УДК 517.983

ДИХОТОМИЯ НА ПОЛУОСЯХ И ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина

В. Ф. Журавлев

Житомир. нац. агроэкол. ун-т
б-р Старый, 7, Житомир, 10008, Украина

By using the theory of feneralized inverse operators, we obtain a criterion for existence and a general form for bounded on the whole real axis solutions of linear nonhomogeneous functional-differential systems with delay in the case where the corresponding homogeneous system with delay is exponentially dichotomous on the half-axes.

З використанням теорії узагальнено-обернених операторів отримано критерій існування та загальний вигляд обмежених на всій дійсній осі розв'язків лінійних неоднорідних функціонально-диференціальних систем із загаюванням у випадку, коли відповідна однорідна система з загаюванням є експоненціально дихотомічною на півосях.

Предварительные сведения. В работах [1, 2] изучены условия фредгольмовости задачи об ограниченных на всей действительной оси $\mathbb{R}$ решениях линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных систем, заключающиеся в том, чтобы соответствующая однородная система была экспоненциально дихотомичной на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$. В [3] с использованием классических результатов Дж. Хейла [4] для функциональных дифференциальных систем с запаздывающим аргументом, а в [5] для функциональных дифференциальных уравнений „смешанного типа” получены условия фредгольмовости рассматриваемых задач. В настоящей работе получены критерий существования и общий вид ограниченных на всей действительной оси решений линейных неоднородных функционально-дифференциальных систем с запаздыванием. Использование теории обобщенно-обратных операторов [6, 7] существенно упрощает доказательство ранее известных фактов и позволяет получить новые.

Обозначим через $BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ банахово пространство действительных непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ вектор-функций, а через $BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ банахово пространство действительных непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной вектор-функций, $C := C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных вектор-функций с нормой $\|x\|_C = \sup_{t\in[-r,0]}|x(t)|$, $r > 0$, $\mathcal{L}(C[-r,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных ограниченных операторов.

В обозначениях [4] рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа.

$$\dot{x}(t) = L(t)x_t + f(t), \quad t \geq \sigma, \tag{1}$$

с начальным условием $x_\sigma(\theta) = \phi(\theta)$, $\sigma - r \leq \theta \leq \sigma$, где $x(t) \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $x_t := x_t(\theta) = x(t+\theta) \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$ по переменной $\theta \in [-r, 0]$, $\phi(\theta) \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$, оператор $L(t) \in \mathcal{L}(C[-r,0], \mathbb{R}^n)$ и непрерывный по $t \in \mathbb{R}$, $L(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Известно [4, с. 177], что общее решение x_t системы (1) представимо в виде

$$x_t(\sigma, \phi, f) = x_t(\sigma, \phi, 0) + \int\limits_\sigma^t U_t(\cdot, s) f(s) ds, \quad t \geq \sigma, \tag{2}$$

где матрица $U(t,s)$ определяется как решение однородного уравнения

$$(Fx)(t) := \dot{x}(t) - L(t)x_t = 0 \tag{3}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = L(t)\, U_t(\cdot, s), \quad U(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad s - r \leq t < s, \\ I & \text{для} \quad t = s, \end{cases}$$

$$U_t(\cdot, s)(\theta) = U(t+\theta, s), \quad -r \leq \theta \leq 0,$$

и называется фундаментальной матрицей уравнения (3) [4, с. 175]. Если решение однородной системы (3) линейно по ϕ,

$$x_t(\sigma, \phi, 0) = T(t, \sigma)\phi,$$

то $U_t(\cdot, s)$ можно записать в виде

$$U_t(\cdot, s) = T(t,s)X_0,$$

где оператор сдвига $T(t,s) : C([-r,0], \mathbb{R}^n) \to C([-r,0], \mathbb{R}^n)$ представляет собой полугруппу при $t \geq s$,

$$X_0 := X_0(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -r \leq \theta < 0, \\ I, & \text{если} \quad \theta = 0, \end{cases}$$

— функция скачка, удовлетворяющая условиям 1 – 8 из [3, с. 235, 236]. При сделанных выше предположениях оператор $T(t,s)$ является линейным и строго непрерывным [4, с. 177] относительно t и s, а интегральное представление (2) принимает вид

$$x_t = T(t,\sigma)\phi + \int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 f(s) ds, \quad t \geq \sigma. \tag{4}$$

Основной результат. Пусть однородная система с запаздыванием (3) экспоненциально дихотомична на $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t) \to \mathcal{P}_\pm$ при

$t \to \pm\infty$. Рассмотрим задачу о существовании и построении ограниченных на $\mathbb{R}$ решений $x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ неоднородной системы (1) в случае, когда однородная система (3) имеет нетривиальные ограниченные на $\mathbb{R}$ решения.

