tau_n) < t_2\}$ є скінченною. Виберемо підпослідовність $\{\sigma(\tau_k), k \geq 0\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n), n \geq 0\}$ таку, що $\sigma(\tau_k) \in (t_2, \sigma(\tau^*))$ для будь-якого $k > 0$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]_{\mathbb{T}}$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Далі, як і в першому випадку,

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \tag{11}$$

для довільного $t \in [0, t_2]_{\mathbb{T}}$.

Встановимо тепер справедливість рівності (11) для довільного $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$. Оскільки момент часу t_2 ми вибирали довільним чином, то для довільного $t \in [0, \sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}$ рівність (11) виконується. Покажемо виконання (11) у точці $t = \sigma(\tau^*)$. Виберемо підпослідовність $\sigma(t_n) \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ таку, що $\sigma(t_n) \to \sigma(\tau^*)$. Тоді $x^*(\sigma(t_n)) \to x^*(\sigma(\tau^*))$, оскільки $x^*(t)$ є неперервною на $[0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$.

Використовуючи (3) і (8) та нерівність Гельдера, отримуємо

$$\left| \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s - \int\limits_{[0,\sigma(t_n))_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{[\sigma(t_n),\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \right| \le C(1+A)|\sigma(\tau^*) - \sigma(t_n)| +$$

$$+ \left(\int\limits_{[\sigma(t_n),\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} |f_2(s, x^*(s))|^q\, \Delta s \right)^{1/q} \left(\int\limits_{[\sigma(t_n),\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} |u^*(s)|^p\, \Delta s \right)^{1/p} \le$$

$$\le C(1+A)|\sigma(\tau^*) - \sigma(t_n)| + C(1+A)|\sigma(\tau^*) - \sigma(t_n)|^{1/q} \|u^*\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отже,

$$x^*(\sigma(t_n)) = x_0 + \int\limits_{[0,\sigma(t_n))_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \to$$

$$\to x_0 + \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s = x^*(\sigma(\tau^*)) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тому $x^*(t)$ — розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Розглянемо такі випадки:

1) $y^*(\sigma(\tau^*)) \in \partial D$. а) Нехай $\sigma(\tau^*) < \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої межі множина $\{\, n \in \mathbb{N} |\, \sigma(\tau_n) < \sigma(\tau^*)\}$ є скінченною. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\sigma(\tau_k), k \ge 0\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n), n \ge 0\}$ таку, що $\sigma(\tau_k) > \tau^*$ для будь-якого $k > 0$. Тоді для кожного $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Покажемо інтегровність функції $L(t, x^*(t), u_k(t))$ для будь-якого $k > 0$ на відрізку $[0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$:

$$|L(t, x^*(t), u_k(t))| \le |L(t, x^*(t), u_0)| + |L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0)| \le$$

$$\le |L(t, x^*(t), u_0)| + K(1 + |x^*(t)|^\alpha +$$

$$+\sup_{\lambda\in(0,1)}|u_0+\lambda(u_k(t)-u_0)|^{p-1})|u_k(t)-u_0|\le$$

$$\le|L(t,x^*(t),u_0)|+K|u_k(t)-u_0|+K|x^*(t)|^{\alpha}|u_k(t)-u_0|+$$

$$+K\sup_{\lambda\in(0,1)}|u_0+\lambda(u_k(t)-u_0)|^{p-1}|u_k(t)-u_0|.$$

Перші три доданки на $[0,\sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ інтегровні. Покажемо інтегровність останнього доданка. Нехай $A_k=\{t\in[0,\sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}\colon u_k(t)=u_0\}$. Тоді

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}\sup_{\lambda\in(0,1)}|u_0+\lambda(u_k(t)-u_0)|^{p-1}|u_k(t)-u_0|\Delta t\le$$

$$\le\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}(|u_0|+|u_k(t)-u_0|)^{p-1}|u_k(t)-u_0|\Delta t\le$$

$$\le\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}\setminus A_k}\frac{(|u_0|+|u_k(t)-u_0|)^p}{|u_0|+|u_k(t)-u_0|}|u_k(t)-u_0|\Delta t\le$$

$$\le 2^{p-1}\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}\setminus A_k}\frac{|u_0|^p+|u_k(t)-u_0|^p}{|u_k(t)-u_0|}|u_k(t)-u_0|\Delta t\le$$

$$\le 2^{p-1}\int_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}(|u_0|^p+|u_k(t)-u_0|^p)\Delta t<\infty.$$

