УДК 517.968

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Н. О. Козлова

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ, 01004, Україна

В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

We obtain necessary and sufficient conditions for solvability and find a general form of the solution of a linear integral equation (with square summable kernel) and of a boundary-value problem for such equations.

Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости и общий вид решения линейного интегрального уравнения (с ядром, суммируемым с квадратом) и краевой задачи для таких уравнений.

Інтегро-диференціальні рівняння та їх системи є математичними моделями різноманітних фізичних процесів. Широта застосувань стала поштовхом до інтенсивного розвитку теорії таких рівнянь протягом останнього півстоліття. Зокрема, в [1] встановлено умови існування розв'язку крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. Питання сумісності та відшукання наближених розв'язків подібних задач, за умови єдиності розв'язку інтегро-диференціального рівняння, розглядалися в роботах А. Ю. Лучки та його учнів [2–4]. У даній роботі запропоновано підхід до дослідження нетерових задач для інтегральних рівнянь, ядра яких не є виродженими.

1. Постановка задачі. Розглядається лінійна неоднорідна крайова задача для інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{1}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Тут $K(t,s)$ — ядро, сумовне з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, S — обмежений лінійний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $S = \mathrm{col}\,(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p) : L_2[a,b] \to$ $\to R^p$, $S_i\colon L_2[a,b] \to R$, $\alpha = \mathrm{col}\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p) \in R^p$.

2. Умови існування розв'язку інтегрального рівняння (1). Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо до розгляду величини

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \quad a_{ij} = \int_a^b\int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds. \tag{3}$$

Застосовуючи вирази (3) до інтегрального рівняння (1), отримуємо зліченну систему алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = f_i, \quad i = \overline{1, \infty}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty. \tag{5}$$

Запишемо систему (4) у векторному вигляді

$$\Lambda z = g, \tag{6}$$

де

$$z = \mathrm{col}\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots) \in \ell_2, \quad g = \mathrm{col}\,(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_i,\ \ldots) \in \ell_2, \tag{7}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1 - a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Згідно з [5, с. 69], для системи (6) справедливим є наступний результат.

Теорема 1. *Однорідна система (6)* $(g = 0)$ *має розв'язок* $z \in \ell_2$:

$$z = P_\Lambda c, \quad c \in \ell_2. \tag{9}$$

Неоднорідна система (6) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda^*} g = 0, \tag{10}$$

та має розв'язок $z \in \ell_2$:

$$z = P_\Lambda c + \Lambda^+ g, \quad c \in \ell_2. \tag{11}$$

Тут P_Λ *— матриця-проектор на* $N(\Lambda)$, Λ^+ *— псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до* Λ *матриця,* P_{Λ^*} *— матриця-проектор на* $N(\Lambda^*)$ *знаходяться за формулами [6, с. 501]*

$$\Lambda^+ = \lim_{\omega \to +0} (\Lambda^* \Lambda + \omega I)^{-1} \Lambda^*, \quad P_\Lambda = I - \Lambda^+ \Lambda, \quad P_{\Lambda^*} = I - \Lambda \Lambda^+. \tag{12}$$

Якщо система (6) має розв'язок, тобто виконується умова (10), то, використовуючи теорему Ріса – Фішера [7, с. 171], переконуємося, що існує елемент $x \in L_2[a, b]$ такий, що x_i, $i = \overline{1, \infty}$, які визначаються із системи (4), є його коефіцієнтами Фур'є, тобто має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{13}$$

де

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_i(t),\ \ldots), \tag{14}$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$.

У роботі [8, с. 266] показано, що елемент $x(t)$, який визначається співвідношенням (13), і є шуканим розв'язком рівняння (1).

Отже, теорему 1 можна переформулювати для інтегрального рівняння (1).

Теорема 2. *Однорідне рівняння (1)* $(f(t) = 0)$ *має розв'язок* $x \in L_2[a,b]$:

$$x(t) = \Phi(t)P_{\Lambda}c \quad \forall c \in \ell_2. \tag{15}$$

Неоднорідне рівняння (1) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda^*}g = 0, \tag{16}$$

та має розв'язок $x \in L_2[a,b]$:

$$x(t) = \Phi(t)P_{\Lambda}c + \Phi(t)\Lambda^+g \quad \forall c \in \ell_2. \tag{17}$$

Зазначимо, що оператор Λ, який фігурує у лівій частині операторного рівняння (6), має вигляд $\Lambda = I - A$, де $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ — оператор, який, залежно від властивостей ядра $K(t,s)$, може мати досить складну структуру. Однією із прийнятих у літературі класифікацій таких операторів Λ є класифікація за розмірністю їх ядер та ядер спряжених до них операторів $\Lambda^*\colon \ell_2 \to \ell_2$ [5, с. 22]. А саме, система (6) може бути:

