УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

В. М. Евтухов

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: emden@farlep.net

Муса Джабер Абу эль-шаур

Ал ал-байт ун-т, Мафрак, Иордания
e-mail: drmousa67@yahoo.com

Asymptotic representations of some classes of solutions of nonautonomous nth order ordinary differential equations which are somewhat close to linear equations are established.

Встановлено асимптотичні зображення для деяких класів розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку, що у деякому сенсі є близькими до лінійних рівнянь.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma}, \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0 < +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq \leq +\infty^1$.

При $\sigma = 0$ оно является линейным дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y, \tag{1.2}$$

асимптотическое поведение решений которого в случае $\omega = +\infty$ достаточно подробно исследовано (см., например, монографию И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [1]).

При любых σ и $n = 2$, т. е. в случае дифференциального уравнения второго порядка, в работах [2–6] изучалось асимптотическое поведение $P_\omega(\lambda_0)$-решений.

Решение y уравнения (1.1), заданное и отличное от нуля на промежутке $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(\lambda_0)$-решением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad k = \overline{0, n-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y^{(n-1)}(t))^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0. \tag{1.3}$$

Целью настоящей работы является установление при $n \geq 2$ необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(\lambda_0)$-решений уравнения (1.1), для которых

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\},$$

[1] Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $\omega - a < 1$ при $\omega < +\infty$.

а также асимптотических представлений при $t \uparrow \omega$ для всех таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

Введем вспомогательные обозначения, положив

$$a_{0k} = (n-k)\lambda_0 - (n-k-1) \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad I_A(t) = \int\limits_A^t [\pi_\omega(\tau)]^{n-1} p(\tau)\, d\tau, \tag{1.5}$$

где

$$A = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^{n-1} p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^{n-1} p(\tau)\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Для уравнения (1.1) имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $\sigma \neq 1$ и $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$. Тогда для существования $P_\omega(\lambda_0)$-решений уравнения (1.1) необходимо, а если*

$$\sigma \neq a_{01}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{0k}}\right) \tag{1.6}$$

и алгебраическое относительно ρ уравнение

$$\prod_{j=1}^{n-1}(a_{0j}+\rho) + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{k-1}(a_{0j}+\rho)\prod_{j=k+1}^{n-1} a_{0j} = 0 \tag{1.7}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_0 \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{0k}\right) [(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^n > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{1.8}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)|\pi_\omega(t)|^n \, |(1-\sigma) I_A(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \frac{|a_{01}|}{|\lambda_0 - 1|}\left|\frac{\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}}{(\lambda_0-1)^{n-1}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}, \tag{1.9}$$

причем для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \nu \left|\frac{(\lambda_0-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} |(1-\sigma)I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)], \tag{1.10}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{1.11}$$

где

$$\nu = \alpha_0 \operatorname{sign}\left[(1-\sigma)(\lambda_0-1)^{n-1}\left(\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}\right) I_A(t)\right].$$

Более того, если наряду с указанными условиями алгебраическое уравнение (1.6) имеет m корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции $(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)$ на промежутке $[a,\omega[$, то при выполнении неравенства

$$\left(\frac{\sigma}{a_{01}} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_{0k}}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_{0k}}\right) > 0 \tag{1.12}$$

существует m-параметрическое семейство решений с представлениями (1.10) и (1.11) уравнения (1.1), а при выполнении противоположного неравенства — $(m+1)$-параметрическое семейство таких решений.

Замечание 1.1. Алгебраическое уравнение (1.7) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|a_{0k}|} < 1.$$

Из этой теоремы при $\sigma = 0$ непосредственно вытекает следующее утверждение для линейного дифференциального уравнения (1.2).

Следствие 1.1. *Для существования $P_\omega(\lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, уравнения (1.2) необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение (1.7) не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы выполнялись неравенство (1.8) и условие*

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^n(t) = \frac{\alpha_0\prod_{k=1}^{n-1} a_{0k}}{(\lambda_0-1)^n},$$

причем для каждого такого решения при $t\uparrow\omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^{n-1} I_A(t)}{\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}}[1+o(1)], \tag{1.13}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{1.14}$$

Более того, если наряду с указанными условиями алгебраическое уравнение (1.7) имеет m корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции $(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)$ на промежутке $[a,\omega[$, то существует $(m+1)$-параметрическое семейство решений с представлениями (1.13) и (1.14) уравнения (1.1).