Отже, функція $L(t,x^*(t),u_k(t))$ є інтегровною на $[0,\sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ для довільного $k>0$. Нехай $\chi_R(t)$ — характеристична функція множини $\{t\in\mathbb{T}\colon|u^*(t)|<R\}$. Оскільки $L(t,x,\cdot)$ — опукла функція, то виконується нерівність

$$L(t,x^*(t),v(t))\chi_R(t)\ge L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)+(v(t)-u^*(t))L_v(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)$$

$$\text{для всіх}\quad v(t)\in V,\quad t\in[0,\sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}.$$

Покладемо $v(t)=u_k(t)$, тоді

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}L(t,x^*(t),u_k(t))\chi_R(t)\Delta t\ge\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)\Delta t+$$

$$+\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}(u_k(t)-u^*(t))L_u(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)\Delta t.\quad(12)$$

Із умови (5) маємо

$$|L_u(t,x^*(t),u^*(t))|\chi_R(t)\le K(1+|u^*(t)|^{p-1}+|x^*(t)|^{\alpha})\le K(1+R^{p-1}+A^{\alpha}).$$

Внаслідок слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$ другий інтеграл у (12) прямує до 0 при $k \to \infty$. Тому

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t,x^*(t),u_k(t))\chi_R(t)\Delta t \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)\Delta t.$$

Оскільки $L(t,x,u) > 0$, $\chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \to 1$ при $R \to \infty$, то

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t,x^*(t),u_k(t))\Delta t \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t,x^*(t),u^*(t))\Delta t. \tag{13}$$

Розглянемо тепер величину:

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} \left[L(t,x_k(t),u_k(t)) - L(t,x^*(t),u_k(t))\right] \Delta t \right| = \\
&\quad = \left| \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} \int\limits_0^1 L_x(t,x_{\lambda_k}(t),u_k(t))(x_k(t)-x^*(t))d\lambda\Delta t \right| \leq \\
&\quad \leq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} |x_k(t)-x^*(t)|K(1+|u_k(t)|^{p-1}+|x_k(t)+x^*(t)|^{\alpha})\Delta t \leq \\
&\quad \leq K \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} |x_k(t)-x^*(t)|(1+(2A)^{\alpha})\Delta t + \\
&\qquad + K\|u_k\|_p^{p/q} \left(\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} |x_k(t)-x^*(t)|^p \Delta t \right)^{1/p},
\end{aligned} \tag{14}$$

де $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t) - x^*(t))$.

Оскільки $\|u_k\|_p$ є обмеженою, то права частина в (14) прямує до 0 при $k \to \infty$.

Далі розглянемо границю

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t,x_k(t),u_k(t))\Delta t &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} [L(t,x_k(t),u_k(t)) - L(t,x^*(t),u_k(t))]\Delta t + \\
&+ \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} [L(t,x^*(t),u_k(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))]\Delta t + \\
&+ \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t,x^*(t),u^*(t))\Delta t.
\end{aligned}$$

Перша границя у правій частині цієї нерівності згідно з (14) прямує до нуля при $k \to \infty$, а друга внаслідок (13) є невід'ємною. Тоді маємо

$$m = \lim_{k\to\infty} \inf \int\limits_{[0,\sigma(\tau_k))_{\mathbb{T}}} L(t, x_k(t), u_k(t))\Delta t \geq \lim_{k\to\infty} \inf \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t, x_k(t), u_k(t))\Delta t \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t, x^*(t), u^*(t))\Delta t.$$

Звідси

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

b) Нехай тепер $\sigma(\tau^*) = \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$. Виберемо довільний момент $t_2 \in \mathbb{T}$ так, що $t_2 < \sigma(\tau^*)$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої межі множина $\{n \in \mathbb{N} | \, \sigma(\tau_n) < t_2\}$ є скінченною. Виберемо підпослідовність $\{\sigma(\tau_k), k > 0\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n), n > 0\}$ таку, що $\sigma(\tau_k) \in (t_2, \sigma(\tau^*))$ для будь-якого $k > 0$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]_{\mathbb{T}}$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Як і в попередньому випадку, отримуємо

$$\int\limits_{[0,t_2)_{\mathbb{T}}} L(t, x^*(t), u^*(t))\Delta t \leq m \quad \text{для довільного} \quad t_2 \in [0, \sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}.$$

Звідси граничним переходом при $t_2 \to \sigma(\tau^*)$ маємо

$$J(u^*) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} L(t, x^*(t), u^*(t))\Delta t \leq m,$$

а тому

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

2. Нехай тепер $y^*(\sigma(\tau^*)) \in D$. Тому $\sigma(\tau^*) = T_0$.