нормально розв'язною ($\dim\ker\Lambda = \infty$, $\dim\ker\Lambda^* = \infty$);

n-нормальною ($\dim\ker\Lambda < \infty$, $\dim\ker\Lambda^* = \infty$);

d-нормальною ($\dim\ker\Lambda = \infty$, $\dim\ker\Lambda^* < \infty$);

нетеровою ($\dim\ker\Lambda < \infty$, $\dim\ker\Lambda^* < \infty$), зокрема, якщо $\dim\ker\Lambda = \dim\ker\Lambda^*$, то фредгольмовою.

У даному випадку, оскільки $K(t,s)$ — сумовне з квадратом ядро, оператор A є компактним і, як відомо, для оператора Λ справедливою є альтернатива Фредгольма [7, с. 481]. Отже, ядро та коядро оператора Λ є скінченновимірними та мають однакову розмірність ($\dim\ker\Lambda = \dim\ker\Lambda^* = r < \infty$), а оператор Λ є фредгольмовим. Тобто зображення розв'язків (15) та (17) є r-параметричними сім'ями розв'язків однорідного та неоднорідного рівнянь (1) відповідно, а кількість лінійно незалежних умов розв'язності (16) дорівнює r. Більш детально це питання ми розглянемо у наступному пункті.

Зауважимо, що низку робіт присвячено дослідженню скінченно сингулярних операторів [9, с. 14]. Відомо [9, с. 18], наприклад, що якщо оператори Λ та Λ^* є скінченно сингулярними, то Λ буде нетеровим.

3. Випадок симетричного оператора. Результати, отримані у попередньому пункті, набирають більш конкретного вигляду, якщо накласти на ядро $K(t,s)$ інтегрального оператора

$$(Kw)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)w(s)ds \tag{18}$$

додаткові умови.

Припустимо, що ядро $K(t,s)$, яке фігурує у формулі (18), є симетричним, тобто справджується рівність $K(t,s) = K^*(t,s) = K(s,t)$.

Візьмемо за систему $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ систему власних функцій оператора (18), що визначаються із співвідношень

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \int\limits_a^b K(t,s)\varphi_i(s)ds,$$

де λ_i — характеристичні числа оператора (18).

Власні функції симетричного оператора є ортогональними [10, с. 140], тому в даному випадку матриця Λ набирає вигляду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2} & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\lambda_i - 1}{\lambda_i} \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Можливими є два випадки:

1) усі $\lambda_i \neq 1$;

2) існує таке i, при якому $\lambda_i = 1$.

Розглянемо спочатку перший випадок. Очевидно, що матриця Λ має обернену

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \Lambda^+, \tag{19}$$

$$P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = 0. \tag{20}$$

Враховуючи у зображенні (15) та умові (16) рівність (20), переконуємося, що умова розв'язності неоднорідного рівняння (1) завжди виконується, і воно має єдиний розв'язок $x(t) = 0$.

Єдиний розв'язок неоднорідного рівняння (1), згідно із зображенням (17), позначеннями (7), (3), (14) та виразами (19), (20), буде мати вигляд

$$\Lambda^+ g = \mathrm{col}\left(\frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_1 - 1}, \frac{\lambda_2 f_2}{\lambda_2 - 1}, \ldots, \frac{\lambda_i f_i}{\lambda_i - 1}, \ldots\right) =$$

$$= \mathrm{col}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}\int\limits_a^b f(t)\varphi_1(t)dt, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}\int\limits_a^b f(t)\varphi_2(t)dt, \ldots, \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1}\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \ldots\right),$$

$$x(t) = \Phi(t)\Lambda^+ g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds = f(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds.$$

Тепер теорему 2 можна переформулювати таким чином.

Теорема 3. *Однорідне рівняння (1)* $(f(t) = 0)$ *має єдиний розв'язок*

$$x(t) = 0.$$

Неоднорідне рівняння (1) завжди є розв'язним та має єдиний розв'язок $x \in L_2[a,b]$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds. \tag{21}$$

Розглянемо другий випадок. Нехай існує власне значення $\lambda_i = 1$ оператора (18) кратності r і $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_r(t)$ — лінійно незалежні власні функції, що відповідають цьому власному значенню. Тоді, використовуючи формули (12), отримуємо

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\lambda_{r+1}}{\lambda_{r+1} - 1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{23}$$

і розв'язок однорідної системи (6) має вигляд

$$z = \mathrm{col}\,(c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_r,\, 0,\, \ldots) \quad \forall c_i \in R, \quad i = \overline{1,r},$$