Замечание 1.2. Следствие 1.1 относится к случаю, когда дифференциальное уравнение (1.2) является асимптотически близким к уравнению Эйлера. Если

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^n(t) = c_0 \neq 0$$

и алгебраическое относительно λ_0 уравнение

$$c_0(\lambda_0 - 1)^n = \alpha_0 \prod_{k=1}^{n-1}[(n-k)\lambda_0 - (n-k-1)]$$

имеет n различных вещественных корней λ_{0j}, $j = \overline{1,n}$, то фундаментальная система решений y_j, $j = \overline{1,n}$, дифференциального уравнения (1.2) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\ln|y_j(t)| = \frac{\alpha_0(\lambda_{0j}-1)^{n-1} I_A(t)}{\prod_{k=2}^{n-1}[(n-k)\lambda_{0j} - (n-k-1)]}[1+o(1)],$$

$$\frac{y_j^{(k)}(t)}{y_j^{(k-1)}(t)} = \frac{(n-j)\lambda_{0j} - (n-j-1)}{(\lambda_{0j}-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \quad k = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Замечание 1.3. Теорема 1.1 в частном случае $n = 2$ дополняет результаты из работ [2–6], а следствие 1.1 — результаты из монографии [1, с. 175–194] об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Из результатов, полученных в [7] (см. гл. III, леммы 10.1–10.6), непосредственно следует утверждение об априорных асимптотических свойствах $P_\omega(\lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1).

Лемма 2.1. *Пусть* $y\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *— произвольное* $P_\omega(\lambda_0)$*-решение уравнения (1.1). Тогда если* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *то имеют место асимптотические соотношения*

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \sim \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

где a_{0k}, $k = \overline{1,n}$, *определяются формулами (1.4) и* π_ω *— функция из (1.5).*

Наряду с этой леммой при доказательстве теоремы 1.1 будет также использоваться один признак существования исчезающих в бесконечности решений системы квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_k' &= \beta_0\left[f_k(\tau, v_1,\dots,v_n) + \sum_{i=1}^n c_{ki}v_i + V_k(v_1,\dots,v_n)\right], \quad k = \overline{1,n-1}, \\ v_n' &= H(\tau)\left[f_n(\tau, v_1,\dots,v_n) + \sum_{i=1}^n c_{ni}v_i + V_n(v_1,\dots,v_n)\right], \end{aligned} \tag{2.2}$$

в которой $\beta_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_{ik} \in \mathbb{R}$, $i,k = \overline{1,n}$, $H\colon [\tau_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — непрерывная функция, $f_k\colon [\tau_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_k(\tau, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

где

$$\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \colon |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = \overline{1,n} \right\},$$

а $V_k\colon \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, — непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$V_k(0, \dots, 0) = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad \frac{\partial V_k(0, \dots, 0)}{\partial v_i} = 0, \quad i,k = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

В силу теоремы 2.6 из работы [8] для системы дифференциальных уравнений (2.4) имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть функция* $H\colon [\tau_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to+\infty} H(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{H'(\tau)}{H(\tau)} = 0, \quad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} H(\tau)\, d\tau = \pm\infty, \tag{2.5}$$

а матрицы $C_n = (c_{ki})^n_{k,i=1}$ *и* $C_{n-1} = (c_{ki})^{n-1}_{k,i=1}$ *таковы, что* $\det C_n \ne 0$ *и* C_{n-1} *не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.2) имеет по крайней мере одно решение* $(v_k)^n_{k=1}\colon [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, $\tau_1 \ge \tau_0$, *стремящееся к нулю при* $t \to +\infty$. *Более того, если среди собственных значений матрицы* C_{n-1} *имеется* m *собственных значений (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку* β_0, *то при выполнении неравенства* $H(\tau)(\det C_n)(\det C_{n-1}) > 0$ *таких решений системы (2.2) существует* m*- параметрическое семейство, а при выполнении противоположного неравенства —* $(m+1)$*-параметрическое семейство.*