Отже, $\sigma(\tau_{n_k}) = T_0$ для достатньо великих n_k. Далі доведення аналогічне доведенню першого випадку, де $\sigma(\tau^*)$ і $\sigma(\tau_k)$ замінюються на T_0.

Теорему 1 доведено.

Далі ми розглянемо випадок, коли замість умови лінійного росту (3) для функцій $f_1(t, x)$ та $f_2(t, x)$ при деякому $\alpha > 0$ виконується така умова:

$$|f_1(t, x)| \leq C(1 + |x|^\alpha), \; \|f_2(t, x)\| \leq C(1 + |x|^\alpha). \tag{15}$$

Зауваження 1. При $\alpha > 1$ умова (15) допускає вихід розв'язку задачі Коші (1) на нескінченність за скінченний час.

Однак на підставі доведеної теореми можна отримати достатні умови оптимальності і в цьому випадку. Має місце такий наслідок.

Наслідок. *Нехай у задачі оптимального керування (1), (2) замість умови лінійного росту (3) виконується умова (15), а для функції $L(t,x,u)$ виконуються умови теореми 1 з заміною умов 1 і 2 на такі умови:*

1′) існують такі сталі $k > 0$, $\alpha > 0$ та $p > 1$, що

$$L(t,x,u) \geq k(|u|^p + |x|^{\alpha q}) \tag{16}$$

для $t \in [0,T_0]_{\mathbb{T}}$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$, де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

2′) існує така стала $K > 0$, що

$$|L_x(t,x,u)| + |L_u(t,x,u)| \leq K\left(1 + |u|^{p-1} + |x|^{\alpha(q-1)}\right). \tag{17}$$

Крім того, нехай існує хоча б одне таке допустиме керування $u_1(t)$, що

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau_1))_{\mathbb{T}}} L(t,x_1(t),u_1(t))\Delta t < \infty, \tag{18}$$

де x_1 — розв'язок задачі (1), що відповідає керуванню u_1.

Тоді задача (1), (2) має розв'язок у класі допустимих керувань V.

Доведення. З урахуванням (18) існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$ і послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ така, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$.

Отже, для достатньо великих n

$$J(u_n) \leq m + 1.$$

Тоді з (16) отримаємо

$$k \int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} \left(|u_n(t)|^p + |x_n(t)|^{\alpha q}\right) \Delta t \leq \int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} L(t,x_n,u_n)\Delta t \leq m + 1.$$

Звідси маємо

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} |x_n(t)|^{\alpha q}\Delta t \leq \left(\frac{m+1}{k}\right).$$

Але, використовуючи нерівність (15) на інтервалі існування розв'язку $x_n(t)$, знаходимо

$$|x_n(t)| = \left| x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_1(s, x_n(s))\Delta s + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_2(s, x_n(s)) u_n(s)\Delta s \right| \leq$$

$$\leq |x_0| + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} C(1 + |x_n(s)|^{\alpha})\Delta s + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} C(1 + |x_n(s)|^{\alpha}) u_n(s)\Delta s \leq$$

$$\leq |x_0| + CT_0 + CT_0^{1/p} \left(\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|^{\alpha q}\Delta s \right)^{1/q} + CT_0^{1/p} \|u_n(s)\|_p +$$

$$+ C \left(\int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |x_n(s)|^{\alpha q}\Delta s \right)^{1/q} \|u_n(s)\|_p \leq$$

$$\leq |x_0| + CT_0 + 2CT_0^{1/p} \left(\frac{m+1}{k} \right)^{1/q} + C \left(\frac{m+1}{k} \right)^{2/q}.$$

Отже, для довільних $t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$ розв'язки $x_n(t)$ рівномірно обмежені, а тому $x_n(\sigma(\tau_n)) < \infty$. Далі доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1.