Известно [3], что ограниченное на полуосях решение x_t задачи (1) имеет вид

$$x_t = T(t,0)\mathcal{P}_+(0)\phi + \int\limits_0^t T(t,s)\mathcal{P}_+(s)X_0 f(s)ds -$$

$$- \int\limits_t^\infty T(t,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0 f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

$$x_t = T(t,0)[I-\mathcal{P}_-(0)]\phi + \int\limits_{-\infty}^t T(t,s)[I-\mathcal{P}_-(s)]X_0 f(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t T(t,s)\mathcal{P}_-(s)X_0 f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_-, \tag{6}$$

где произвольный элемент $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ подлежит определению из условия, что решения (5), (6) будут ограничены на всей оси $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда элемент $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию

$$x_t(0-,\phi) = x_t(0+,\phi). \tag{7}$$

Поэтому, подставив (5), (6) в (7), с учетом того, что $T(0,0) = I$, получим, что элемент $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ должен удовлетворять операторному уравнению

$$[\mathcal{P}_+(0) - (I-\mathcal{P}_-(0))]\phi = \int\limits_{-\infty}^0 T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0 f(s)ds + \int\limits_0^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0 f(s)ds. \tag{8}$$

Для решения операторного уравнения (8) применим хорошо развитую теорию обобщенно-обратных операторов [6, 7]. Обозначим через

$$D := [\mathcal{P}_+(0) - (I-\mathcal{P}_-(0))] : C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to C([-r,0],\mathbb{R}^n)$$

$(n\times n)$-мерную матрицу с постоянными компонентами, а через D^- обобщенно-обратную к ней. Обозначим через $\mathcal{P}_{N(D)}$ конечномерный проектор пространства C на нуль-пространство $N(D)$ оператора D, $\mathcal{P}_{N(D)} : C \to N(D)$, $\mathcal{P}^2_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D)}$, а через $\mathcal{P}_{Y_D}$ конечномерный проектор пространства C на подпространство $Y_D = C \ominus R(D)$, $\mathcal{P}_{Y_D} : C \to Y_D$, $\mathcal{P}^2_{Y_D} = \mathcal{P}_{Y_D}$. Обобщенно-обратная матрица D^- связана [6, 7] с проекторами $\mathcal{P}_{N(D)}$ и $\mathcal{P}_{Y_D}$ соотношениями

$$DD^- = I - \mathcal{P}_{N(D)}, \quad D^-D = I - \mathcal{P}_{Y_D},$$

где проекторы $\mathcal{P}_{N(D)}$ и $\mathcal{P}_{Y_D}$ являются $(n \times n)$-мерными постоянными матрицами. Уравнение (8) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{Y_D}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0 f(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} T(0,s)(I-\mathcal{P}_+(s))X_0 f(s)ds\right] = 0. \tag{9}$$

Поскольку $\mathcal{P}_{Y_D}D = \mathcal{P}_{Y_D}[\mathcal{P}_+(0) - (I - \mathcal{P}_-(0))] = 0$, то $\mathcal{P}_{Y_D}[I - \mathcal{P}_+(0)] = \mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)$. Поэтому с учетом соотношения [3, с. 236]

$$T(t,s)\mathcal{P}(s)X_0 = \mathcal{P}(t)T(t,s)X_0,$$

которое при $t = 0$ принимает вид

$$T(0,s)\mathcal{P}(s)X_0 = \mathcal{P}(0)T(0,s)X_0,$$

условие (9) эквивалентно условиям

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_-(0)T(0,s)X_0 f(s)ds = 0 \quad \text{или} \quad \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[I - \mathcal{P}_+(0)]T(0,s)X_0 f(s)ds = 0. \tag{10}$$

Пусть $\operatorname{rang}[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = \operatorname{rang}[\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))] = \nu$. Обозначим через

$${}_\nu[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] =_\nu [\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))]$$

$(\nu \times n)$-мерную матрицу, строки которой есть ν линейно независимые строки матрицы

$$[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = [\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))],$$

а через H_ν определим $(\nu \times n)$-мерную матрицу

$$H_\nu(s,0) =_\nu [\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)]T(0,s) =_\nu [\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))]T(0,s).$$

Тогда каждое из условий (10) состоит из ν линейно независимых условий

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\nu(s,0)X_0 f(s)ds = 0. \tag{11}$$

Замечание 1. Условия разрешимости (11) уравнения (8) эквивалентны условию [3, с. 241]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(s)f(s)ds = 0 \tag{12}$$

для всех ограниченных на всей действительной оси решений $y(s)$ формально сопряженной системы [4, с. 179] к исходной системе (3). Из (11) и (12) следует, что $H_\nu(s,0)$ — разрешающий оператор задачи об ограниченных решениях формально сопряженной системы, состоящий из ν линейно независимых ограниченных решений сопряженной системы.

