

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ПО ПАРАМЕТРУ ДИСПЕРСИИ МОДЕЛИ

**И. Т. Селезов**

*Ин-т гидромеханики НАН Украины  
ул. Желябова, 8/4, Киев, 03057, Украина*

*We obtain equations that generalize previously known results on propagation of nonlinear waves in water in the variable depth case. We use the power series method that leads to decrease the dimension of the problem, and asymptotically construct weakly dispersive but strongly nonlinear models, close to hyperbolic, for water wave propagation. The model has a wider range of application if compared with known experimental and numerical results.*

*Виведено рівняння, які узагальнюють відомі раніше результати для поширення нелінійних хвиль на воді на випадок змінної глибини. При цьому використано метод степеневих рядів, що приводить до зменшення розмірності задачі, та асимптотичну побудову слабодисперсійних, але сильно нелінійних моделей поширення хвиль на воді, близьких до гіперболічних. Показано розширення області застосування моделі порівнянням з відомими експериментальними та числовими результатами.*

**1. Введение.** В отличие от традиционных подходов, основанных на малости как параметра нелинейности  $\alpha$ , так и параметра дисперсии  $\beta$ , в настоящей статье нелинейный параметр  $\alpha$  предполагается произвольным. В результате это приводит к построению квазивырожденных моделей при малой дисперсии  $\beta$  и большой нелинейности  $\alpha$ , т. е. к моделям, близким к гиперболическим ( $\beta = 0$ ).

По существу снято ограничение на параметр нелинейности  $\alpha$ , и полученная на этой основе система эволюционных уравнений описывает распространение сильно нелинейных волн. В результате учет таких нелинейных эффектов и переменности глубины приводит к возмущению распространяющейся уединенной волны и образованию „хвостов” в отличие от чисто солитонной волны при балансе нелинейных и дисперсионных эффектов при  $\alpha \sim \beta$  или в отличие от опрокидывающихся волн при  $\beta = 0$ .

**2. Постановка задачи.** Здесь для решения задачи применяется такой же подход, как и в случае построения асимптотических аппроксимаций в теории колебаний пластин. Рассматривается задача распространения поверхностных гравитационных волн, которая, как известно, в большинстве случаев хорошо описывается моделью идеальной несжимаемой жидкости при ее потенциальном движении. В результате определение векторного поля сводится к скалярной задаче для потенциала скоростей  $\phi$  и отклонения свободной поверхности  $\eta$ . Задача рассматривается в полной нелинейной постановке для жидкости переменной глубины с невозмущенной свободной поверхностью  $z = 0$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ .

Далее рассматривается плоская задача, т. е. решения не зависят от координаты  $y$ . Задача характеризуется тремя определяющими безразмерными параметрами

$$\alpha = a/H_0, \quad \beta = (H_0/l)^2, \quad \gamma = \operatorname{tg} \theta = H_0/l, \quad Ur = \alpha/\beta,$$

где  $\theta$  — угол донного отклонения,  $Ur$  — число Урелла (производный параметр),  $H_0$  — глубина (вертикальный масштаб),  $l$  — характерный горизонтальный масштаб,  $a$  — максимальное отклонение свободной поверхности (амплитуда).

Задача рассматривается в области

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 | \tilde{x} \leq x < \infty, -\infty < y < \infty, -H(x) \leq z \leq \alpha\eta(x, t)\}, \quad (1)$$

где  $x = \tilde{x}$  — линия перед зоной разрушения волн.

В безразмерных переменных

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t = \frac{\sqrt{gH_0}}{l}t, \quad \varphi^* = \frac{c_0}{gla}\varphi, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}$$

задача формулируется с учетом (1) относительно двух искомых функций  $\phi$  и  $\eta$  следующим образом (далее звездочки опущены):

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad \text{в области } \Omega, \quad (2)$$

$$z = -H(x) : \varphi_z + \beta H_x \varphi_x = 0, \quad (3)$$

$$z = \alpha\eta : \eta_t + \alpha\eta_x \varphi_x - \beta^{-1}\varphi_z = 0, \quad \eta + \varphi_t + (\alpha/2)\varphi_x^2 + (\alpha/2\beta)\varphi_z^2 = 0, \quad (4)$$

$$t = 0 : \varphi(x, z, t) = f_1(x, z), \quad \varphi_t(x, z, t) = f_2(x, z). \quad (5)$$

Следует отметить, что были введены три параметра масштабирования  $H_0, l, a$ , а не один (достаточный), что необходимо для данного асимптотического анализа. Это находится в соответствии с расширенным анализом Хантли [6, 16].