при виконанні умови (10)

$$f_i = 0, \quad i = \overline{1,r}.$$

Розв'язок неоднорідної системи (6) матиме вигляд

$$z = \mathrm{col}\left(c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_r,\, \frac{\lambda_{r+1} f_{r+1}}{\lambda_{r+1} - 1},\, \frac{\lambda_{r+2} f_{r+2}}{\lambda_{r+2} - 1},\, \ldots\right) \quad \forall c_i \in R, \quad i = \overline{1,r}.$$

Однорідне рівняння (1), згідно з (15), (14) і (23), матиме розв'язок, який зображується у вигляді

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i\varphi_i(t) \quad \forall c_i \in R, \quad i = \overline{1,r}, \tag{24}$$

а умова (16), згідно з (3), (7), (23), має вигляд

$$\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt = 0, \quad i = \overline{1,r}. \tag{25}$$

Зображення (17) для розв'язку неоднорідного рівняння (1) із використанням формул (3), (7), (14), (22), (24) набирає вигляду

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i\varphi_i(t) + \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i\varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int\limits_a^b f(s)\varphi_i(s)ds \quad \forall c_i \in R, \quad i = \overline{1,r}. \tag{26}$$

Отже, у цьому випадку теорему 2 можна переформулювати таким чином.

Теорема 4. *Однорідне рівняння (1) $(f(t) = 0)$ має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a,b]$ (24). Неоднорідне рівняння (1) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно незалежних умов (25), та має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a,b]$ (26).*

4. Критерій розв'язності лінійної неоднорідної крайової задачі для інтегрального рівняння. Повернемося тепер до розгляду питання існування та структури розв'язку крайової задачі (1), (2). Очевидно, що навіть якщо інтегральне рівняння (1) має розв'язок, то він може не задовольняти крайову умову (2). Тобто нам потрібно знайти такі умови на коефіцієнти початкової задачі, при яких це виконуватиметься. Згідно з теоремою 2, якщо виконується умова (16), розв'язок лінійного неоднорідного інтегрального рівняння (1) має вигляд (17). Для того щоб цей розв'язок був розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і достатньо, щоб він задовольняв умову (2), тобто щоб існував такий вектор параметрів $c = \mathrm{col}\,(c_1, c_2, \ldots, c_r) \in R^r$, $r = \dim\ker\Lambda = \dim\ker\Lambda^* < \infty$, що фігурує у зображенні (17), який задовольняє алгебраїчну систему

$$Bc = \alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g, \tag{27}$$

де $(p \times r)$-вимірна матриця B має вигляд

$$B = S\Phi(\cdot)P_\Lambda. \tag{28}$$

Згідно з критерієм розв'язності системи (27) [5, с. 69], така стала $c \in R^r$ існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B^*_{d_1}}(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) = 0, \quad d_1 = p - \mathrm{rank}\,B, \tag{29}$$

та має вигляд

$$c = P_{B_{d_2}} c_{d_2} + B^{+}(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^{+} g) \quad \forall c_{d_2} \in R^{d_2}, \quad d_2 = r - \operatorname{rank} B. \tag{30}$$

Тут $(r \times d_2)$-вимірна матриця $P_{B_{d_2}}$, що складається із повної системи d_2 лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_B, $(r \times p)$-вимірна матриця B^{+}, що є псевдооберненою (за Муром – Пенроузом) до матриці B, $(d_1 \times p)$-вимірна матриця $P_{B^*_{d_1}}$, що складається із повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{B^*}, обчислюються за формулами, аналогічними формулам (12).

Підставляючи (30) в (17), отримуємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$x(t) = \Phi(t) P_\Lambda P_{B_{d_2}} c_{d_2} + \Phi(t) P_\Lambda B^{+}(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^{+} g) + \Phi(t)\Lambda^{+} g \quad \forall c_{d_2} \in R^{d_2}. \tag{31}$$

Отже, справедливим є таке твердження.

Теорема 5. *Однорідна крайова задача (1), (2)* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a, b]$:

$$x(t) = \Phi(t) P_\Lambda P_{B_{d_2}} c_{d_2} \quad \forall c_{d_2} \in R^{d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються r *лінійно незалежних умов (16) та* d_1 *лінійно незалежних умов (29), і має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a, b]$ *вигляду (31).*

5. Крайова задача для рівняння з симетричним оператором. Розглянемо випадок, коли оператор K, який визначається зображенням (18), є симетричним. Як зазначено у пункті 3, за цієї умови можна отримати більш уточнені результати і теорема 5 набере більш конкретного вигляду. Як і раніше, можливими є два випадки: 1) усі $\lambda_i \neq 1$; 2) існує таке i, при якому $\lambda_i = 1$.

