УДК 517.5

О ПОРЯДКАХ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ РАНГА σ

А. И. Степанец, **А. Л. Шидлич**

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We study the values $e_\sigma(f)$ of the best approximations of integrals of functions from the space $L_p(A, d\mu)$ with rank σ integrals. We find the orders for the least upper bounds of these quantities as $\sigma \to \infty$ in the case where the function f is a product of two nonnegative functions one of which is fixed and the other varies over the unit ball $U_p(A)$ in the space $L_p(A, d\mu)$. We consider applications of the obtained results to approximation problems in the spaces S^p_φ.

Досліджуються величини $e_\sigma(f)$ найкращих наближень інтегралів функцій із просторів $L_p(A, d\mu)$ з допомогою інтегралів рангу σ. Знайдено порядки при $\sigma \to \infty$ верхніх меж цих величин у випадку, коли функція f є добутком двох невід'ємних функцій, одну з яких зафіксовано, а інша варіюється на одиничній кулі $U_p(A)$ простору $L_p(A, d\mu)$. Розглянуто застосування одержаних результатів до задач наближення у просторах S^p_φ.

1. Основные обозначения и постановка задачи. Пусть $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, $m \geq 1$, — m-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, оснащенное σ-конечной σ-аддитивной непрерывной мерой $d\mu$, A — μ-измеримое подмножество из $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, μ-мера которого равна a, где a — конечное число, или же $a = \infty$:

$$\text{mes}_\mu A = |A|_\mu = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(A, d\mu)$ — множество всех заданных на A функций $y = y(\mathbf{x})$, измеримых относительно меры $d\mu$.

При заданном $p \in (0, \infty)$ через $L_p(A, d\mu)$ обозначим подмножество функций из $Y(A, d\mu)$, для которых величина

$$\|y\|_{L_p(A,d\mu)} = \left(\int\limits_A |y(\mathbf{x})|^p d\mu \right)^{1/p} \tag{1}$$

является конечной.

Известно, что функционал $\|\cdot\|_{L_p(A,d\mu)}$, определенный соотношением (1), при $p \geq 1$ задает норму, а при $p \in (0, 1)$ — квазинорму на $L_p(A, d\mu)$.

Пусть, далее, $f \in L_1(A, d\mu)$, σ — некоторое положительное число и $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — множество всех μ-измеримых подмножеств γ_σ из A, μ-мера которых равна σ.

В работе рассматриваются величины

$$e_\sigma(f) = e_\sigma(f)_A \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left| \int\limits_A f(\mathbf{x}) d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \right| \tag{2}$$

в случае, когда функция f является произведением двух неотрицательных функций, одна из которых фиксирована, а другая варьируется на единичном шаре $U_p(A)$ пространства $L_p(A, d\mu)$,

$$U_p(A) = \{y \in Y(A, d\mu) : \ \|y\|_{L_p(A,d\mu)} \leq 1\}.$$

Величины $e_\sigma(f)$ впервые рассматривались в работе [1]. Идея их введения восходит к работе С. Б. Стечкина [2], в которой появилось известное понятие наилучшего n-членного приближения. Величины $e_\sigma(f)$ можно рассматривать в качестве интегрального аналога этого понятия и называть *наилучшими приближениями интеграла функции* f *по множеству* A *посредством интегралов ранга* (*порядка*) σ.

Пусть $U_p^+(A)$ — подмножество всех неотрицательных функций из $U_p(A)$ и $\varphi(\mathbf{x})$ — неотрицательная существенно ограниченная на A функция, для которой в случае, когда множество A неограничено, предполагается, что

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

(в таком случае записываем $\varphi \in \Phi(A)$).

Для заданного $\sigma > 0$, произвольной функции $\varphi \in \Phi(A)$ и любой неотрицательной функции y положим

$$e_\sigma(y, \varphi) = e_\sigma(y, \varphi, A, d\mu) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{A \setminus \gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x}) d\mu \tag{4}$$

и будем рассматривать величины $e_\sigma(y, \varphi)$, когда y принадлежит $U_p^+(A)$ для всех $p \in (0, \infty)$ при условиях, гарантирующих существование интегралов в правой части (4). В случае, когда $p > 1$, достаточным условием существования этих интегралов, в силу неравенства Гельдера, является условие на функцию φ :

$$\|\varphi\|_{L_q(A,d\mu)} < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{5}$$

При $p \in (0, 1)$, в отличие от случая $p \geq 1$, одними условиями на функцию φ достигнуть этого можно только в тривиальном случае. В связи с этим полагаем

$$\mathcal{U}_p(A) = \mathcal{U}_p(A, d\mu) = \begin{cases} U_p^+(A) \cap L_1(A, d\mu), & p \in (0, 1), \\ U_p^+(A), & p \in [1, \infty), \end{cases}$$

и рассматриваем $e_\sigma(y, \varphi)$ только при $y \in \mathcal{U}_p(A)$.

Основной задачей данной работы является исследование поведения при $\sigma \to \infty$ величин

$$e_\sigma(\varphi, p) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(A)} e_\sigma(y, \varphi), \quad p \in (0, \infty). \tag{6}$$

Понятно, что такая задача имеет смысл только в случае, когда $\text{mes}_\mu A = \infty$.

Точные значения этих величин при $p = 1$ были найдены в работе [1], а для всех $p \in (0, \infty)$ — в работе [3] (см. также [4]). Для этих значений справедливы следующие утверждения.

Теорема A. *Пусть $\varphi \in \Phi(A)$. Тогда при любых $p \in (0,1]$ и $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$e_\sigma(\varphi, p) = \sup_{s\in(0,a]} (s-\sigma) \left(\int\limits_0^s \frac{dt}{\bar\varphi^{\,p}(t)} \right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{7}$$

в котором $\bar\varphi(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При этом точная верхняя грань в правой части (7) достигается при некотором конечном значении $s = s^*$. Точная верхняя грань в правой части соотношения (6) реализуется функцией $y^* = y^*(\mathbf{x}, \varphi, \sigma, p)$, задаваемой равенством

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(\varphi^p(\mathbf{x}) \int\limits_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-\frac{1}{p}}, & \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \mathbf{x} \in A \setminus E, \end{cases}$$

где E — любое измеримое подмножество множества $\{\mathbf{x} \in A : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar\varphi(s^*-0)\}$, $\mathrm{mes}_\mu E = s^*$, содержащее множество $\{\mathbf{x} \in A : \ \varphi(\mathbf{x}) > \bar\varphi(s^*-0)\}$.

Теорема B. *Пусть $e_\sigma(\varphi, p)$ — величина, определяющаяся равенством (6), $p \in (1, \infty)$ и φ — произвольная функция из множества $\Phi(A)$, удовлетворяющая условию (5). Тогда при любом $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$e_\sigma = e_\sigma(\varphi, p) = \left((s^*-\sigma)^q \left(\int\limits_0^{s^*} \bar\varphi^{\,-p}(t)\, dt \right)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*}^a \bar\varphi^{\,q}(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{8}$$

где $\bar\varphi(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$, а s^* — наибольшее на промежутке $(\sigma, a]$ число такое, что при всех $s \in (\sigma, s^*)$ выполняется неравенство

$$s - \sigma \leq \bar\varphi^{\,p}(s) \int\limits_0^s \bar\varphi^{\,-p}(t)\, dt. \tag{9}$$

Такое число s^* всегда существует. Верхняя грань в соотношении (6) реализуется функцией $y^* = y^*(\mathbf{x}, \varphi, \sigma, p)$ из $\mathcal{U}_p(A)$, в которой при $s^* = a < \infty$

$$y^*(\mathbf{x}) = \left(\varphi^p(\mathbf{x}) \int\limits_A \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-\frac{1}{p}}, \quad \mathbf{x} \in A,$$

а при $s^* < a$

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\mathbf{x})(s^*-\sigma)^{\frac{q}{p}} \left(\int\limits_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-\frac{q}{p}} e_\sigma^{-\frac{q}{p}}, & \mathbf{x} \in E, \\ \varphi^{\frac{q}{p}}(\mathbf{x}) e_\sigma^{-\frac{q}{p}}, & \mathbf{x} \in A \setminus E, \end{cases}$$

где $E = \{\mathbf{x} \in A : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* - 0)\}$.