Операторное уравнение (8) будет разрешимым относительно ϕ тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (11), при выполнении которого операторное уравнение (8) имеет решение

$$\phi = \mathcal{P}_{N(D)}\hat{\phi} + D^{-}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} T(0,s)\mathcal{P}_{-}(s)X_0 f(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} T(0,s)[I-\mathcal{P}_{+}(s)]X_0 f(s)ds\right], \qquad (13)$$

где $\hat{\phi}$ — произвольный элемент из пространства $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Подставив (13) в (5), (6), получим общее ограниченное на всей действительной оси решение x_t системы (1):

$$x_t = T(t,0)\mathcal{P}_{+}(0)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{\phi} + \int\limits_{0}^{t} T(t,s)\mathcal{P}_{+}(s)X_0 f(s)ds - \int\limits_{t}^{\infty} T(t,s)[I-\mathcal{P}_{+}(s)]X_0 f(s)ds +$$

$$+ T(t,0)\mathcal{P}_{+}(0)D^{-}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} T(0,s)\mathcal{P}_{-}(s)X_0 f(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} T(0,s)[I-\mathcal{P}_{+}(s)]X_0 f(s)ds\right], \quad t \in \mathbb{R}_{+},$$

$$x_t = T(t,0)[I-\mathcal{P}_{-}(0)]\mathcal{P}_{N(D)}\hat{\phi} + \int\limits_{0}^{t} T(t,s)[I-\mathcal{P}_{-}(s)]X_0 f(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)\mathcal{P}_{-}(s)X_0 f(s)ds + T(t,0)[I-\mathcal{P}_{-}(0)]D^{-}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{-\infty}^{0} T(0,s)\mathcal{P}_{-}(s)X_0 f(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} T(0,s)[I-\mathcal{P}_{+}(s)]X_0 f(s)ds\right], \quad t \in \mathbb{R}_{-}.$$

Поскольку $D\mathcal{P}_{N(D)} = [\mathcal{P}_{+}(0)-(I-\mathcal{P}_{-}(0))]\mathcal{P}_{N(D)} = 0$, то $\mathcal{P}_{+}(0)\mathcal{P}_{N(D)} = [I-\mathcal{P}_{-}(0)]\mathcal{P}_{N(D)}$.

Пусть $\operatorname{rang}[\mathcal{P}_{+}(0)\mathcal{P}_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-\mathcal{P}_{-}(0))\mathcal{P}_{N(D)}] = \mu$. Обозначим через $[\mathcal{P}_{+}(0)\mathcal{P}_{N(D)}]_\mu$ $(n\times\mu)$-мерную матрицу, столбцы которой являются полной системой линейно независимых столбцов матрицы $[\mathcal{P}_{+}(0)\mathcal{P}_{N(D)}]$, а через $[(I-\mathcal{P}_{-}(0))\mathcal{P}_{N(D)}]_\mu$ $(n\times\mu)$-мерную матрицу, столбцы которой — полная система линейно независимых столбцов матрицы $[(I-$ $-\mathcal{P}_{-}(0))\mathcal{P}_{N(D)}]$. Тогда

$$T_\mu(t,0) = T(t,0)[\mathcal{P}_{+}(0)\mathcal{P}_{N(D)}]_\mu = T(t,0)[(I-\mathcal{P}_{-}(0))\mathcal{P}_{N(D)}]_\mu \qquad (14)$$

— разрешающий оператор задачи об ограниченных на всей оси $\mathbb{R}$ решениях системы (3). Поскольку оператор $T(t,s)$ образует полугруппу, то

$$T(t,s) = T(t,0)T(0,s).$$

Согласно изложенному выше, общее ограниченное на всей оси $\mathbb{R}$ решение x_t неоднородной системы (1) можно записать в виде

$$x_t = T_\mu(t,0)\phi_\mu + T(t,0)\left\{\int\limits_0^t T(0,s)\mathcal{P}_+(s)X_0 f(s)ds - \int\limits_t^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0 f(s)ds + \right.$$
$$+ \mathcal{P}_+(0)D^-\left[\int\limits_{-\infty}^0 T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0 f(s)ds + \right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_0^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0 f(s)ds\right]\right\}, \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$x_t = T_\mu(t,0)\phi_\mu + T(t,0)\left\{\int\limits_0^t T(0,s)[I-\mathcal{P}_-(s)]X_0 f(s)ds + \int\limits_{-\infty}^t T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0 f(s)ds + \right.$$
$$+ [I-\mathcal{P}_-(0)]D^-\left[\int\limits_{-\infty}^0 T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0 f(s)ds + \right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_0^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0 f(s)ds\right]\right\}, \quad t\in\mathbb{R}_-,$$