3. Доказательство основного результата. ***Доказательство теоремы 1.1.*** *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_y, \omega[\to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ — $P_\omega(\lambda_0)$-решение уравнения (1.1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$. Тогда в силу леммы 2.1 имеют место асимптотические соотношения (1.11). Кроме того, из нее следует, что

$$y^{(n)}(t) = \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \dots \frac{y''(t)}{y'(t)} y'(t) \sim \frac{\left(\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}\right) y'(t)}{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-1}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \tag{3.1}$$

и

$$y^{(n)}(t) = \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \dots \frac{y'(t)}{y(t)} y(t) \sim \frac{\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{0k}\right) y(t)}{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.2}$$

Из (1.1) с учетом первого из этих соотношений имеем

$$\frac{y'(t)}{y(t)\,|\ln|y(t)||^{\sigma}} = \frac{\alpha_0[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-1}p(t)}{\prod_{k=2}^{n-1}a_{0k}}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поскольку $\sigma \neq 1$ и согласно определению $P_\omega(\lambda_0)$-решения $\lim_{t\uparrow\omega} y(t)$ равен либо нулю, либо $\pm\infty$, в результате интегрирования этого соотношения на промежутке от t_y до t получаем

$$\frac{|\ln|y(t)||^{1-\sigma}\,\operatorname{sign}\,\ln|y(t)|}{1-\sigma} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n-1}a_{0k}}\,I_A(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда непосредственно следует асимптотическое представление (1.10). Учитывая теперь (1.10) и (3.2), из (1.1) находим

$$\frac{\prod_{k=1}^{n-1}a_{0k}}{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^n} = \alpha_0\,p(t)\left|\frac{(\lambda_0-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n-1}a_{0k}}\right|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}|(1-\sigma)I_A(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

В силу этого асимптотического соотношения выполняются условия (1.8) и (1.9).

Достаточность. Предположим, что при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\dots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ выполняются условия (1.8), (1.9) и алгебраическое уравнение (1.7) не имеет корней с нулевой действительной частью. В этом случае, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{gathered}\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+v_k(\tau)], \quad k=\overline{1,n-1},\\ \ln|y(t)| = \nu\left|\frac{(\lambda_0-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n-1}a_{0k}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}|(1-\sigma)I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\,[1+v_n(\tau)],\end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega=+\infty,\\ -1 & \text{при} \quad \omega<+\infty,\end{cases}$$

получаем с учетом значения ν и знакового условия (1.8) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_k' &= \frac{\beta(1+v_k)}{\lambda_0-1}\,[\lambda_0-1+a_{0k+1}(1+v_{k+1})-a_{0k}(1+v_k)]\,, \quad k=\overline{1,n-2},\\ v_{n-1}' &= \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\frac{h(\tau)|1+v_n|^{\sigma}}{(1+v_1)\dots(1+v_{n-2})}-a_{0n-1}(1+v_{n-1})^2+(\lambda_0-1)(1+v_{n-1})\right],\\ v_n' &= \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}\left[\frac{1+v_1}{h(\tau)}-1-v_n\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

в которой

$$q(\tau(t)) = \frac{[\pi_\omega(t)]^n p(t)}{I_A(t)}, \quad h(\tau(t)) = \left|\frac{\lambda_0 - 1}{a_{01}}\right| \left|\frac{(\lambda_0-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} |\pi_\omega(t)|^n p(t)\, |(1-\sigma)I_A(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Выберем произвольным образом число $a_0 \in]a,\omega[$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3.4) на множестве $[\tau_0, +\infty[\, \times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, где

$$\tau_0 = \beta \ln |\pi_\omega(a_0)|, \quad \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1, \ldots, v_2) \in \mathbb{R}^n \colon |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = \overline{1,n}\right\}.$$

На этом множестве правые части системы (3.4) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $v_1, \ldots, v_n$. Кроме того, в силу условия (1.9) и вида функций $I_A(t), \tau(t)$

$$\lim_{\tau \to +\infty} h(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h(\tau(t)) = 1, \tag{3.5}$$

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} \beta q(\tau)\, d\tau = \int_{a_0}^{\omega} \frac{I_A'(t)}{I_A(t)}\, dt = \ln |I_A(t)| \Big|_{a_0}^{\omega} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } A = a, \\ -\infty, & \text{если } A = \omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

причем функция q сохраняет знак на промежутке $[\tau_0, +\infty[$.