Следовательно, задача об исследовании поведения величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \to \infty$ сводится к исследованию величин $G_\sigma(\varphi, p)$, которые в случае, когда $p \in (0, 1]$ и $\varphi \in \Phi(A)$, задаются равенством

$$G_\sigma(\varphi, p) \stackrel{\text{df}}{=} e_\sigma(\varphi, p) = \sup_{s>0}(s - \sigma) \left(\int\limits_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^{\,p}(t)} \right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

где $\bar{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. Если же $p \in (1, \infty)$ и функция $\varphi \in \in \Phi(A)$ удовлетворяет условию (5), то

$$G_\sigma(\varphi, p) \stackrel{\text{df}}{=} e_\sigma(\varphi, p) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int\limits_0^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(t)\, dt \right)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*}^{\infty} \bar{\varphi}^{\,q}(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{11}$$

где $\bar{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$, а s^* — наибольшее на промежутке (σ, ∞) число такое, что при всех $s \in (\sigma, s^*]$ выполняется неравенство

$$s - \sigma \leq \bar{\varphi}^{\,p}(s) \int\limits_0^s \bar{\varphi}^{\,-p}(t)\, dt. \tag{12}$$

Заметим, что условие (3) гарантирует тот факт, что для функции $\varphi(\mathbf{x})$ ее функция распределения $F_\varphi(y)$,

$$F_\varphi(y) \stackrel{\text{df}}{=} \text{mes}_\mu E_y, \quad E_y = \{\mathbf{x} \in A : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq y\}, \quad y > 0,$$

принимает только конечные значения из промежутка $[0, a]$. Поэтому, согласно определению убывающей перестановки функции (см., например, [1,] [5] (гл. 6), [6] (гл. X)), величина $\bar{\varphi}(t)$ определена при любом $t > 0$.

Отметим также, что величины $G_\sigma(\varphi, p)$ вида (10) и (11) в случае, когда $\sigma = n \in \mathbb{N}$, носителем меры $d\mu$ в пространстве $\mathbb{R}^+$ является множество $\mathbb{N}$, где она равна единице: $\mu(k) \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$, и $A = \mathbb{N}$, встречались, в частности, в работах [7–17], [18] (гл. VI). Например, в работах [16, 17] и [18] (гл. VI) в терминах величин вида (10) даны точные значения поперечников по Колмогорову октаэдров в гильбертовом пространстве, в работах [7–9] в терминах таких величин — точные значения наилучших n-членных приближений q-эллипсоидов пространств S^q_φ в пространствах S^p_φ, $0 < p, q < \infty$. Поэтому изучение поведения величин $G_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \to \infty$, наверное, имеет и самостоятельный интерес.

Для упрощения записей в случае, когда $p \in (0, 1]$, положим $\psi(t + 1) = \bar{\varphi}^p(t)$, $t > 0$, и

$$\bar{G}_\sigma(\psi, p) \stackrel{\text{df}}{=} G_\sigma(\varphi, p) = \sup_{s>0}(s - \sigma) \left(\int\limits_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^{\,p}(t)} \right)^{-\frac{1}{p}} = \sup_{s>\sigma}(s - \sigma) \left(\int\limits_1^{s+1} \frac{dt}{\psi(t)} \right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

а при $p \in (1,\infty)$ — $\psi(t+1) = \bar\varphi(t)$, $t > 0$, и

$$\bar G_\sigma(\psi,p) \stackrel{\mathrm{df}}{=} G_\sigma(\varphi,p) = \left((s^*-\sigma)^q\left(\int\limits_0^{s^*}\bar\varphi^{\,-p}(t)\,dt\right)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*}^{\infty}\bar\varphi^{\,q}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left((s^*-\sigma)^q\left(\int\limits_1^{s^*+1}\frac{dt}{\psi^p(t)}\right)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*+1}^{\infty}\psi^{\,q}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (14)$$

где $s^* = s^*(\sigma)$ — наибольшее на промежутке (σ,∞) число такое, что при всех $s \in (\sigma, s^*)$ выполняется неравенство

$$s - \sigma \le \psi^{\,p}(s+1)\int\limits_1^{s+1}\frac{dt}{\psi^{\,p}(t)}. \qquad (15)$$

Будем рассматривать величины $\bar G_\sigma(\psi,p)$ в случае, когда функции ψ выбираются из множества $\mathfrak{M}$ всех положительных непрерывных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций непрерывного аргумента $t \ge 1$:

$$\mathfrak{M} = \{\psi(t):\ \psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi((t_1+t_2)/2) + \psi(t_2) \ge 0\ \ \forall t_1,t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\}.$$

Таким образом, к условиям монотонного убывания к нулю функций $\psi(\cdot)$, которым они удовлетворяют автоматически как степени перестановок, добавляются условия их выпуклости. Эти условия являются техническими, поскольку здесь применяется развитый аппарат выпуклых функций. В то же время следует отметить, что для практических приложений такое ограничение малозначительно.

Множество $\mathfrak{M}$ весьма не однородно по скорости стремления к нулю при $t \to \infty$ его элементов: функции $\psi(t)$ могут убывать как сколь угодно медленно, так и сколь угодно быстро. Поэтому возникает необходимость разбиения множества $\mathfrak{M}$ на подмножества, объединяющие функции $\psi \in \mathfrak{M}$, которые в определенном смысле имеют одинаковый характер стремления к нулю.

Следуя монографии [19, с. 159] (см. также [20]), в качестве характеристики, с учетом которой удобно проводить такое разбиение, выбираем пару функций $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi;t)$, которые определяются следующим образом. Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$, тогда через $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ обозначим функцию, связанную с ψ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \ge 1. \qquad (16)$$

В силу строгой монотонности функции ψ, $\eta(t)$ для всех $t \ge 1$ из (16) определяется однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\psi(t)\right).$$

Функция $\mu(t)$ определяется равенством

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Если $\psi_1(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то $\mu(\psi_1; t) = (2^{1/r} - 1)^{-1}$; если $\psi_2(t) = 1/\ln(t+a)$, $a > e$, то $\mu(\psi_2; t) = t/((t+a)^2 + a - t)$; если же $\psi_3(t) = e^{-t}$, то $\mu(\psi_3; t) = t/\ln 2$. Эти примеры показывают, что величина $\mu(\psi; t)$ может быть ограниченной сверху и снизу некоторыми положительными числами, стремиться к нулю при $t \to \infty$ и быть неограниченной сверху. Именно по этим признакам из множества $\mathfrak{M}$ выделяют следующие подмножества:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}: \ 0 < \mu(\psi; t) \le K \ \ \forall t \ge 1\}, \tag{17}$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}: \ 0 < K \le \mu(\psi; t) < \infty \quad \forall t \ge 1\}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}: \ 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 \quad \forall t \ge 1\}. \tag{19}$$

Здесь и в дальнейшем $K, K_1, \ldots$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от величин, которые являются в данном рассмотрении параметрами (в рассматриваемом случае — от переменной t).

Далее, через $\mathfrak{M}_0^+$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно стремится к нулю:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{\psi \in \mathfrak{M}: \ \mu(\psi; t) \downarrow 0\}, \tag{20}$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, у которых $\mu(\psi; t)$ монотонно и неограниченно возрастает, когда $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M}: \ \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \tag{21}$$

Отметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_C$ являются функции t^{-r}, $r > 0$, $t^{-r}\ln^\varepsilon(t+e)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, и др., множества $\mathfrak{M}_0^+$ — функции $\ln^\varepsilon(t+e)$ при $\varepsilon < 0$, множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$ принадлежат функции $\exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$.

2. Основные результаты. Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_0$, то для любого $p \in (0, 1]$ справедливо порядковое при $\sigma \to \infty$ равенство*

$$\bar{G}_\sigma(\psi; p) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma + 1)}{\sigma^{\frac{1}{p} - 1}}. \tag{22}$$

Здесь и далее под выражением „$a(\sigma) \asymp b(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$” понимается, что существуют постоянные $0 < K_1 < K_2$ такие, что при всех σ, больших некоторого числа σ_0, выполняется неравенство

$$K_1 a(\sigma) \le b(\sigma) \le K_2 a(\sigma).$$

Из теоремы 1, учитывая теорему A и принятые обозначения, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если* $p \in (0,1]$ *и функция* $\varphi \in \Phi(A)$ *такова, что при любом* $t \geq 0$ *выполняется равенство* $\bar{\varphi}^p(t) = \psi(t+1)$, *где* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, *то справедливо порядковое при* $\sigma \to \infty$ *равенство*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \frac{\bar{\varphi}(\sigma)}{\sigma^{\frac{1}{p}-1}}.$$

В случае, когда $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, рассмотрим следующие подмножества множества $\mathfrak{M}^+_\infty$:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty : \alpha(\psi; t) \downarrow 0, \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty\},$$

где

$$\alpha(t) = \alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) = \psi'(t+0), \tag{23}$$

и

$$\mathfrak{M}''_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty \, \psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0\}.$$

Отметим, что естественными представителями множеств $\mathfrak{M}'_\infty$ и $\mathfrak{M}''_\infty$ являются функции $\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, в случаях, когда $r \in (0,1)$ и $r > 1$ соответственно.