Решение задачи (2)–(5) для случая распространяющихся волн в полной нелинейной постановке не известно. Эта задача описывает нелинейно дисперсионную систему, для которой типично распространение уединенных волн. Здесь приближенный анализ проводится асимптотическим методом [8, 17], позволяющим свести задачу к анализу системы двух эволюционных уравнений. Предполагается, что параметр дисперсии  $\beta$  и градиент донной поверхности  $\gamma$  малы, в то время как нелинейный параметр  $\alpha$  считается произвольным в отличие от традиционных солитонных подходов, в которых предполагается баланс нелинейных и дисперсионных эффектов  $\alpha \sim \beta$ .

Для вывода эволюционных уравнений в жидкости малой глубины применяется метод степенных рядов, т. е. разложения искомых функций по малой толщинной координате (глубине), по алгоритму, развитому в теории упругих тел малой толщины, начиная от Коши и Пуассона [2–4, 11].

**3. Построение эволюционных уравнений распространения нелинейных слабодисперсионных волн над неоднородным дном.** Двумерная по координатам  $x, z$  задача сводится к одномерной по  $x$  на основе метода степенных рядов, что сводит задачу к бесконечной системе, включающей члены  $\beta^q$  и  $\alpha^n$  ( $q, n$  — целые конечные) и их произведения. Введение предположений о малости параметров  $\beta$  и  $\gamma$  позволяет проводить редукцию бесконечных систем, сохраняя члены порядка  $\beta, \beta^2, \dots$ , что соответствует длинноволновым приближениям. Далее мы сохраняем в бесконечной системе члены только первого порядка по  $\beta$  и все члены с нелинейным параметром  $\alpha^n$ . Это соответствует сильно нелинейной слабодисперсионной модели, вырожденной по параметру дисперсии  $\beta$  [12]. Противоположный

предельный случай  $\beta \gg \alpha$  приводит к параболическим моделям, когда дисперсионные эффекты учитываются полностью, а нелинейные эффекты малы и здесь не рассматриваются.

Функцию  $\varphi$  представим в виде разложения

$$\varphi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z + H)^n \beta^n f_n(x, t). \quad (6)$$

Видно, что разложения (6) по параметру  $\beta$  и  $z + H$  эквивалентны.

Разложение (6) подставим в систему (2)–(5). Подстановка в уравнение (2) приводит к рекуррентному соотношению

$$\frac{1}{\beta} f_{xx}^{(k)} = 2(k+1)H_x f_x^{(k+1)} + (k+1)H_{xx} f^{(k+1)}.$$

Условие на дне (3) позволяет выразить  $f^{(1)}$  через  $f^{(0)} = f$ :

$$f^{(1)} = -H_x f^{(0)} - \beta H_x^3 f^{(0)} + O(\beta^2).$$

Окончательное выражение для  $\varphi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= f - \beta \left[ (z + H)H_x f_x + \frac{(z + H)^2}{2} f_{xx} \right] + \\ &+ \beta^2 \left[ -(z + H)H_x^3 f_x + \frac{3}{2} (z + H)^2 (H_x H_{xx} f_x + H_x^2 f_{xx}) \right] = \\ &= \frac{(z + H)^3}{2} \left[ \frac{1}{3} H_{xxx} f_x + \dots + \frac{(z + H)^4}{24} f_{xxxx} \right] + O(\beta^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в первое граничное условие (4), удерживая члены порядка  $\beta$  и  $\alpha^n \beta$  и учитывая, что  $h = H + \alpha \eta$ ,  $\omega = f_x$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \eta_t + h_x \omega + h \omega_x - \beta \left[ h_x \left( \frac{3}{2} H_{xx} \omega_x + \frac{3}{2} H_x \omega_{xx} + \frac{1}{2} H_{xxx} \omega + \frac{\alpha}{2} \eta_x \omega_{xx} \right) + \right. \\ \left. + h (\alpha \eta_x H_{xx} \omega + 3H_x^2 \omega_x + 2\alpha \eta_x H_x \omega_x + 3H_x H_{xx} \omega) + \frac{1}{6} h^3 \omega_{xxx} + \alpha \eta_x H_x^2 \omega \right] = O(\beta^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Второе условие (4) после дифференцирования по  $x$  и подстановки в него выражения (7) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \omega_t + \eta_x + \alpha \frac{1}{2} (\omega_x^2)_x - \beta \left\{ \frac{1}{2} h^2 [\omega_{xt} + \alpha (\omega \omega_{xx} - \omega_x^2)] + \omega_t (h H_x)_x + \omega_{xt} h H_x + \right. \\ \left. + \alpha \omega \omega_x (h_x H_x + H_x^2 + 3h H_{xx}) + \alpha h H_x \omega_x^2 + \right. \\ \left. + \alpha \omega \omega_{xx} h H_x + \omega^2 [H_{xx} (h_x + H_x) + h H_{xxx}] \right\}_x = O(\beta^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Эволюционные уравнения (8), (9) составляют замкнутую систему связанных уравнений, не зависящих от  $z$ .