где ϕ_μ — произвольный μ-мерный столбец из пространства $C([-r,0],\mathbb{R}^\mu)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть оператор F экспоненциально дихотомичный на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t)\to\mathcal{P}_\pm$ при $t\to\pm\infty$.*

Тогда однородная система (3) имеет μ-параметрическое ($\mu = \operatorname{rang}[\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-\mathcal{P}_-(0))\mathcal{P}_{N(D)}]$) семейство ограниченных на $\mathbb{R}$ решений

$$x_t = T_\mu(t,0)\phi_\mu,$$

где $\phi_\mu\in C([-r,0],\mathbb{R}^\mu)$ — произвольная μ-мерная вектор-функция, $T_\mu(t,0)$ — разрешающий оператор (14) задачи об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях однородной системы (3).

При выполнении условия (11), и только при нем, неоднородная задача (1) имеет μ-параметрическое семейство линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений

$$x_t = T_\mu(t,0)\phi_\mu + (Gf)(t), \tag{15}$$

где

$$(Gf)(t) = T(t,0)\begin{cases} \displaystyle\int_0^t T(0,s)\mathcal{P}_+(s)X_0f(s)ds - \int_t^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0f(s)ds+ \\ \displaystyle+\mathcal{P}_+(0)D^-\left[\int_{-\infty}^0 T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0f(s)ds+\right. \\ \displaystyle\left.+\int_0^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0f(s)ds\right], \quad t\in\mathbb{R}_+, \\ \displaystyle\int_0^t T(0,s)[I-\mathcal{P}_-(s)]X_0f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0f(s)ds+ \\ \displaystyle+[I-\mathcal{P}_-(0)]D^-\left[\int_{-\infty}^0 T(0,s)\mathcal{P}_-(s)X_0f(s)ds+\right. \\ \displaystyle\left.+\int_0^\infty T(0,s)[I-\mathcal{P}_+(s)]X_0f(s)ds\right], \quad t\in\mathbb{R}_-, \end{cases} \tag{16}$$

— обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях неоднородной системы (1), удовлетворяющий свойствам

$$(FG[f])(t) = f(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s,0)X_0f(s)ds.$$

Здесь $H(s,0) = [\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)]T(0,s) = [\mathcal{P}_{Y_D}(I-\mathcal{P}_+(0))]T(0,s)$.

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим три случая, когда однородная система (3) является экспоненциально дихотомичной на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t)\to\mathcal{P}_\pm$ при $t\to\pm\infty$, которые удовлетворяют дополнительным условиям.

Следствие 1. *Пусть оператор F экспоненциально дихотомичный на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t)\to\mathcal{P}_\pm$ при $t\to\pm\infty$, которые удовлетворяют условию*

$$\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0) = \mathcal{P}_-(0). \tag{17}$$

Тогда однородная система (3) имеет μ-параметрическое ($\mu = \operatorname{rang}\mathcal{P}_{N(D)} = \operatorname{rang}[\mathcal{P}_+(0)-\mathcal{P}_-(0)]$) семейство линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений

$$x_t = T_\mu(t,0)\phi_\mu,$$

где $\phi_\mu\in C([-r,0],\mathbb{R}^\mu)$ — произвольная μ-мерная вектор-функция.

Неоднородная задача (1) при любых $f(t)\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ имеет μ-параметрическое семейство линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений

$$x_t = T_\mu(t,0)\phi_\mu + (Gf)(t),$$

где $(Gf)(t)$ — *обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на* $\mathbb{R}$ *решениях неоднородной системы (3), имеющий вид (16), в котором* $\mathcal{P}_+(0)D^- = \mathcal{P}_-(0)$, $[I-\mathcal{P}_-(0)]D^- = -[I-\mathcal{P}_+(0)]$, *и удовлетворяющий свойствам*

$$(FG[f])(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = 0.$$

Доказательство. Пусть для проекторов $\mathcal{P}_+(0)$ и $\mathcal{P}_-(0)$ выполняется условие (17). Этот случай соответствует известному в теории обыкновенных диффереациальных уравнений без запаздывания условию эспоненциальной трихотомии системы (3) [10]. Покажем, что в этом случае

1) $D^- = D$,

2) $\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{Y_D} = \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0)$.