Теорема 2. *Если функция* ψ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}'_\infty$ *или же функция* ψ *принадлежит* $\mathfrak{M}''_\infty$ *и такая, что функция* $\psi''(t)$ *не возрастает на* $[1,\infty)$, *то для любого* $p \in (0,1]$ *справедливо порядковое при* $\sigma \to \infty$ *равенство*

$$\bar{G}_\sigma(\psi; p) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma+1)}{(\eta(\psi; \sigma+1) - \sigma - 1)^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{24}$$

Из теорем A и 2, учитывая принятые обозначения, а также то, что согласно определению для любого $t > 0$

$$\eta(\bar{\varphi}; t) = \eta(\psi; t+1) - 1, \tag{25}$$

получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Если* $p \in (0,1]$ *и функция* $\varphi \in \Phi(A)$ *при любом* $t \geq 0$ *удовлетворяет равенству* $\bar{\varphi}^p(t) = \psi(t+1)$, *где* $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ *или же функция* $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ *и такая, что функция* $\psi''(t)$ *не возрастает на* $[1,\infty)$, *то справедливо порядковое при* $\sigma \to \infty$ *равенство*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \frac{\bar{\varphi}(\sigma)}{(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Пусть теперь $p \in (1,\infty)$. Если ограничиться рассмотрением функций ψ из множества $\mathfrak{M}$ и учесть обозначения (17) – (21), то понятно, что интегралы в (14) могут быть конечными только когда эти функции принадлежат множеству $\mathfrak{M}_\infty$. Рассмотрим сначала случай, когда $\psi \in \mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 3. *Пусть $p \in (1, \infty)$, а функция $\psi \in \mathfrak{M}_C$ такая, что $\|\psi\|_{L_q[1,\infty)} < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, и функция $1/\psi(t)$ выпукла вниз при всех $t \geq t_0 \geq 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\bar{G}_\sigma(\psi, p) \asymp \psi(\sigma + 1)\sigma^{1-\frac{1}{p}}. \tag{26}$$

Из теоремы 3, учитывая теорему B и принятые обозначения, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Если $p \in (1, \infty)$ и функция $\varphi \in \Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}(t) = \psi(t + 1)$, где $\bar{\varphi}$ — убывающая перестановка функции φ, а функция $\psi \in \mathfrak{M}_C$ такая, что $\|\psi\|_{L_q[1,\infty)} < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, и функция $1/\psi(t)$ выпукла вниз при всех $t \geq t_0 \geq 1$, то при $\sigma \to \infty$ справедливо соотношение*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)\sigma^{1-\frac{1}{p}}.$$

В случае, когда функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$, условие $\|\psi\|_{L_q[1,\infty)} < \infty$ всегда выполняется, поскольку справедливо следующее утверждение, доказательство которого будет приведено в п. 6.

Утверждение 1. *Если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то для произвольного $r > 0$ найдется число $K > 0$ такое, что для любого $t \geq 1$*

$$\psi(t) \leq Kt^{-r}. \tag{27}$$

Как и при рассмотрении случая $p \in (0, 1]$, функции ψ будем выбирать из множеств $\mathfrak{M}'_\infty$ и $\mathfrak{M}''_\infty$.

Теорема 4. *Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'_\infty$, или же функция ψ принадлежит $\mathfrak{M}''_\infty$ и такая, что производная $(\psi^p(t))''$ не возрастает при $t \geq 1$, то для любого $p \in (1, \infty)$ справедливо равенство*

$$\bar{G}_\sigma(\psi; p) \asymp \psi^{\frac{1}{p}}(\sigma + 1)(\eta(\psi; \sigma + 1) - \sigma - 1)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \sigma \to \infty. \tag{28}$$

Из теоремы 4, учитывая теорему B, принятые обозначения и соотношение (25), получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *Если функция $\varphi \in \Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}(t) = \psi(t + 1)$, где $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ или же функция $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ и такая, что производная $(\psi^p(t))''$ не возрастает на $[1, \infty)$, то для любого $p \in (1, \infty)$ при $\sigma \to \infty$ справедливо соотношение*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\psi; \sigma) - \sigma)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Во второй части работы рассматриваются некоторые приложения полученных результатов. В частности, получены порядковые равенства при $n \to \infty$ для величин наилучших n-членных приближений q-эллипсоидов в пространствах S^p_φ, а также порядковые равенства для некоторых поперечников.

3. Доказательство теоремы 1. При заданных $\nu > 1$ и $s > \nu$ рассмотрим функцию $F_\nu(s)$:

$$F_\nu(s) = \frac{s-\nu}{\left(\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 < p \le 1. \tag{29}$$

Критическая точка $s = s_\nu$ функции $F_\nu(s)$ является точкой максимума и удовлетворяет соотношению

$$F'_\nu(s) = \frac{\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} - \frac{1}{p}(s-\nu)\psi^{-1}(s)}{\left(\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}+1}} = 0. \tag{30}$$

При этом

$$F_\nu(s_\nu) = \frac{s_\nu - \nu}{\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}} \frac{1}{\left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{p\,\psi(s_\nu)}{\left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{31}$$

Покажем сначала, что в рассматриваемом случае

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu). \tag{32}$$

Вследствие монотонности функции ψ всегда $\psi(s_\nu) \le \psi(\nu)$, поэтому для доказательства (32) достаточно убедиться в существовании постоянной $K_1 > 0$, для которой

$$\psi(\nu) \le K_1 \psi(s_\nu). \tag{33}$$

Рассмотрим возрастающую последовательность чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ таких, что при любом $k \in \mathbb{N}$ $\nu_k = \eta(\psi; \nu_{k-1})$, а $\nu_0 \stackrel{\text{df}}{=} \nu$. Поскольку функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_0$, вследствие (17) для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\nu \ge 1$ имеем

$$\frac{\nu_k - \nu}{\nu} = \frac{\nu_k}{\nu_{k-1}} \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-2}} \ldots \frac{\nu_1}{\nu} - 1 \ge (K_2+1)^k - 1, \quad K_2 = \text{const}.$$

Поэтому начиная с некоторого номера $k_0 \ge 1$ будем иметь

$$\nu_{k_0} - \nu > \nu.$$

Покажем, что $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$. Тогда, согласно определению последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$,

$$\psi(s_\nu) \ge \psi(\nu_{k_0+1}) = \psi(\nu)/2^{k_0+1},$$

что и доказывает неравенство (33), а с ним и порядковое равенство (32).

Из соотношения (30) следует

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{s_\nu - \nu}{p\,\psi(s_\nu)}$$

или

$$\int_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \Phi(s_\nu),$$

где

$$\Phi(s) = \int_\nu^{s} \left(\frac{1}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(t)}\right) dt + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{s-\nu}{\psi(s)}. \tag{34}$$

Функция $\Phi(s)$ не убывает при всех $s > \nu$. Поэтому если при $s = \nu_{k_0+1}$ выполняется неравенство

$$\int_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\, dt \le \Phi(s), \tag{35}$$

то выполняется и соотношение $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$.

Согласно определению последовательности $\{\nu_k\}$,

$$\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} = \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} = \frac{2^{k_0}}{\psi(\nu)} \ge \frac{1}{\psi(\nu)}.$$

Отсюда, учитывая монотонность функции ψ, получаем

$$\Phi(\nu_{k_0+1}) \ge \int_\nu^{\nu_{k_0+1}} \left(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(t)}\right) dt \ge \left(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})}\right)(\nu_{k_0} - \nu) \ge \frac{\nu}{\psi(\nu)} \ge \int_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)},$$

т. е. неравенство (35) при $s = \nu_{k_0+1}$ выполняется. Поэтому действительно $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$ и, следовательно, справедливо соотношение (32).