Выделяя в правых частях системы (3.4) линейные части, записываем ее с учетом формул (1.4) в виде

$$\begin{aligned} v_k' &= \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \left[-a_{0k} v_k + a_{0k+1} v_{k+1} - a_{0k} v_k^2 + a_{0k+1} v_k v_{k+1}\right], \quad k = \overline{1, n-2}, \\ v_{n-1}' &= \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \left[r_1(\tau, v_1, \ldots, v_n) - \sum_{i=1}^{n-2} v_i - (\lambda_0 + 1) v_{n-1} + \sigma v_n + V(v_1, \ldots, v_n)\right], \\ v_n' &= \frac{\beta q(\tau)}{1 - \sigma} \left[r_2(\tau, v_1) + v_1 - v_n\right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$r_1(\tau, v_1, \ldots, v_n) = \frac{[h(\tau) - 1]|1 + v_n|^\sigma}{|1 + v_1| \ldots |1 + v_{n-2}|}, \quad r_2(\tau, v_1) = (1 + v_1)\left[\frac{1}{h(\tau)} - 1\right],$$

$$V(v_1, \ldots, v_n) = \frac{|1 + v_n|^\sigma}{|1 + v_1| \ldots |1 + v_{n-2}|} - \sigma v_n + \sum_{i=1}^{n-2} v_i - \lambda_0 v_{n-1}^2.$$

Здесь

$$V(0, \ldots, 0) = 0, \quad \frac{\partial V(0, \ldots, 0)}{\partial v_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

и в силу условия (3.5)

$$\lim_{\tau \to +\infty} r_1(\tau, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} r_2(\tau, v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Далее, учитывая вид функций q и h, а также знак β, заметим, что

$$\frac{\beta q(\tau(t))}{1-\sigma} = \frac{\beta \pi_\omega^n(t) p(t)}{(1-\sigma) I_A(t)} = \frac{\beta^{n+1} M h(\tau) \operatorname{sign}[(1-\sigma) I_A(t)]}{|(1-\sigma) I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \tag{3.8}$$

где

$$M = \left|\frac{a_{01}}{\lambda_0 - 1}\right| \left|\frac{\prod_{k=2}^{n-1} a_{0k}}{(\lambda_0 - 1)^{n-1}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

В силу этого представления и условия (3.5) последнее уравнение системы дифференциальных уравнений (3.7) может быть записано так:

$$v_n' = \frac{\beta^{n+1} M \operatorname{sign}[(1-\sigma) I_A(t)]}{|(1-\sigma) I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}} \left[r_3(\tau, v_1, v_n) + v_1 - v_n\right],$$

где функция r_3 имеет вид

$$r_3(\tau, v_1, v_n) = h(\tau) r_2(\tau, v_1) + [h(\tau) - 1]\,[v_1 - v_n]$$

и удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau \to +\infty} r_3(\tau, v_1, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (3.7) является системой вида (2.2), в которой

$$H(\tau) = H(\tau(t)) = \frac{\beta^{n+1} M \operatorname{sign}[(1-\sigma) I_A(t)]}{|(1-\sigma) I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \quad \beta_0 = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1},$$

$$f_k(\tau, v_1, \ldots, v_n) \equiv 0, \quad k = \overline{1, n-2}, \quad f_{n-1}(\tau, v_1, \ldots, v_n) = r_1(\tau, v_1, \ldots, v_n),$$

$$f_n(\tau, v_1, \ldots, v_n) = r_3(\tau, v_1, v_n), \quad V_n(v_1, \ldots, v_n) \equiv 0,$$

$$V_k(v_1, \ldots, v_n) = -a_{0k} v_k^2 + a_{0k+1} v_k v_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-2}, \quad V_{n-1}(v_1, \ldots, v_n) = V(v_1, \ldots, v_n),$$

$$c_{kk} = -a_{0k}, \quad c_{kk+1} = a_{0k+1}, \quad c_{ki} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k, k+1\}, \quad k = \overline{1, n-2},$$

$$c_{n-1i} = -1, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad c_{n-1n-1} = -1 - \lambda_0, \quad c_{n-1n} = \sigma,$$

$$c_{n1} = 1, \quad c_{ni} = 0, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad c_{nn} = -1,$$

причем функции f_k и V_k, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяют условиям (2.3) и (2.4).