Известно [7], что оператор D^- является обобщенно-обратным к оператору D, если он удовлетворяет условию

$$DD^-D = D$$

и, как следствие, еще двум условиям

$$DD^- = I - \mathcal{P}_{Y_D}, \tag{18}$$

$$D^-D = I - \mathcal{P}_{N(D)}. \tag{19}$$

Сначала найдем квадрат оператора D :

$$D^2 = [\mathcal{P}_+(0) - (I - \mathcal{P}_-(0))]^2 = [\mathcal{P}_+(0) - I + \mathcal{P}_-(0)]^2 =$$

$$= I - \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0) + 2\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = I - \mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_-(0). \tag{20}$$

Далее вычислим D^3 :

$$D^3 = [I - \mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_-(0)]D = [I - \mathcal{P}_+(0) + \mathcal{P}_-(0)][\mathcal{P}_+(0) - (I - \mathcal{P}_-(0))] =$$

$$= \mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)] = D.$$

Следовательно, $DDD = D$, т. е. $D^- = D$.

Поскольку $D^2 = DD^-$ и по условию (17) $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0)$, из равенств (19) и (20) получим

$$\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D = I - D^2 = \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0),$$

а из равенств (18) и (20) —

$$\mathcal{P}_{Y_D} = I - DD^- = I - D^2 = \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0).$$

Следовательно, $\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{Y_D} = \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_-(0)$.

Поскольку $\mathcal{P}_{Y_D} = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)$ и вследствие соотношений (17) $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_+(0)$, то

$$\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0) = [\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)]\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-^2(0) - \mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0) = \mathcal{P}_{Y_D}.$$

Поэтому необходимое и достаточное условие разрешимости (11) задачи (1) об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях будет иметь вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\nu(s,0)X_0 f(s)ds = 0,$$

где $H_\nu(s,0) = {}_\nu[\mathcal{P}_{Y_D}]T(0,s)$.

Так как $\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)$ и вследствие соотношения (17) $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_+(0)$, то

$$\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_+(0)[\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)] = \mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0)) - \mathcal{P}_+^2(0) = \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_+(0) = 0.$$

Поэтому $T_\mu(t,0) = T(t,0)[\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}]_\mu = 0$ и однородное уравнение (3) будет иметь только тривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение.

Поскольку $D^- = D$, то

$$\mathcal{P}_+(0)D^- = \mathcal{P}_+(0)[\mathcal{P}_+(0) - (I - \mathcal{P}_-(0))] = \mathcal{P}_+^2(0) - \mathcal{P}_+(0)[I - \mathcal{P}_-(0)] = \mathcal{P}_+(0),$$

а

$$[I - \mathcal{P}_-(0)]D^- = [I - \mathcal{P}_-(0)][\mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)]] = -[I - \mathcal{P}_+(0)].$$

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть оператор F экспоненциально дихотомичный на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t) \to \mathcal{P}_\pm$ при $t \to \pm\infty$, которые удовлетворяют условию*

$$\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0) = \mathcal{P}_+(0). \tag{21}$$

Тогда однородная система (3) имеет только тривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение.

Неоднородная задача (1) разрешима для тех и только тех $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\nu(s,0)X_0 f(s)ds = 0,$$

и при этом имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение

$$x_t = (Gf)(t),$$

где $(Gf)(t)$ — обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях неоднородной системы (3), имеющий вид (16), в котором $\mathcal{P}_+(0)D^- = \mathcal{P}_+(0)$, $[I - \mathcal{P}_-(0)]D^- = -[I - \mathcal{P}_-(0)]$, и удовлетворяющий свойствам

$$(FG(f))(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(G(f))(0+0) - (G(f))(0-0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(s,0)X_0 f(s)ds.$$

Доказательство. Пусть для проекторов $\mathcal{P}_+(0)$ и $\mathcal{P}_-(0)$ выполняется условие (21), тогда:

1) $D^- = D$,

2) $\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{Y_D} = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)$.

Доказательство соотношений 1 и 2 проводится аналогично проведенному при доказательстве следствия 1.

Поскольку $\mathcal{P}_{Y_D} = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)$ и вследствие соотношения (21) $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_+(0)$, то

$$\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0) = [\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)]\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-^2(0) - \mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0) = \mathcal{P}_{Y_D}.$$

Поэтому необходимое и достаточное условие разрешимости (11) задачи (1) об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях будет иметь вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\nu(s,0)X_0 f(s)ds = 0,$$

где $H_\nu(s,0) = {}_\nu[\mathcal{P}_{Y_D}]T(0,s)$.