У випадку, коли всі $\lambda_i \neq 1$, справджується теорема 3, тобто лінійне однорідне інтегральне рівняння (1) $(f(t) = 0)$ має лише нульовий розв'язок, а лінійне неоднорідне інтегральне рівняння (1) — єдиний розв'язок вигляду (21). Очевидно, що $x(t) = 0$ задовольняє однорідну умову (2) $(\alpha = 0)$ і, отже, однорідна крайова задача (1), (2) $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ має єдиний розв'язок. Неоднорідна ж крайова задача (1), (2) буде розв'язною лише тоді, коли розв'язок неоднорідного інтегрального рівняння (1) задовольнятиме умову (2), тобто повинна виконуватись жорстка умова на неоднорідність α в крайовій умові

$$Sx(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s) ds S\varphi_i(\cdot) = \alpha.$$

Враховуючи рівність (20), позначення (28), а також формули (12), переконуємося, що

$$B = 0, \quad P_B = P_{B^*} = I. \tag{32}$$

Використавши (32), теорему 5 можна сформулювати у такому вигляді.

Теорема 6. *Однорідна крайова задача (1), (2)* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *має єдиний розв'язок*

$$x(t) = 0.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються p *умов*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s) ds S_\nu \varphi_i(\cdot) = \alpha_\nu, \quad \nu = \overline{1, p},$$

та має єдиний розв'язок $x \in L_2[a, b]$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s) ds.$$

Розглянемо другий випадок, тобто нехай існує власне значення $\lambda_i = 1$ оператора (18) кратності r. Тоді, згідно з теоремою 4, якщо виконується умова (25), розв'язок лінійного неоднорідного інтегрального рівняння (1) має вигляд (26). Для того щоб цей розв'язок був розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і достатньо, щоб він задовольняв умову (2), тобто щоб вектор параметрів $c = \mathrm{col}\,(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_r) \in R^r$, що фігурує у зображенні (26), задовольняв алгебраїчну систему

$$Bc = \alpha - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s) ds S \varphi_i(\cdot), \tag{33}$$

де $(p \times r)$-вимірна матриця B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} S_1\varphi_1(\cdot) & S_1\varphi_2(\cdot) & \ldots & S_1\varphi_r(\cdot) \\ S_2\varphi_1(\cdot) & S_2\varphi_2(\cdot) & \ldots & S_2\varphi_r(\cdot) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_p\varphi_1(\cdot) & S_p\varphi_2(\cdot) & \ldots & S_p\varphi_r(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Використавши критерій розв'язності системи (33) [5, с. 69], можемо сформулювати теорему 5 таким чином.

Теорема 7. *Однорідна крайова задача (1), (2)* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a, b]$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_2} c_j p_{B_{ij}} \varphi_i(t) \quad \forall c_j \in R, \quad j = \overline{1, d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються r *лінійно незалежних умов (25) та* d_1 *лінійно незалежних умов*

$$\sum_{\nu=1}^{p} p_{B^*_{k\nu}} \left(\alpha_\nu - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s) ds S_\nu \varphi_i(\cdot) \right) = 0, \quad k = \overline{1, d_1},$$

і має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a,b]$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{d_2} c_j p_{B_{ij}} \varphi_i(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{p} b_{j\nu}^{+} \left(\alpha_\nu - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds S_\nu \varphi_i(\cdot) \right) \varphi_j(t) +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds \quad \forall c_j \in R, \quad j = \overline{1, d_2}.$$

Тут $p_{B_{ij}}$, $p_{B^*_{k\nu}}$ та $b^+_{j\nu}$ — елементи матриць $P_{B_{d_2}}$, $P_{B^*_{d_1}}$ та B^+ відповідно.

***Зауваження.* 1.** Якщо ядро $K(t,s)$ інтегрального рівняння (1) є виродженим, то отримані тут результати збігаються з результатами роботи [1].

2. Наведені вище результати будуть корисними при дослідженні умов біфуркації та розгалуження розв'язків лінійних та нелінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь.

Література

1. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576 – 1579.
2. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.
3. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Проекційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями та керуванням // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 208 – 216.
4. *Лучка А. Ю., Мельничук В. Ф.* Побудова розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 215 – 222.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 p.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
8. *Гильберт Д.* Избранные труды. — М.: Факториал, 1998. — Т. 2. — 608 с.
9. *Maurey B.* Operator theory and exotic Banach spaces // Online Lect. Notes/http: //www.math.jussieu.fr/ maurey/ articles/ csp.pdf, 1994.
10. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 300 с.

Одержано 13.07.15