3. Задача оптимального керування на півосі. На часовій шкалі $\mathbb{T}$ ($\sup \mathbb{T} = \infty$) розглянемо задачу оптимального керування (1) з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} g(t) L(t, x(t), u(t))\Delta t \to \inf. \tag{19}$$

Тут $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $0 \in \mathbb{T}$, $x \in D$ — фазовий вектор, $x_0 \in D$ — фіксований вектор, x^{Δ} — Δ-похідна на часовій шкалі [2], D — обмежена область з $\mathbb{R}^d$, $\sigma(\tau)$ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на межу області D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла замкнена множина, вектор-функція $f_1(t, x)\colon [0, +\infty)_{\mathbb{T}} \times D \to \mathbb{R}^d$ і матриця $f_2(t, x)\colon [0, +\infty)_{\mathbb{T}} \times D \to \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ є неперервними за сукупністю змінних і для них виконується умова Ліпшиця, тобто існує така стала $H > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ та $u \in U$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered} |f_1(t, x_1) - f_1(t, x_2)| \leq H|x_1 - x_2|, \\ \|f_2(t, x_1) - f_2(t, x_2)\| \leq H|x_1 - x_2|. \end{gathered} \tag{20}$$

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ і $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних $t \in \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in D$, $u \in U$ і задовольняють такі умови:

1) $L(t, x, u) \geq 0$ для будь-яких $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in D$ та $u \in U$;

2) існують такі сталі $C > 0$ і $p \geq 2$, що для будь-яких $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in D$, $u \in U$ виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq C(1 + |u|^p); \tag{21}$$

3) існує таке $K > 0$, що для будь-яких $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in D$ та $u \in U$ виконується

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K\left(1 + |u|^{p-1}\right); \tag{22}$$

4) $L(t, x, u)$ є опуклою по u при будь-яких фіксованих $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ і $x \in D$.

Керування $u(t)$ вважається допустимим, якщо:

b$_1$) $u(t) \in U$ при $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$;

b$_2$) існує стала $C_1 > 0$, що не залежить від $u(t)$ з виконанням умови

$$\int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} |u(t)|^p \Delta t \leq C_1.$$

Множину допустимих керувань будемо називати допустимою для задачі (1), (19) і позначатимемо її через V.

Має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай у системі (1) з критерієм якості (19) для функцій $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $g(t)$ та $L(t, x, u)$ виконуються умови постановки задачі на півосі. Функція $g(t)$ належить $L_1([0, +\infty)_{\mathbb{T}})$ і $0 \leq g(t) \leq 1$ для будь-якого $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.*

Тоді задача (1), (19) має розв'язок у класі допустимих керувань.

Доведення. Існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$, і тому існує послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ таких, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$, тобто

$$J(u_n) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t, x_n(t), u_n(t))\Delta t \to m, \quad n \to \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, $\sigma(\tau_n)$ — моменти виходу розв'язку $x_n(t)$ на межу області D.

Умова b$_2$) гарантує слабку компактність послідовності $u_n(t)$, тобто послідовність $u_n(t)$ слабко збігається до границі $u^*(t) \in L_p[0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що $u^*(t) \in U$ майже для всіх t.

Розглянемо послідовність розв'язків системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$:

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\,\Delta s, \quad t \in [0, \sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}.$$

За функціями $x_n(t)$ побудуємо функції $y_n(t)$, які визначимо на всю множину $[0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{при} \quad t \in [0, \sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}, \\ x_n(\sigma(\tau_n)) & \text{при} \quad t \in [\sigma(\tau_n), +\infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases} \tag{23}$$