Если $p = 1$, то вследствие (29) имеем

$$\bar{G}_\sigma(\psi; p) = \sup_{t \ge \sigma} F_{\sigma+1}(t+1) = \sup_{s \ge \nu} F_\nu(s),$$

где $\nu = \sigma + 1 > 1$, $s = t + 1 \ge \nu$. Отсюда в силу (31) и (32) получаем

$$\bar{G}_\sigma(\psi; p) = \sup_{s \ge \nu} F_\nu(s) = F_\nu(s_\nu) = p\,\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) = \psi(\sigma + 1),$$

и соотношение (22) в таком случае доказано.

Если же $p \in (0,1)$, то для доказательства соотношения (22) следует еще показать, что

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\nu-1}{\psi(\nu)}. \tag{36}$$

Имеем

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\psi(t+1)} = \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{t|\psi'(t+1)|}{\psi^2(t+1)}dt \geq \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - \int\limits_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\alpha(t+1)\psi(t+1)},$$

где величина $\alpha(t) = \alpha(\psi;t)$ определяется равенством (23).

Поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_0$, в силу теоремы 12.1 из [19] (см. также [20], теорему 1), при любом $t \geq 1$ выполняется неравенство $\alpha(\psi;t) \geq K_3 > 0$, $K_3 = \mathrm{const}$, учитывая которое, получаем

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} - \frac{1}{K_3}\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}$$

и, значит,

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{K_3}{K_3+1}\,\frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)}.$$

С другой стороны, так как функция ψ убывает, то

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \leq \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)}. \tag{37}$$

Поэтому

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)}. \tag{38}$$

Из соотношений (30) и (37) следует

$$(s_\nu-1)-(\nu-1) = p\,\psi(s_\nu)\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \leq p\,\psi(s_\nu)\,\frac{s_\nu-1}{\psi(s_\nu)} = p\,(s_\nu-1),$$

откуда видим, что

$$\nu-1 \leq s_\nu-1 \leq \frac{\nu-1}{1-p}.$$

Объединяя это соотношение с соотношениями (32) и (38), получаем (36).

Таким образом, положив $\nu = \sigma + 1$, будем иметь

$$\bar{G}_\sigma(\psi; p) = \sup_{s \geq \nu} F_\nu(s) = F_\nu(s_\nu) = p\psi(s_\nu) \left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \psi(\nu) \left(\frac{\nu - 1}{\psi(\nu)} \right)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\nu)}{(\nu-1)^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma+1)}{\sigma^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Как отмечено ранее, критическая точка $s = s_\nu$ функции $F_\nu(s)$ является точкой максимума и удовлетворяет соотношениям (30), (31).

Покажем сначала, что для произвольной функции ψ, удовлетворяющей условиям теоремы 2, справедливо порядковое при $s \to \infty$ равенство

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi(s)}. \tag{39}$$

Имеем

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} - \int_1^s \frac{dt}{\alpha(\psi; t)\psi(t)}.$$

В силу определения для любой функции $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}''_\infty$ величина $\alpha(\psi; t)$ монотонно убывает к нулю. Отсюда, учитывая соотношение

$$\frac{\psi(t)}{2|\psi'(t)|} \leq \eta(\psi; t) - t \leq K_1 \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \quad \forall t \geq 1 \tag{40}$$

(см., например, [17, с. 164, 166]), получаем

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{\alpha(\psi; s)}{1 + \alpha(\psi; s)} \left(\frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} \right) \geq K_2 \frac{1}{|\psi'(s)|} \geq K_3 \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi(s)}. \tag{41}$$

С другой стороны, если $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то производная функции $\psi(t)/|\psi'(t)|$ положительна. Отсюда следует, что для любого $t \geq 1$ имеет место неравенство

$$\psi(t) \geq \psi'^2(t)/\psi''(t), \quad \psi''(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi''(t+0),$$

учитывая которое, получаем

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \leq \int_1^s \frac{\psi''(t)dt}{\psi'^2(t)} = \frac{1}{|\psi'(s)|} - \frac{1}{|\psi'(1)|} \leq K_4 \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi(s)}. \tag{42}$$

Таким образом, если $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то равенство (39) доказано.

Покажем, что соотношение, аналогичное (42), справедливо и для функций $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$. Рассмотрим систему точек s_0, s_{-1}, $s_{-2}, \ldots, s_{-N}$, $N \in \mathbb{N}$, таких, что при любом $k = \overline{1, N}$ $\eta(\psi; s_{-k}) = s_{1-k}$, $s_0 \overset{\mathrm{df}}{=} s$, а $s_{-N} \in [1, \eta(1)]$. Тогда в силу монотонности функции ψ

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \le \int\limits_1^{\eta(1)} \frac{dt}{\psi(t)} + \sum_{k=1}^N \int\limits_{s_{-k}}^{s_{1-k}} \frac{dt}{\psi(t)} \le$$

$$\le \int\limits_1^{\eta(1)} \frac{dt}{\psi(t)} + \sum_{k=1}^N \frac{s_{1-k} - s_{-k}}{\psi(s_{1-k})} = \int\limits_1^{\eta(1)} \frac{dt}{\psi(t)} + \sum_{k=1}^N \frac{s_{1-k} - s_{-k}}{2^{k-1}\psi(s)}. \tag{43}$$

Далее, для оценки величины в правой части соотношения (43) будем использовать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция* $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ *такова, что функция* $\psi''(t)$ *не возрастает на* $[1, \infty)$. *Тогда при любом* $t \ge 1$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\eta(\psi; \eta(\psi; t)) - \eta(\psi; t)}{\eta(\psi; t) - t} \ge \frac{1 + \ln 2}{2}. \tag{44}$$

Доказательство. Для любой функции $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, в силу монотонности функции ψ'', имеем

$$\eta'(t) = \eta'(\psi; t) = \frac{|\psi'(t)|}{2|\psi'(\eta(t))|} = \frac{1}{2} + \frac{|\psi'(t)| - |\psi'(\eta(t))|}{2|\psi'(\eta(t))|} \ge \frac{1}{2} + \frac{\psi''(\eta(t))(\eta(t) - t)}{2|\psi'(\eta(t))|}. \tag{45}$$

Согласно определению множества $\mathfrak{M}''_\infty$, величина $\psi(t)/|\psi'(t)|$ монотонно стремится к нулю. Поэтому для любого $t \ge 1$ справедливо соотношение

$$\ln 2 = \int\limits_t^{\eta(t)} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)}\, d\tau \le \frac{|\psi'(\eta(t))|}{\psi(\eta(t))}(\eta(t) - t). \tag{46}$$

Кроме того, поскольку производная функции $\psi(t)/|\psi'(t)|$ отрицательна, заключаем, что для любого $t \ge 1$

$$\psi(t) \le \psi'^2(t)/\psi''(t). \tag{47}$$

Объединяя соотношения (45) – (47), получаем

$$\eta'(t) \ge \frac{1}{2} + \frac{\psi''(\eta(t))}{2|\psi'(\eta(t))|} \frac{\psi(\eta(t)) \ln 2}{|\psi'(\eta(t))|} \ge \frac{1 + \ln 2}{2},$$

и, следовательно,

$$\eta(\eta(t)) - \eta(t) = \int\limits_t^{\eta(t)} \eta'(\tau) d\tau \ge \frac{1 + \ln 2}{2}(\eta(t) - t).$$

Лемма доказана.

Учитывая неравенство (44), из (43) получаем

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \le \int\limits_1^a \frac{dt}{\psi(t)} + \sum_{k=1}^N \frac{2^k(\eta(\psi;s)-s)}{2^k(1+\ln 2)^k\psi(s)} \le \int\limits_1^a \frac{dt}{\psi(t)} + \frac{\eta(\psi;s)-s}{\psi(s)\ln 2} \le K_5\frac{\eta(\psi;s)-s}{\psi(s)}. \quad (48)$$

Объединяя соотношения (41) и (48), делаем вывод, что в случае, когда $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, также справедливо соотношение (39).