А так как $\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)$ и вследствие соотношения (21) $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_+(0)$, то

$$\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_+(0)[\mathcal{P}_-(0) - \mathcal{P}_+(0)] = \mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0)) - \mathcal{P}_+^2(0) = \mathcal{P}_+(0) - \mathcal{P}_+(0) = 0.$$

Поэтому $T_\mu(t,0) = T(t,0)[\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)]_\mu} = 0$ и однородное уравнение (3) будет иметь только тривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение.

Поскольку $D^- = D$, то

$$\mathcal{P}_+(0)D^- = \mathcal{P}_+(0)[\mathcal{P}_+(0) - (I - \mathcal{P}_-(0))] = \mathcal{P}_+^2(0) - \mathcal{P}_+(0)[I - \mathcal{P}_-(0)] = \mathcal{P}_+(0),$$

а

$$[I - \mathcal{P}_-(0)]D^- = [I - \mathcal{P}_-(0)][\mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)]] = -[I - \mathcal{P}_-(0)].$$

Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть оператор F экспоненциально дихотомичный на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t) \to \mathcal{P}_\pm$ при $t \to \pm\infty$, которые удовлетворяют условию*

$$\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_-(0)\mathcal{P}_+(0) = \mathcal{P}_+(0) = \mathcal{P}_-(0). \tag{22}$$

Тогда однородная система (3) экспоненциально дихотомична на $\mathbb{R}$ и имеет только тривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение.

Неоднородная задача (1) для любых $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение

$$x_t = (Gf)(t),$$

где $(Gf)(t)$ — оператор Грина задачи об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях неоднородной системы (3), имеющий вид (16), в котором $\mathcal{P}_+(0)D^- = \mathcal{P}_+(0)$, $[I - \mathcal{P}_-(0)]D^- = -[I - -\mathcal{P}_+(0)]$.

Доказательство. Пусть однородная система (3) является экспоненциально дихотомичной на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами $\mathcal{P}_\pm(t) \to \mathcal{P}_\pm$ при $t \to \pm\infty$ такими, что выполняется условие (22).

Поскольку выполнено условие (22), то матрица D имеет вид

$$D = \mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)] = \mathcal{P}_+(0) - I + \mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_+(0) - I + \mathcal{P}_+(0) = 2\mathcal{P}_+(0) - I = J,$$

где J — инволюция, $J^2 = I$. Следовательно, $D^2 = I$, откуда следует, что $D^{-1} = D$.

Поскольку вследствие соотношения (22) $\mathcal{P}_-(0) = \mathcal{P}_+(0)$, то $\mathcal{P}_{Y_D} = \mathcal{P}_{N(D)} = 0$. Следовательно, $\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} = 0$, $\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0) = 0$.

Таким образом, необходимое и достаточное условие разрешимости (11) задачи (1) об ограниченных на $\mathbb{R}$ решениях выполняется для всех $f(t)$, однородное уравнение (3) имеет только тривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, а неоднородная система (1) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение для любых $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Замечание 2. Доказанные утверждения с соответствующими дополнениями и изменениями будут справедливы и для случая, когда оператор $L(t)$ и функция $f(t)$ кусочно-непрерывны с конечным числом разрывов первого рода по t и ограничены на $\mathbb{R}$.

Проиллюстрируем изложенное выше на следующих примерах.

1. Рассмотрим линейную дифференциальную систему с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Lx(t-1) + f(t), \quad t \geq 0, \\ x_0(\theta) &= \phi(\theta), \quad -1 \leq \theta \leq 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где L — матрица, имеющая вид

$$L = \begin{cases} L_+ = \operatorname{diag}\{-e^{-1}, e, -e^{-1}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ L_- = \operatorname{diag}\{-e^{-1}, -e^{-1}, e\} & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

а

$$f(t) = \begin{cases} f_+(t) = \operatorname{col}\{f_+^{(1)}(t), f_+^{(2)}(t), f_+^{(3)}(t)\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ f_-(t) = \operatorname{col}\{f_-^{(1)}(t), f_-^{(2)}(t), f_-^{(3)}(t)\} & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

— функция с непрерывными ограниченными на соответствующих промежутках компонентами, имеющая разрыв первого рода при $t = 0$.