Виберемо довільний момент часу $T_0 \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ і зафіксуємо його. Як і при доведенні теореми 1, можна показати рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ на $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$. Тоді за аналогом теореми Арцела – Асколі [8] (теорема 4.2) на кожному обмеженому відрізку часу $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$ можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність (яку будемо позначати через $\{y_n^k(t), n \geq 1\}$) таку, що $y_n^k(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ на $[0, T_0]_{\mathbb{T}}$. Покажемо, що існує підпослідовність функцій $\{y_n^n(t), n \geq 1\}$, яка збігається поточково до функції $y^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Для цього розглянемо послідовність з часової шкали, яка задовольняє такі умови: 1) $\mathbb{T}_n \in \mathbb{T}$; 2) $\forall n_1 < n_2 \colon [0, \mathbb{T}_{n_1}]_{\mathbb{T}} \subset [0, \mathbb{T}_{n_2}]_{\mathbb{T}}$; 3) $\cup_{n \in \mathbb{N}} [0, \mathbb{T}_n]_{\mathbb{T}} = [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Для будь-якого натурального N існує підпослідовність $\{y_n^N(t), n \geq 1\}$ послідовності $\{y_n^{N-1}(t), n \geq 1\}$ така, що

$$y_n^N(t) \rightrightarrows y_N^*(t) \quad \text{для будь-якого} \quad t \in [0, \mathbb{T}_N]_{\mathbb{T}},$$

де $y_N^*(t) = y_{N-1}^*(t)$ при $t \in [0, \mathbb{T}_{N-1}]_{\mathbb{T}}$ і т. д.

Використовуючи діагональний метод, із цих послідовностей виділяємо таку підпослідовність $\{y_n^n(t), n \geq 1\}$:

$$y_1^1(t), y_2^2(t), y_3^3(t), \ldots, y_n^n(t), \ldots.$$

Ця послідовність поточково збігається до функції $y^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Далі цю послідовність будемо позначати як $\{y_n(t), n \geq 1\}$.

Позначимо через $\sigma(\tau^*)$ момент першого виходу $y^*(t)$ на межу області D, де

$$\sigma(\tau^*) = \inf\{s \in \mathbb{T} \colon s > \tau^*\}, \quad \tau^* = \sup_{t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0, t]_{\mathbb{T}} \colon y^*(s) \in D\},$$

$$\sigma(\tau_n) = \inf\{s \in \mathbb{T} \colon s > \tau_n\}, \quad \tau_n = \sup_{t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0, t]_{\mathbb{T}} \colon y_n(s) \in D\}.$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що $\sigma(\tau^*) \leq \lim_{n \to \infty} \inf \sigma(\tau_n)$.

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ у випадку скінченного $\sigma(\tau^*)$ і $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ у випадку $\sigma(\tau^*) = \infty$.

Покажемо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком системи (1) при всіх t до моменту його виходу на межу області, який відповідає керуванню $u^*(t)$.

Візьмемо довільне $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ у випадку $\sigma(\tau^*) < \infty$ і $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при $\sigma(\tau^*) = \infty$. Виберемо достатньо велике $T_0 \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ так, що для вказаного t $y_n(t) = x_n(t)$ для досить великих n. Оскільки $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно на $[0, T_0)_{\mathbb{T}}$, то і $x_n(t) \to$ $\to x^*(t)$ рівномірно по $t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}$, де

$$\sigma(\tau_1^*) = \inf\{s \in \mathbb{T} \colon s > \tau_1^*\}, \quad \tau_1^* = \sup_{t \in [0, T_0]_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0, t]_{\mathbb{T}} \colon x^*(s) \in D\}.$$

Оскільки $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), то

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\, \Delta s =$$

$$= x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u^*(s)]\, \Delta s +$$

$$+ \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s))]\, (u_n(s) - u^*(s))\, \Delta s +$$

$$+ \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_2(s, x^*(s))\, [u_n(s) - u^*(s)]\, \Delta s. \qquad (24)$$

Використовуючи умову (20) і нерівність Гельдера, можна показати, що другий доданок у (24) прямує до нуля. Внаслідок слабкої збіжності послідовності керувань $u_n(t)$ до $u^*(t)$ при $n \to \infty$ на відрізку $t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}$ останній інтеграл у (24) також прямує до нуля при $n \to \infty$.

Переходячи до границі в (24) при $n \to \infty$, отримуємо

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, \Delta s \quad \text{для будь-якого} \quad t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}.$$

Звідси випливає, що $x^*(t)$ — розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}$.

Оскільки момент часу T_0 вибрано довільним чином, то $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), який відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ до моменту першого виходу розв'язку на межу області.