Покажем теперь, что для любой функции ψ, удовлетворяющей условиям теоремы 1, справедливо соотношение

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \quad (49)$$

Для этого, как отмечалось при доказательстве теоремы 1, достаточно показать, что существует постоянная $K_6 > 0$, для которой

$$\psi(\nu) \le K_6\psi(s_\nu). \quad (50)$$

Из соотношения (39) следует, что существует постоянная $K_7 > 0$ такая, что при всех достаточно больших ν будет выполняться неравенство

$$\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} \le K_7\frac{\eta(\psi;\nu)-\nu}{\psi(\nu)}. \quad (51)$$

Возьмем число $k_0 = k_0(K_7) \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2^{k_0}-3}{K_7} \ge 1, \quad (52)$$

и, как и при доказательстве теоремы 1, покажем, что $s_\nu \le \nu_{k_0}$, где $\nu_k = \eta(\psi;\nu_{k-1}),\ k \in \mathbb{N}$, $\nu_0 = \nu$. Отсюда будет следовать, что

$$\psi(s_\nu) \ge \psi(\nu_{k_0}) = \psi(\nu)/2^{k_0},$$

и, значит, справедливы соотношения (50), (49).

Рассмотрим функцию $\Phi(s)$, определяемую равенством (34). Покажем, что при достаточно больших ν выполняется неравенство

$$\int\limits_1^\nu \psi(t)dt \le \Phi(\nu_{k_0}),$$

из которого будет следовать, что $s_\nu \le \nu_{k_0}$.

В силу (34), (51) и (52) имеем

$$\Phi(\nu_{k_0}) \ge \int\limits_\nu^{\nu_{k_0}} \left(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} - \frac{1}{\psi(t)}\right) dt \ge (2^{k_0}-3)\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)} \ge \frac{2^{k_0}-3}{K_7}\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} \ge \int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)}.$$

Поэтому действительно $s_\nu \le \nu_{k_0}$ и $\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu)$ при $\nu \to \infty$.

Если $p = 1$, то

$$\bar{G}_\sigma(\psi;p) = \sup_{s\ge\nu} F_\nu(s) = F_\nu(s_\nu) = p\,\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) = \psi(\sigma+1),$$

и соотношение (24) в таком случае доказано.

Если же $p \in (0,1)$, то для доказательства соотношения (24) остается показать, что

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\eta(\psi;\nu)-\nu}{\psi(\nu)} \quad \text{при} \quad \nu\to\infty. \tag{53}$$

В силу (39) и того, что $s_\nu > \nu$, имеем

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge \int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \ge K_8\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)}. \tag{54}$$

С другой стороны, $s_\nu \le \nu_{k_0}$, и поэтому, учитывая (51), получаем

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \le \int\limits_1^{\nu_{k_0}} \frac{dt}{\psi(t)} = \int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi(t)} + \int\limits_\nu^{\nu_{k_0}} \frac{dt}{\psi(t)} \le K_7\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)} + \frac{\nu_{k_0}-\nu}{\psi(\nu_{k_0})}. \tag{55}$$

Функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$. Поэтому в силу теоремы 13.3 из [19] при всех $t\ge 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\eta(\psi;\eta(\psi;t))-\eta(\psi;t)}{\eta(\psi;t)-t} \le K,$$

из которого следует оценка

$$\frac{\nu_{k_0}-\nu}{\psi(\nu_{k_0})} \le 2^{k_0}\frac{(\eta(\nu)-\nu)(K^{k_0-1}+K^{k_0-2}+\ldots+1)}{\psi(\nu)} = K_9\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)}.$$

Подставляя эту оценку в (55), получаем неравенство

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \le K_7\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)} + K_9\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)} = K_{10}\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)},$$

которое в сочетании с соотношением (54) дает (53).

Таким образом, при $\nu = \sigma+1\to\infty$ и $s = t+1 \ge \nu$ будем иметь

$$\bar{G}_\sigma(\psi;p) = \sup_{t\ge\sigma} F_{\sigma+1}(t+1) = \sup_{s\ge\nu} F_\nu(s) = F_\nu(s_\nu) =$$

$$= p\,\psi(s_\nu)\left(\int\limits_1^{s_\nu}\frac{dt}{\psi(t)}\right)^{1-\frac{1}{p}} \asymp \psi(\nu)\left(\frac{\eta(\nu)-\nu}{\psi(\nu)}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\nu)}{(\eta(\nu)-\nu)^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(\sigma+1)}{(\eta(\sigma+1)-\sigma-1)^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3. При любых $\nu > 1$ и $s > \nu$ рассмотрим функцию $F_\nu(s)$, определяемую равенством

$$F_\nu(s) = \frac{s-\nu}{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}}. \tag{56}$$

Ее производная имеет вид

$$F'_\nu(s) = \frac{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)} - (s-\nu)\psi^{-p}(s)}{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}}.$$

Пусть теперь s_ν — наибольшее на промежутке (ν, ∞) число такое, что при всех $s \in (\nu, s_\nu)$ выполняется неравенство

$$s - \nu \le \psi^p(s) \int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}. \tag{57}$$

Видим, что функция $F'(s)$ при переходе s через число s_ν меняет знак с плюса на минус. Поэтому точка s_ν является точкой максимума функции $F_\nu(s)$ и справедливо равенство $F'_\nu(s_\nu) = 0$, из которого следует

$$F_\nu(s_\nu) = \frac{s_\nu - \nu}{\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}} = \psi^p(s_\nu). \tag{58}$$

Покажем, что, как и в теоремах 1 и 2, в рассматриваемом случае

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{59}$$

Из соотношения (58) следует

$$\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} = \Phi(s_\nu),$$

где

$$\Phi(s) = \int\limits_\nu^s \left(\frac{1}{\psi^p(s)} - \frac{1}{\psi^p(t)} \right) dt. \tag{60}$$

Функция $\Phi(s)$ возрастает при всех $s > \nu$. Поэтому если при некотором s будет выполняться неравенство

$$\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)}\, dt \le \Phi(s), \tag{61}$$

то будет выполняться и соотношение $s_\nu \leq s$.

Рассмотрим возрастающую последовательность чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что при любом $k \in \mathbb{N}$ $\nu_k = \eta(\psi; \nu_{k-1})$, а $\nu_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \nu$. Поскольку функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_C$, то вследствие (19) для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\nu \geq 1$ имеем

$$(K_1+1)^k - 1 \leq \frac{\nu_k - \nu}{\nu} = \frac{\nu_k}{\nu_{k-1}} \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-2}} \ldots \frac{\nu_1}{\nu} - 1 \leq (K_2+1)^k - 1, \tag{62}$$

и поэтому начиная с некоторого номера $k_0 \geq 1$ будем иметь $\nu_{k_0} - \nu > \nu$. Убедимся, что при $s = \nu_{k_0+1}$ справедливо соотношение (61).

Согласно определению последовательности $\{\nu_k\}$

$$\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} = \frac{2^p - 1}{\psi^p(\nu_{k_0})} = \frac{2^{k_0}(2^p-1)}{\psi^p(\nu)} \geq \frac{1}{\psi^p(\nu)}.$$

Отсюда, учитывая монотонность функции ψ, получаем

$$\Phi(\nu_{k_0+1}) \geq \int\limits_{\nu}^{\nu_{k_0+1}} \left(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(t)} \right) dt \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} \right) (\nu_{k_0} - \nu) \geq \frac{\nu}{\psi^p(\nu)} \geq \int\limits_1^{\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)},$$

т. е. неравенство (61) при $s = \nu_{k_0+1}$ выполняется и, следовательно, $s_\nu \leq \nu_{k_0+1}$. Поэтому

$$\psi(\nu) \geq \psi(s_\nu) \geq \psi(\nu_{k+1}) = \psi(\nu)/2^{k_0+1},$$

т. е. действительно соотношение (59) выполняется.

Покажем теперь, что при $\nu \to \infty$

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\nu - 1}{\psi^p(\nu)}. \tag{63}$$

Имеем

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} = \int\limits_0^{s_\nu - 1} \frac{dt}{\psi^p(t+1)} = \frac{s_\nu - 1}{\psi^p(s_\nu)} - p \int\limits_0^{s_\nu - 1} \frac{t|\psi'(t+1)|}{\psi^{p+1}(t+1)} dt \geq \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)} - p \int\limits_0^{s_\nu - 1} \frac{dt}{\alpha(t+1)\psi^p(t+1)},$$

где $\alpha(t) = \alpha(\psi; t)$.

Поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_C$, в силу теоремы 12.1 из [19], для любого $t \geq 1$ справедливо соотношение

$$0 < K_3 \leq \alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq K_4, \tag{64}$$

учитывая которое, получаем оценки

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \ge \frac{s_\nu - 1}{\psi^p(s_\nu)} - \frac{p}{K_3} \int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}$$

и

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \ge \frac{K_3}{K_3 + p} \frac{s_\nu - 1}{\psi^p(s_\nu)}.$$

С другой стороны,

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \le \frac{s_\nu - 1}{\psi^p(s_\nu)},$$

поэтому

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{s_\nu - 1}{\psi^p(s_\nu)}. \tag{65}$$

Поскольку $s_\nu \le \nu_{k_0+1}$, вследствие (62) заключаем, что

$$\nu - 1 \le s_\nu - 1 \le \nu_{k_0+1} - 1 \le (K_2 + 1)^{k_0+1}\nu - 1$$

и, следовательно,

$$s_\nu - 1 \asymp \nu - 1 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{66}$$

Объединяя это соотношение с соотношениями (59) и (65), получаем (63).

Для завершения доказательства теоремы убедимся, что при $\nu \to \infty$

$$\int_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\, dt \asymp (\nu - 1)\psi^{\,q}(\nu). \tag{67}$$

Для этого покажем, что при $s \to \infty$

$$\int_{s}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\, dt \asymp (s - 1)\psi^{\,q}(s). \tag{68}$$

В силу (64) существует постоянная $K_5 > 0$ такая, что для любого $t \ge 1$

$$\frac{\psi^q(t)}{t|(\psi^q(t))'|} \ge K_5.$$

Отсюда следует, что для любого $s \geq 1$

$$\int\limits_s^\infty \psi^q(t)\,dt \geq -K_5 \int\limits_s^\infty t(\psi^q(t))'\,dt \geq -K_5 s \int\limits_s^\infty (\psi^q(t))'\,dt = K_5 s\psi^q(s). \tag{69}$$

Для оценки последнего интеграла сверху положим $s_0 = s$ и $s_k = \eta(\psi; s_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу монотонности функции ψ

$$\int\limits_s^\infty \psi^q(t)\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \psi^q(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^\infty \psi^q(s_k)(s_{k+1} - s_k) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\psi^q(s)}{2^{qk}}(s_{k+1} - s_k). \tag{70}$$

Далее понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функция $\psi_0 \in \mathfrak{M}$ такова, что функция $f(t) \overset{\mathrm{df}}{=} 1/\psi_0(t)$ выпукла вниз при $t \geq t_0 \geq 1$. Тогда при любом $t \geq t_0 \geq 1$ выполняется неравенство*

$$\eta'(\psi_0; t) \leq 2. \tag{71}$$

Доказательство. Действительно, согласно определению функции η при любом $t \geq 1$ имеем

$$f(\eta(\psi_0; t)) = 2f(t),$$

так что

$$f'(\eta(\psi_0; t))\eta'(\psi_0; t) = 2f'(t).$$

Поскольку функция $f(t)$ выпукла вниз при $t \geq a$, ее производная $f'(t)$ на этом промежутке не убывает, и поэтому справедливо соотношение (71):

$$\eta'(\psi_0; t) = \frac{2f'(t)}{f'(\eta(\psi_0; t))} \leq 2.$$

Полагая $\psi_0(t) = \psi(t)$, видим, что функция ψ_0 удовлетворяет условиям леммы 2, и поэтому при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\eta'(\psi; t) \leq 2$. Следовательно,

$$\eta(\psi; \eta(\psi; t)) - \eta(\psi; t) = \int\limits_t^{\eta(\psi;t)} \eta'(\psi; \tau)d\tau \leq 2(\eta(\psi; t) - t).$$

Подставляя эту оценку в (70) и учитывая (19), находим

$$\int\limits_s^\infty \psi^q(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{\psi^q(s)}{2^{qk}}(s_{k+1} - s_k) \leq \psi^q(s)(\eta(\psi; s) - s) \sum_{k=0}^\infty \frac{2^k}{2^{qk}} \leq K_1 s\psi^q(s) \frac{2^{q-1}}{2^{q-1} - 1}.$$

Объединяя эту оценку с оценкой (69), получаем (68). Полагая в (68) $s = s_\nu$ и учитывая (59) и (66), видим, что действительно при $\nu \to \infty$ справедливо соотношение (67).

Таким образом, в силу (59), (63) и (67) при $\nu = \sigma + 1 \to \infty$ имеем

$$\bar{G}_\sigma(\psi, p) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int\limits_1^{s^*+1} \frac{dt}{\psi^p(t)}\right)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s^*+1}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left((s_\nu - \nu)^q \left(\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}\right)^{-\frac{q}{p}} + \int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp (\psi^q(\nu)(\nu-1))^{\frac{1}{q}} \asymp \psi(\sigma+1)\sigma^{\frac{1}{q}},$$

и соотношение (26) доказано.

6. Доказательство теоремы 4. Сначала убедимся в справедливости утверждения 1. Действительно, записывая равенство (23) в виде

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\frac{1}{t\alpha(t)}$$

и интегрируя последнее соотношение по промежутку $[1, t]$, $t > 1$, получаем

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right).$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то $\mu(\psi; t)$ монотонно стремится к бесконечности при $t \to \infty$, поэтому в силу (40) имеем

$$\alpha(\psi; t) \le 2\frac{\eta(\psi; t) - t}{t} = \frac{2}{\mu(\psi; t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда следует, что для произвольного $r > 0$ найдется число t_r такое, что при всех $t > t_r$ выполняется неравенство $1/\alpha(t) > r$. Поэтому при $t > t_r$ имеем

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^{t_r} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} - \int\limits_{t_r}^{t} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right) \le$$

$$\le \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^{t_r} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)\exp\left(-r\int\limits_{t_r}^{t} \frac{d\tau}{\tau}\right) = \psi(1)\,t_r^r\exp\left(-\int\limits_1^{t_r} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)t^{-r},$$

откуда и следует соотношение (27), а с ним и оценка

$$\|\psi\|^q_{L_q[1,\infty)} = \int\limits_1^{\infty} \psi^q(t)dt \le K\int\limits_1^{\infty} t^{-q}dt < \infty.$$

Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательствам теорем $1-3$, поэтому отметим только его основные моменты.

Прежде всего, повторяя рассуждения из доказательства соотношения (39), убеждаемся, что для произвольной функции ψ, удовлетворяющей условиям теоремы 4, справедливо порядковое при $s \to \infty$ равенство

$$\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi^p(s)}. \tag{72}$$

Далее, рассмотрим функцию $F_\nu(s)$, определяемую равенством (56), и отметим, что если s_ν — наибольшее на промежутке (ν, ∞) число такое, что при всех $s \in (\nu, s_\nu)$ имеет место неравенство (57), то точка $s = s_\nu$ является точкой максимума функции $F_\nu(s)$ и выполняется равенство (58).

Покажем, что, как и во всех предыдущих теоремах, в рассматриваемом случае

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{73}$$

Из соотношения (72) следует, что для любой функции ψ, удовлетворяющей условиям теоремы, существует постоянная $K > 0$ такая, что при всех достаточно больших ν

$$\int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} \le K \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi^p(\nu)}. \tag{74}$$

Возьмем число $k_0 = k_0(K) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{2^{k_0} - 3}{K} \ge 1, \tag{75}$$

и рассмотрим функцию $\Phi(s)$, задаваемую равенством (60). Покажем, что при достаточно больших ν выполняется неравенство

$$\int\limits_1^\nu \psi^p(t) dt \le \Phi(\nu_{k_0}), \quad \nu_k = \eta(\psi^p; \nu_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \nu_0 = \nu,$$

из которого будет следовать, что $s_\nu \le \nu_{k_0}$.

В силу (74) и (75) имеем

$$\Phi(\nu_{k_0}) = \int\limits_\nu^{\nu_{k_0}} \left(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} - \frac{1}{\psi^p(t)} \right) dt \ge (2^{k_0} - 3) \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi^p(\nu)} \ge \frac{2^{k_0} - 3}{K} \int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} \ge \int\limits_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)}.$$

Поэтому действительно $s_\nu \le \nu_{k_0}$ и, следовательно,

$$\psi(\nu) \ge \psi(s_\nu) \ge \psi(\nu_{k_0}) = \frac{\psi(\nu)}{2^{k_0 p}},$$

т. е. $\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu)$.