Покажем, что для этой системы выполнены все условия леммы 2.2.

В силу (1.9)

$$\int_{a_0}^{t} p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{n-1} \, |I_A(\tau)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \, d\tau \sim M \int_{a}^{t} \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} \sim M \ln |\pi_\omega(t)| \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где M — отличная от нуля постоянная. С другой стороны,

$$\int\limits_{a_0}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{n-1}\,|I_A(\tau)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\,d\tau = (1-\sigma)\,\mathrm{sign}\,[\pi_\omega^{n-1} I_A(\tau)]|I_A(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\Big|_{a_0}^{t}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} = +\infty,$$

т. е. согласно правилу выбора предела интегрирования A

$$\int\limits_{a}^{\omega}|\pi_\omega(t)|^{n-1}p(t)\,dt < +\infty \quad \text{при} \quad \sigma > 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{a}^{\omega}|\pi_\omega(t)|^{n-1}p(t)\,dt = +\infty \quad \text{при} \quad \sigma < 1.$$

Тогда

$$\lim_{\tau\to+\infty} H(\tau) = 0, \quad \mathrm{sign}\,H(t) = 1 \quad \text{при} \quad t\in\,]a,\omega[.$$

Кроме того, в силу (3.8), а также (3.5) и (3.6)

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{[H(\tau(t))]'_t}{H(\tau(t))\tau'(t)} = -\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\beta\pi_\omega^n(t)p(t)}{(1-\sigma)I_A(t)} = 0, \qquad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} H(\tau)\,d\tau = \pm\infty,$$

т. е. выполняются условия (2.5)

Далее, в полученной системе вида (2.2) матрицы $C_n = (c_{ki})_{k,i=1}^{n}$ и $C_{n-1} = (c_{ki})_{k,i=1}^{n-1}$ таковы, что

$$\det C_n = (-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n-1} a_{0j}\left(\frac{\sigma}{a_{01}} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_{0k}}\right),$$

$$\det C_{n-1} = (-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n-1} a_{0j}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_{0k}}\right)$$

и характеристическое уравнение матрицы C_{n-1} имеет вид (1.7).

Поскольку алгебраическое уравнение (1.7) не имеет корней с нулевой действительной частью и выполняется неравенство (1.6), для системы дифференциальных уравнений (3.7), записанной в виде (2.2), выполняются все условия леммы 2.2. Согласно этой лемме система (3.7) имеет по крайней мере одно решение $(v_k)_{k=1}^{n}\colon [\tau_1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_1 \ge \tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Более того, если среди корней алгебраического уравнения (1.7) имеется m корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\beta(\lambda_0 - 1)$, где $\beta = \mathrm{sign}\,\pi_\omega(t)$, то при выполнении неравенства (1.12) существует m-параметрическое семейство исчезающих в бесконечности решений, а при выполнении противоположного неравенства — $(m+1)$-параметрическое семейство. В силу замен (3.3) каждому такому решению системы (3.7) соответствует решение $y\colon [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t_1 \in [a,\omega[$, уравнения (1.1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (1.10), (1.11).

Теорема доказана.

Литература

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
2. *Evtukhov V.M., Mousa Jaber Abu Elshour* Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations clouse to linear equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2008. — **43**. — P. 97 – 106.
3. *Муса Джабер Абу эль-шаур.* Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, близких к линейным // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 230 – 241.
4. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of the solutions of a class of the second order non-autonomous differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2008. — **44**. — P. 59 – 68.
5. *Mousa Jaber Abu Elshour, Evtukhov V. M.* Asymptotic representations for solutions of a class of second order nonlinear differential equations // Miscolc Math. Notes. — 2009. — **2**. — P. 119 – 127.
6. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of solutions of second order nonlinear differential equations // Int. Math. Forum. — 2009. — **4**, № 17. — P. 835 – 844.
7. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1998. — 295 с.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. – **62**, № 1. — С. 52 – 80.

Получено 28.04.14,
после доработки — 22.11.15