Оскільки до цього моменту розв'язок $x_n(t)$ збігається з $y_n(t)$, то послідовність $\{x_n(t)\colon n \geq 1\}$ збігається поточково до $x^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Розглянемо такі випадки:

1. Нехай $x^*(\sigma(\tau^*)) \in \partial D$. Оскільки функція $L(t, x, \cdot)$ є опуклою, то має місце нерівність

$$g(t)L(t, x^*(t), v(t)) \geq g(t)L(t, x^*(t), u^*(t)) +$$

$$+ (v(t) - u^*(t))g(t)L_v(t, x^*(t), u^*(t)), \quad \text{де} \quad v \in U, \quad t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}.$$

Покладемо $v = u_n(t)$, тоді отримаємо оцінку

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t, x^*(t), u_n(t))\Delta s \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t, x^*(t), u^*(t))\Delta s +$$

$$+ \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} (u_n(t) - u^*(t))g(t)L_u(t, x^*(t), u^*(t))\Delta s. \qquad (25)$$

Згідно з умовою (22) другий інтеграл у (25) прямує до нуля.

Переходячи до границі у (25), отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\inf \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))\Delta t \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\Delta t. \tag{26}$$

Розглянемо також вираз

$$\left|\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)\left[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))\right]\Delta t\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)\int\limits_0^1 L_x(t,(1-\lambda)x_n(t)+\lambda x^*(t),u_n(t))|x_n(t)-x^*(t)|d\lambda\Delta t\right| \leq$$

$$\leq K \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)|x_n(t)-x^*(t)|\Delta s +$$

$$+ K\left(\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} |u_n(t)|^p\Delta t\right)^{1/q}\left(\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)^p|x_n(t)-x^*(t)|^p\Delta s\right)^{1/p}. \tag{27}$$

Із поточкової збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$ при $t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ та теореми Лебега випливає, що дана величина прямує до нуля при $n \to \infty$.

Розглянемо величину

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))\Delta t \pm \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))\Delta t \pm$$

$$\pm \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\Delta t =$$

$$= \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)\left[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))\right]\Delta t +$$

$$+ \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)\left[L(t,x^*(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))\right]\Delta t +$$

$$+ \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\Delta t.$$

Перший інтеграл у правій частині нерівності прямує до нуля з (27), а другий інтеграл більший або дорівнює нулю з (26). Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\inf \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))\Delta t \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\Delta t,$$

тобто

$$J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))\Delta t \leq \lim_{n\to\infty}\inf J(u_n(t)).$$

Оскільки $\inf_{u\in U} J(u) \leq J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty}\inf J(u_n) = m$, то $J(u^*) = m$.

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

2. Нехай тепер $x^*(\sigma(\tau^*)) \in D$, тоді $\sigma(\tau^*) = \infty$. У цьому випадку доведення теореми аналогічне доведенню першого пункту.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Hilger S.* Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten: PhD Thesis. — Univ. Würzburg, 1988.
2. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001.
3. *Zhan Z., Wei W., Xu H.* Hamilton – Jacobi – Bellman equations on time scales // Math. and Comput. Modelling. — 2009. — **49**. — P. 2019 – 2028.
4. *Ластівка Л. О., Лаврова О. Є.* Метод динамічного програмування для систем диференціальних рівнянь на часових шкалах // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім.Т. Шевченка. — 2014. — Вип. 2. — С. 71 – 76.
5. *Bourdin L., Trelat E.* Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales // SIAM Contr. Optim. — 2013. — **51**, № 5. — P. 3781 – 3813,
6. *Zaidong Z., Wei W., Yinfei L., Honglei X.* Existence for calculus of variations and optimal control problems on time scales // Int. J. Innov. Comput., Inform. and Contr. — 2012. — **5**, № 8. — P. 3793 – 3808.
7. *Ли Э., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 576 с.
8. *Gong Y., Xiang X.* A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales // J. Industr. Manag. Optim. — 2009. — **5**, № 1. — P. 1 – 10.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
10. *Cabada A., Vivero D.* Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives // Math. and Comput. Modelling. — 2006. — **43**. — P. 194 – 207.
11. *Bourdin L., Trelat E.* General Cauchy – Lipschitz theory for Δ-Cauchy problems with Caratheodory dynamics on time scales // J. Difference Equat. and Appl. — 2014. — **20**, № 4.

Одержано 18.06.15