Далее, как и при доказательстве соотношения (53), убеждаемся, что при $\nu \to \infty$ справедливо порядковое равенство

$$\int\limits_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\eta(\psi;\nu)-\nu}{\psi^p(\nu)}. \tag{76}$$

Для завершения доказательства данной теоремы покажем, что при $\nu \to \infty$

$$\int\limits_{s_\nu}^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \psi^{\,q}(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu). \tag{77}$$

Для любого $s > 1$ имеем

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt = -s\psi(s) + q\int\limits_s^{\infty} t|\psi'(t)|\psi^{q-1}(t)dt = -s\psi(s) + q\int\limits_s^{\infty} \frac{\psi^q(t)dt}{\alpha(\psi;t)},$$

откуда, в силу монотонного убывания функции $\alpha(\psi;t)$ и соотношения (40), получаем

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \geq \frac{\alpha(\psi;s)\,s}{q-\alpha(\psi;s)}\psi^q(s) \geq K_1\psi^{\,q}(s)(\eta(\psi;s)-s). \tag{78}$$

Для любого $s \geq 1$ положим $s_0 = s$ и $s_k = \eta(\psi;s_{k-1})$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \psi^{\,q}(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty}\psi^{\,q}(s_k)(s_{k+1}-s_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi^{\,q}(s)}{2^{qk}}(s_{k+1}-s_k). \tag{79}$$

Поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то в силу (21) $\eta(\psi;t) = t(1+\gamma(t))$, где $\gamma(t)$ — функция, монотонно убывающая к нулю. Отсюда следует, что при $t \to \infty$ $\eta'(\psi;t) \leq 1+\gamma(t) \to 1$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ (в частности, для $\varepsilon \in (0,1)$) при всех t, больших некоторого числа $t_0 = t_0(\varepsilon)$, имеем $\eta'(\psi;t) \leq 1+\varepsilon$, и тогда

$$\eta(\psi;\eta(\psi;t)) - \eta(\psi;t) = \int\limits_t^{\eta(\psi;t)} \eta'(\psi;\tau)d\tau \leq (1+\varepsilon)(\eta(\psi;t)-t).$$

Подставляя эту оценку в (79), при $s > t_0$ получаем

$$\int\limits_s^{\infty} \psi^{\,q}(t)\,dt \leq \psi^{\,q}(s)(\eta(\psi;s)-s)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon)^k}{2^{qk}} \leq K_2\psi^{\,q}(s)(\eta(\psi;s)-s). \tag{80}$$

Объединяя соотношения (80) и (78), видим, что действительно

$$\int_s^\infty \psi^q(t)\,dt \asymp \psi^q(s)(\eta(\psi;s)-s), \quad s\to\infty. \tag{81}$$

Отсюда в силу того, что $s_\nu > \nu$, имеем

$$\int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t)\,dt \le \int_\nu^\infty \psi^q(t)\,dt \asymp \psi^q(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu). \tag{82}$$

С другой стороны, $s_\nu \le \nu_{k_0}$. Поэтому, учитывая, что в силу определения всегда $\eta'(\psi;t) \ge \ge \frac{1}{2}$, и, следовательно,

$$\eta(\psi;\eta(\psi;t)) - \eta(\psi;t) = \int_t^{\eta(\psi;t)} \eta'(\psi;\tau)d\tau \ge \frac{1}{2}(\eta(\psi;t)-t),$$

при $\nu\to\infty$ получаем

$$\int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t)\,dt \ge \int_{\nu_{k_0}}^\infty \psi^q(t)\,dt \asymp \psi^q(\nu_{k_0})(\eta(\psi;\nu_{k_0})-\nu_{k_0}) \ge \frac{1}{2^{2k_0}}\psi^q(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu). \tag{83}$$

Объединяя соотношения (82) и (83), убеждаемся, что действительно справедливо порядковое равенство (77).

Таким образом, вследствие (73), (76) и (77) при $\nu=\sigma+1\to\infty$

$$\bar{G}_\sigma(\psi;p) = \left((s^*-\sigma)^q\left(\int_1^{s^*+1}\frac{dt}{\psi^p(t)}\right)^{-\frac{q}{p}} + \int_{s^*+1}^\infty \psi^q(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left((s_\nu-\nu)^q\left(\int_1^{s_\nu}\frac{dt}{\psi^p(t)}\right)^{-\frac{q}{p}} + \int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp (\psi^q(\nu)(\eta(\psi;\nu)-\nu))^{\frac{1}{q}} \asymp \psi(\sigma+1)(\eta(\psi;\sigma+1)-\sigma-1)^{\frac{1}{q}},$$

и соотношение (28) доказано.

7. Случай дискретной меры $d\mu$. В этом пункте мы рассмотрим следствия из теорем 1 и 3 для случая, когда $\sigma=n\in\mathbb{N}$, $A=\mathbb{N}$, а носителем меры $d\mu$ в пространстве $\mathbb{R}^+$ является множество $\mathbb{N}$, где $\mu(k)\equiv 1$.

В рассматриваемом случае величины $G_\sigma(\varphi, p)$ при $p \in (0,1]$ имеют вид

$$G_\sigma(\varphi, p) = G_n(\varphi, p) = \sup_{l>n} \frac{l-n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{l} \bar{\varphi}^{\,-p}(k)\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{84}$$

где $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — убывающая перестановка функции (последовательности) $\varphi \in \Phi(\mathbb{N})$ относительно меры $d\mu$, и для них справедливо следующее утверждение.

Теорема 1$'$. *Пусть функция $\varphi \in \Phi(\mathbb{N})$ такова, что при любом $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\varphi}(k) = \psi(k)$, где $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для любого $p \in (0,1]$ справедливо порядковое при $n \to \infty$ равенство*

$$G_n(\varphi, p) \asymp \frac{\bar{\varphi}(n)}{n^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{85}$$

Доказательство. Для произвольной функции $\psi \in \mathfrak{M}_0$ и любых $n \in \mathbb{N}$ и $s > n$ положим

$$F_n(s) = \frac{s-n}{\left(\int\limits_1^s \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad H_n(s) = \frac{[s]-n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{[s]} \frac{1}{\psi(k)}\right)^{\frac{1}{p}}}, \tag{86}$$

где $[s]$ — целая часть числа s.

Вследствие неравенства

$$\int\limits_1^{s-1} \frac{dt}{\psi(t)} \le \sum_{k=1}^{[s]} \frac{1}{\psi(k)} \le \int\limits_1^{s+1} \frac{dt}{\psi(t)}, \tag{87}$$

выполняющегося при любом $s > 1$, имеем $F_{n+2}(s+1) \le H_n(s) \le F_{n-1}(s-1)$, откуда следует, что

$$\sup_{s>n} F_{n+2}(s+1) \le \sup_{s>n} H_n(s) \le \sup_{s>n} F_{n-1}(s-1). \tag{88}$$

В силу теоремы 1 при $n \to \infty$ имеем

$$\sup_{s>n} F_{n+2}(s+1) \ge \sup_{s+1>n+2} F_{n+2}(s+1) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(n+2)}{(n+1)^{\frac{1}{p}-1}} \tag{89}$$

и

$$\sup_{s>n} F_{n-1}(s-1) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(n-1)}{(n-2)^{\frac{1}{p}-1}}. \tag{90}$$

Поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_0$, учитывая теорему 16.1 из [19, с. 175], для любого $t \ge 2$ имеем

$$\psi(t-1) \ge \psi(t) \ge \psi(t+2) \ge K\psi(t-1). \tag{91}$$

Отсюда следует, что величины в правых частях соотношений (89) и (90) равны по порядку при $n \to \infty$, поэтому

$$\sup_{s>n} H_n(s) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(n)}{n^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Подставляя в это соотношение $\psi(t) = \bar{\varphi}^p(t)$, получаем (85).