Фундаментальная матрица $U(t)$ на промежутках будет иметь вид

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) = \operatorname{diag}\{e^{-t}, e^{t}, e^{-t)}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ U_-(t) = \operatorname{diag}\{e^{-t}, e^{-t}, e^{t}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Тогда в обозначениях [4] решение x_t запишется в виде

$$x_t = T(t,0)\phi + \int\limits_0^t T(t,s)X_0 f(s)ds, \tag{24}$$

где оператор $T(t,s)$ имеет представление

$$T(t,s) = \begin{cases} T_+(t,s) = \operatorname{diag}\{e^{-(t-1-s)}, e^{t-1-s}, e^{-(t-1-s)}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ T_-(t,s) = \operatorname{diag}\{e^{-(t-1-s)}, e^{-(t-1-s)}, e^{t-1-s}\} & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

а $X_0 = \operatorname{diag}\{X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, X_0^{(3)}\}$, $i = 1,2,3$; $X_0^{(i)} = X_0^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 \leq \theta < 0, \\ 1, & \text{если} \quad \theta = 0. \end{cases}$

Соответствующая (23) однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ с проекторами

$$\mathcal{P}_+(0) = \operatorname{diag}\{1,0,1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_-(0) = \operatorname{diag}\{1,1,0\}$$

соответственно. Тогда

$$D = \mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)] = \operatorname{diag}\{1,0,0\},$$

$$D^- = \operatorname{diag}\{1,0,0\}.$$

Проекторы $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbb{R}^3 \to N(D)$ и $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbb{R}^3 \to Y_D$ равны между собой:

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\{0,1,1\}.$$

Матрицы $[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = [\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))] = \operatorname{diag}\{0,1,0\}$ имеют ранг, равный единице. Обозначим через ${}_1[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = {}_1[\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))] = [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]$ (1×3)-мерную матрицу. Тогда условие существования ограниченного на всей оси решения неоднородной системы (23) будет иметь вид

$$[\ 0 \quad 1 \quad 0\ ] \left[\int\limits_{-\infty}^0 T_-(0,s)X_0 f(s)ds + \int\limits_0^\infty T_+(0,s)X_0 f(s)ds \right] = 0. \tag{25}$$

Поскольку $X_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если} \quad -1 \leq \theta < 0, \\ I, & \text{если} \quad \theta = 0, \end{array} \right.$ то $T(t,s)X_0 = 0$ для $t-1 \leq s < t$. Таким образом, при $t = 0$ имеем $T(0,s)X_0 = 0$ для $-1 \leq s < 0$. С учетом этого из (25) после преобразований получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-(1+s)} f_-^{(2)}(s)ds + \int\limits_0^\infty e^{1+s} f_+^{(2)}(s)ds = 0. \tag{26}$$

При выполнении условия (26) неоднородная система (23) имеет однопараметрическое семейство ограниченных решений вида (15). Действительно, матрицы $[\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}] = [(I - \mathcal{P}_-(0))\mathcal{P}_{N(D)}] = \operatorname{diag}\{0,0,1\}$ имеют ранг, равный единице, т. е. $\mu = 1$. Поэтому $[\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}]_1 = [(I - \mathcal{P}_-(0))\mathcal{P}_{N(D)}]_1 = \operatorname{diag}\{0,0,1\}$ — (3×1)-мерная матрица. Тогда

$$T_1(t,0) = \begin{cases} \operatorname{col}\{0,0,e^{-(t-1-s)}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ \operatorname{col}\{0,0,e^{t-1-s}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases} \tag{27}$$

2. При тех же предположениях рассмотрим линейную дифференциальную систему с постоянным запаздыванием (23), где

$$L = \begin{cases} L_+ = \operatorname{diag}\{-e^{-1}, e, -e^{-1}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ L_- = \operatorname{diag}\{-e^{-1}, e, e\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Фундаментальная матрица $U(t)$ на промежутках будет иметь вид

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) = \operatorname{diag}\{e^{-t}, e^{t}, e^{-t)}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ U_-(t) = \operatorname{diag}\{e^{-t}, e^{t}, e^{t}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Тогда оператор $T(t,s)$ имеет представление

$$T(t,s) = \begin{cases} T_+(t,s) = \operatorname{diag}\{e^{-(t-1-s)}, e^{t-1-s}, e^{-(t-1-s)}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ T_-(t,s) = \operatorname{diag}\{e^{-(t-1-s)}, e^{t-1-s}, e^{t-1-s}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Соответствующая (23) однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ с проекторами

$$\mathcal{P}_+(0) = \operatorname{diag}\{1,0,1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_-(0) = \operatorname{diag}\{1,0,0\}$$

соответственно. Тогда

$$D = \mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)] = \operatorname{diag}\{1,-1,0\},$$

$$D^- = \operatorname{diag}\{1,-1,0\}.$$

Проекторы $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbb{R}^3 \to N(D)$ и $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbb{R}^3 \to Y_D$ равны между собой:

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\{0,0,1\}.$$

Для проекторов $\mathcal{P}_+(0)$ и $\mathcal{P}_-(0)$ выполняется условие (17).