В дальнейшем вводится средняя скорость (осредненная по глубине)

$$u = \frac{1}{h} \int_{-H}^{\alpha\eta_1} \varphi_z dz = \omega - \beta \left[ \frac{1}{2} h H_{xx} \omega + h H_x \omega_x + H_x^2 \omega + \frac{1}{6} H^2 \omega_{xx} \right] + O(\beta^2). \quad (10)$$

Эволюционные уравнения (8), (9) после некоторых преобразований с использованием выражения (10) принимают вид

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_t + \eta_x + \alpha u u_x = & \beta \left( \frac{H^3}{3} u_{xxt} + H H_x u_{xt} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t \right) + \\ & + \alpha \beta \left[ (\eta H)_x u_{xt} + H H_x u u_{xx} + \frac{2}{3} \eta H u_{xxt} + \frac{H^2}{3} u u_{xxx} - \frac{H^2}{3} u_x u_{xx} + \right. \\ & \left. + \frac{H}{2} H_{xx} u_t + \frac{3}{2} H H_{xx} u u_x + \frac{H}{2} H_{xxx} u^2 + \eta_x H_x u_t \right] + L_1 + O(\beta^2), \quad (12) \end{aligned}$$

где  $L_1$  — оператор, учитывающий нелинейности более высокого порядка, т. е.  $O(\alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta)$ ,  $h = H(x) + \alpha h$ .

**4. Анализ результатов.** Как было отмечено в п. 2, для вывода эволюционных уравнений в жидкости малой глубины применяется метод степенных рядов, т. е. разложения искомых функций по малой толщинной координате (глубине), по алгоритму, развитому в теории упругих тел малой толщины, начиная от Коши и Пуассона [4, 11]. Таким образом, из полностью нелинейной постановки асимптотическим методом для случая распространения плоских волн выведена система эволюционных уравнений (11), (12) [12, 13].

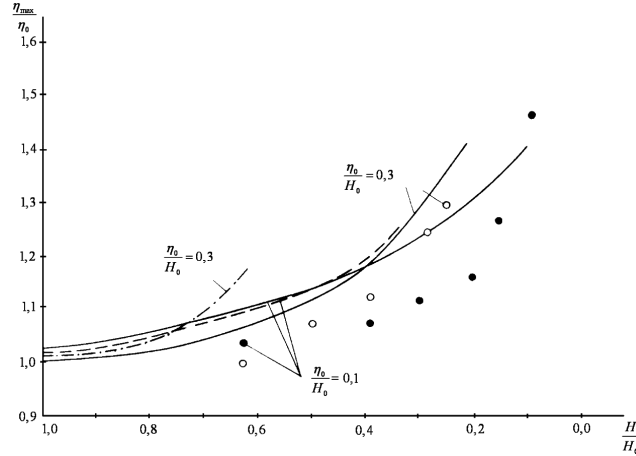
Эта система описывает распространение уединенных волн при малых дисперсионных эффектах  $\beta = \left(\frac{H_0}{l}\right)^2 \ll 1$  по сравнению с нелинейными эффектами порядка  $\alpha = \frac{a}{H_0}$ , где  $H_0$  — глубина,  $l$  — горизонтальный масштаб,  $a = |\eta|_{\max}$  — амплитуда, а также распространение нелинейных волн при отсутствии течения.

Систему (11), (12) можно представить в виде суммы трех операторов: оператора Кортевича – де Фриза, включающего члены порядка  $\alpha \sim \beta \ll 1$ , оператора, учитывающего неоднородность донной поверхности порядка  $\beta \ll 1$  [10], и оператора, включающего нелинейности порядка  $\alpha\beta$  [15]

$$L_g = L_{kdv} + L_{inh} + L_{inh} \cdot \quad (13)$$

$\alpha \sim \beta \quad \alpha \sim \beta \quad \alpha \beta$

Оператор (13) включает как частные случаи известные уравнения. Систему эволюционных уравнений (11), (12), как и оператор (13), не представляется возможным привести



Зависимость амплитуды волны  $\eta_{\max}/\eta_0$  от глубины жидкости  $H/H_0$  над равномерным наклонным берегом  $\gamma = 1/20$  при отношениях  $\eta_0/H_0 = 0, 1$  и  $0, 3$ . Экспериментальные данные:  $\circ$  — (0, 1),  $\bullet$  — (0, 3) [7]. Числовые результаты: штриховая кривая — (0, 1), штрихпунктирная — (0, 3) [9]. Численное решение уравнений (11), (12) — сплошная кривая.