Матрицы $[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = [\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))] = \operatorname{diag}\{0,0,0\}$, поэтому условие существования ограниченного на $\mathbb{R}$ решения неоднородной системы (23) выполняется для любых $f(t) \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. В этом случае система (23) имеет однопараметрическое семейство ограниченных решений (15), где $T_1(t,0)$ имеет вид (27).

3. Рассмотрим линейную дифференциальную систему с постоянным запаздыванием (23), где

$$L = \begin{cases} L_+ = \operatorname{diag}\{-e^{-1}, e, e\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ L_- = \operatorname{diag}\{-e^{-1}, e, -e^{-1}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Фундаментальная матрица $U(t)$ на промежутках будет иметь вид

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) = \operatorname{diag}\{e^{-t}, e^t, e^t\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ U_-(t) = \operatorname{diag}\{e^{-t}, e^t, e^{-t}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Тогда оператор $T(t,s)$ имеет представление

$$T(t,s) = \begin{cases} T_+(t,s) = \operatorname{diag}\{e^{-(t-1-s)}, e^{t-1-s}, e^{t-1-s}\} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ T_-(t,s) = \operatorname{diag}\{e^{-(t-1-s)}, e^{t-1-s}, e^{-(t-1-s)}\} & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Соответствующая (23) однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ с проекторами

$$\mathcal{P}_+(0) = \operatorname{diag}\{1, 0, 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_-(0) = \operatorname{diag}\{1, 0, 1\}$$

соответственно. Тогда

$$D = \mathcal{P}_+(0) - [I - \mathcal{P}_-(0)] = \operatorname{diag}\{1, -1, 0\},$$

$$D^- = \operatorname{diag}\{1, -1, 0\}.$$

Для проекторов $\mathcal{P}_+(0)$ и $\mathcal{P}_-(0)$ выполняется условие (21).

Проекторы $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbb{R}^3 \to N(D)$ и $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbb{R}^3 \to Y_D$ равны между собой:

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\{0, 0, 1\}.$$

Матрицы $[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = [\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))] = \operatorname{diag}\{0, 0, 1\}$ имеют ранг, равный единице. Обозначим через ${}_1[\mathcal{P}_{Y_D}\mathcal{P}_-(0)] = {}_1[\mathcal{P}_{Y_D}(I - \mathcal{P}_+(0))] = [\ 0 \ \ 0 \ \ 1\ ]$ (1×3)-мерную матрицу. Тогда условие существования ограниченного на всей оси решения неоднородной системы (23) будет иметь вид

$$[\ 0 \ \ 0 \ \ 1\ ] \left[\int\limits_{-\infty}^{0} T_-(0,s) X_0 f(s) ds + \int\limits_{0}^{\infty} T_+(0,s) X_0 f(s) ds \right] = 0$$

или после преобразований

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-(1+s)} f_-^{(3)}(s)\, ds + \int\limits_{0}^{\infty} e^{1+s} f_+^{(3)}(s)\, ds = 0.$$

Поскольку в этом примере матрицы $[\mathcal{P}_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}] = [(I - \mathcal{P}_-(0))\mathcal{P}_{N(D)}]$ нулевые, то $T_\mu(t,s) \equiv 0$ и система (23) имеет единственное ограниченное на всей оси решение.

1. *Saker R. J.* The splitting index for linear differential systems // J. Different. Equat. — 1979. — **33**. — P. 368–405.
2. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**. — P. 225–256.
3. *Xiao-Biao Lin.* Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations // J. Different. Equat. — 1986. — **63**. — P. 227–254.
4. *Hale J. K.* Theory of functional differential equations. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.
5. *Mallet-Paret J.* The Fredholm alternative for functional-differential equations of mixed type // J. Dynam. Different. Equat. — 1999. — **11**, № 1. — P. 1–47.
6. *Ben-Israel A., Greville T. N. E.* Generalized inverse. — Second ed. — New York: Springer-Verlag, 2003.
7. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: Koninklijke Brill NV, 2004. — xiv+317 p.
8. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. — 1999. — **2**, № 1. — P. 3–10.
9. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А.* Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — P. 1517–1530.
10. *Elaidi S., Hajek O.* Exponential trichotomy of differential systems // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — **123**, № 2. — P. 362–374.

Получено 09.06.12