к одному разрешающему уравнению даже в случаях простейших видов неоднородностей. Приведенные уравнения применялись для исследования наката солитона в более мелкую воду. Численным анализом и сопоставлением с экспериментами показано, что обобщенные эволюционные уравнения (11), (12) описывают распространение поверхностных волн более высокой амплитуды по сравнению с уравнением Кортевега–де Фриза [15] (см. рисунок). Было показано также искажение формы импульса и появление хвостов в результате учета членов порядка  $\alpha\beta$ .

Исследование наката волн на наклонный берег на основе других моделей проводилось во многих работах (см. [1]).

**5. Частные случаи.** В случае, когда параметр нелинейности  $\alpha$  мал и он такого же порядка, как и параметр дисперсии  $\beta$ ,  $\alpha \sim \beta \ll 1$ , система уравнений (11), (12) сводится к известным уравнениям [10]

$$h_t + (hu)_x = 0,$$

$$u_t + \eta_x + \alpha uu_x = \beta \left( \frac{H^3}{3} u_{xxt} + \frac{HH_x u_{xt} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t}{L_{inh}} \right) + O(\beta^2).$$

В случае  $\beta = 0$  система (11), (12) сводится к системе квазилинейных уравнений для волн на мелкой воде

$$u_t + \eta_x + \alpha uu_x = 0, \quad \eta_t + (hu)_x = 0,$$

из которой при  $\alpha = 0$  следуют линеаризованные уравнения

$$u_t = -\eta_x, \quad \eta_t = -(Hu)_x.$$

При обозначении  $u = \partial\phi/\partial x$  они сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

**6. Выводы.** Эволюционные уравнения (11), (12) представляют интерес для анализа распространения волн в прибрежной зоне, где характерные расстояния довольно малы, так что дисперсионные эффекты не накапливаются, в то время как нелинейные эффекты значительны [14]. Анализ начально-краевой задачи на основе уравнений (11), (12), описывающей трансформацию уединенных волн при набегании на берег, показывает, что учет больших нелинейных эффектов и переменности глубины при распространении солитонов сопровождается искажением профиля волны и появлением осциллирующих хвостов [13].

Отметим, что подход, основанный на методе степенных рядов и приводящий к системе эволюционных уравнений (11), (12), может быть обобщен на случай наличия стационарного течения над искривленным дном, следуя работе [5].

1. Доценко С. Ф., Санникова Н. К. Накат поверхностных волн различной формы на наклонный берег // Мор. гидрофиз. журн. — 2011. — № 1. — С. 3–14.
2. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. — Киев: Наук. думка, 1989. — 204 с.
3. Селезов И. Т., Рябенко А. А. Поверхностные волны на воде при наличии неоднородностей // Прикл. гидромеханика. — 2012. — **14**, № 1. — С. 72–77.
4. Cauchy A. L. Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide // Exercices Math. — 1828. — **3**. — P. 245–326.
5. Dressler R. F. New nonlinear shallow flow equations with curvature // J. Hydraul. Res. — 1978. — **16**, № 3. — P. 205–222.
6. Huntley H. E. Dimensional analysis. — London: McDonald and Co., 1953. — 176 p. (Рус. перевод: Хантли Г. Анализ размерностей. — М.: Мир, 1970).
7. Kishi T., Sacki H. The shoaling breaking and run-up of the solitary wave on impermeable rough slopes // Proc. 10th Conf. Coast. Eng., Tokio. — 1966. — **1**. — P. 284–289.
8. Lagrange J. L. Memoire sur la theorie du mouvement des fluides // Oeuvres. — 1869. — **4**. — 749 p.
9. Madsen O. S., Mei C. C. The transformation of solitary wave over an uneven bottom // J. Fluid Mech. — 1969. — **39**. — P. 781–791.
10. Peregrine D. H. Long waves on a beach // J. Fluid Mech. — 1967. — **27**, № 4. — P. 815–827.
11. Poisson S. D. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastiques // Mem. Acad. Roy. Sci. — 1829. — **8**. — P. 357–570.
12. Selezov I. Nonlinear wave propagation in close to hyperbolic systems // Int. Ser. Number. Math. — 2001. — **141**, **142**. — P. 851–860.
13. Selezov I. T. Some degenerate and generalized wave models in elasto- and hydrodynamics // J. Appl. Math. and Mech. — 2003. — **67**, № 6. — P. 871–877.
14. Selezov I. T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mech. Res. — 2006. — **33**, № 1. — P. 44–54.
15. Selezov I. T., Zheleznyak M. I., Tkachenko V. A., Yakovlev V. V. On the numerical modeling of tsunami wave generation and propagation // Mar. Geodesy. — 1983. — **6**, № 2. — P. 149–165.
16. Selezov I., Volynski R. Wave refraction and sediment dynamics modeling in coastal zone. — Kiev: SMP "AVERS, 2013". — 150 p.
17. Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. — New York: Willey, 1974. (Рус. перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 622 с.)

Получено 01.05.15