В случае, когда $p \in (1, \infty)$,

$$G_\sigma(\varphi, p) = G_n(\varphi, p) = \left((s^* - n)^q \left(\sum_{k=1}^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(k) \right)^{-\frac{q}{p}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \bar{\varphi}^{\,q}(k) \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (92)$$

где s^* — наибольшее на промежутке (n, ∞) натуральное число такое, что при всех натуральных s из промежутка $(n, s^*]$ выполняется соотношение

$$s - n \le \bar{\varphi}^{\,p}(s) \sum_{k=1}^{s} \bar{\varphi}^{\,-p}(k).$$

Такое число всегда существует, и его можно также определить из соотношения

$$\bar{\varphi}^{\,-p}(s^*) \le \frac{1}{s^* - n} \sum_{k=1}^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(k) < \bar{\varphi}^{\,-p}(s^* + 1).$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3′. *Пусть $p \in (1, \infty]$, а функция $\varphi \in \Phi(\mathbb{N})$ такова, что значения ее перестановки $\bar{\varphi}(k)$ в натуральных точках совпадают со значениями некоторой функции $\psi \in \mathfrak{M}_C : \bar{\varphi}(k) = \psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которой $\|\psi\|_{L_q[1,\infty)} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и функция $1/\psi(t)$ выпукла вниз при всех $t \ge t_0 \ge 1$. Тогда при $n \to \infty$*

$$G_n(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(n) n^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (93)$$

Доказательство. В этому случае положим

$$F_n(s) = \frac{s - n}{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}} \quad \text{и} \quad H_n(s) = \frac{[s] - n}{\sum_{k=1}^{[s]} \frac{1}{\psi^p(k)}},$$

где $[s]$ — целая часть числа s.

Пусть также s^* — наибольшее на промежутке (n, ∞) натуральное число такое, что при всех натуральных $s \in (n, s^*]$ выполняется соотношение

$$H_n(s) \le \psi^p(s), \qquad (94)$$

а s_n — наибольшее на (n, ∞) число, для которого при всех $s \in (n, s^*)$

$$F_n(s) \le \psi^p(s). \tag{95}$$

Тогда при всех натуральных $s \in (n, s^*]$ имеем

$$H_n(s) - H_n(s-1) = \frac{s-n}{\sum\limits_{k=1}^{s} \psi^{-p}(k)} - \frac{(s-1)-n}{\sum\limits_{k=1}^{s-1} \psi^{-p}(k)} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{s-1} \psi^{-p}(k) - \frac{s-1-n}{\psi^p(s)} \right) \left(\sum_{k=1}^{s} \psi^{-p}(k) \sum_{i=1}^{s-1} \psi^{-p}(i) \right)^{-1} \ge 0,$$

и, следовательно, функция $H_n(s)$ на промежутке $s \in (n, s^*]$ не убывает. Аналогично убеждаемся, что при $s > s^*$ функция $H_n(s)$ не возрастает. Отсюда следует

$$H_n(s^*) = \sup_{s>n} H_n(s).$$

Покажем сначала, что при $n \to \infty$ справедливо порядковое равенство

$$H_n(s^*) \asymp \psi^p(n). \tag{96}$$

Вследствие неравенства (87) имеем

$$F_{n+1}(s+2) \le H_n(s) \le F_{n-1}(s-1),$$

откуда следует, что

$$\sup_{s>n} F_{n+2}(s+1) \le \sup_{s>n} H_n(s) \le \sup_{s>n} F_{n-1}(s-1). \tag{97}$$

Кроме того, аналогично доказательству соотношения (59) можно показать, что

$$\sup_{s>n} F_n(s) = \psi^p(s_n) \asymp \psi^p(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{98}$$

Объединяя (97), (98) и учитывая (91), получаем (96).

Учитывая (91), из соотношения

$$\psi^{-p}(s^*) \le \frac{1}{s^*-n} \sum_{k=1}^{s^*} \psi^{-p}(k) < \psi^{-p}(s^*+1),$$

которое равносильно условию (94), и равенства (96) получаем

$$\psi(s^*) \asymp \psi(n).$$

Далее, поскольку для $s \in \mathbb{N}$ выполнимо равенство $H_n(s) = F_n(s)$, то из соотношений (94) и (95) заключаем, что $F_n(s^*) \leq \psi^p(s^*)$. Поэтому $n \leq s^* \leq s_n$, и при $n \to \infty$ справедливо порядковое равенство

$$s^* \asymp n. \tag{99}$$

Объединяя соотношение (87) при $s = s^*$ и соотношение (63), а также учитывая (91) и (99), получаем

$$\sum_{k=1}^{s^*} \frac{1}{\psi^p(k)} \asymp \frac{n}{\psi^p(n)}. \tag{100}$$

Наконец, поскольку

$$\int\limits_{s^*+1} \psi^q(t)dt \leq \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \psi^q(k) \leq \int\limits_{s^*} \psi^q(t)dt,$$

в силу (67) и (99) с учетом (91) при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{k=s^*+1}^{\infty} \psi^q(k) \asymp n\psi^q(n). \tag{101}$$

Объединяя при $\psi(t) = \bar{\varphi}(t)$ соотношения (96), (100), (101) и учитывая принятые обозначения, получаем (93):

$$G_n(\varphi, p) = \left((s^* - n)^q \left(\sum_{k=1}^{s^*} \bar{\varphi}^{\,-p}(k)\right)^{-\frac{q}{p}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \bar{\varphi}^{\,q}(k)\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\bar{\varphi}^{\,pq}(k) \left(\frac{\bar{\varphi}^p(n)}{n}\right)^{\frac{q}{p}-q} + n\bar{\varphi}^q(n)\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \bar{\varphi}(n) n^{1-\frac{1}{p}}.$$

Как уже отмечалось, в терминах величин $G_\sigma(\varphi, p)$ выражаются решения ряда известных экстремальных задач. Понятно, что соотношения (85) и (93) будут полезны при нахождении точных порядков таких решений. В качестве примера получим точные порядки поперечников по Колмогорову октаэдров в гильбертовом пространстве, отправляясь от их значений, найденных в [17].

Пусть

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x - u\|_Y$$

— поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Y с нормой $\|\cdot\|_Y$. Здесь $\mathcal{F}_n$ — множество всех подпространств F_n размерности $n \in \mathbb{N}$ пространства Y.

Пусть, далее, H — вещественное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_1, e_2, \ldots e_k, \ldots$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ — произвольная последовательность вещественных чисел. Октаэдром O_α называется выпуклая оболочка векторов $\pm\alpha_1 e_1$, $\pm\alpha_2 e_2, \ldots, \pm\alpha_k e_k, \ldots$.

В работе [17] (см. также [18], гл. VI) установлено, что если последовательность α такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, то

$$d_n(O_\alpha, H) = \sup_{s>n} \sqrt{\frac{s-n}{\sum\limits_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i^{-2}}},$$

где $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая перестановка последовательности $|\alpha_k|$.

Сравнивая значения величин $d_n(O_\alpha, H)$ в этом случае со значениями величин $G_n(\varphi, p)$, определяемых соотношением (84), видим, что если $p = 1$ и $\bar{\varphi}(k) = \bar{\alpha}_k^2$, то выполнимо равенство

$$d_n^2(O_\alpha, H) = G_n(\varphi, p).$$

Из этого соотношения и теоремы $1'$ получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что при любом $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\alpha}_k = \psi(k)$, где $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тогда справедливо порядковое при $n \to \infty$ равенство*

$$d_n(O_\alpha, H) \asymp \bar{\alpha}_n,$$

где $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая перестановка последовательности $|\alpha_k|$.

8. Приложения полученных результатов к приближениям в пространствах S^p_φ. Рассмотрим приложения полученных результатов к задачам приближения в пространствах S^p_φ, а именно, получим порядковые равенства при $n \to \infty$ для величин наилучших n-членных приближений q-эллипсоидов в этих пространствах.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, определено некоторое число — „скалярное произведение” (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\overline{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\widehat{x}(k)$ посредством равенств

$$\widehat{x}(k) = \widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \ (k \in \mathbb{N}),$$

и при фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}.$$

Элементы $x, y \in S^p_\varphi$ считаются тождественными, если при всех $k \in \mathbb{N}$ $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Для векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определяется φ-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_{\varphi}(x,y)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_{\varphi}(k) - \widehat{y}_{\varphi}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нулевым элементом пространства S^p_{φ} называется вектор θ, для которого $\widehat{\theta}_{\varphi}(k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Расстояние $\rho_{\varphi}(\theta, x)_p$, $x \in S^p_{\varphi}$, называется φ-нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_{p,\varphi}$. Таким образом,

$$\|x\|_{p,\varphi} = \rho_{\varphi}(\theta,x)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_{\varphi}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{102}$$

Известно (см., например, [7]), что множество S^p_{φ} является линейным пространством. Кроме того, при $p \geq 1$ функционал $\|\cdot\|$, определенный равенством (102), удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0,1)$ — аксиомам квазинормы. Поэтому при $p \geq 1$ S^p_{φ} — линейное нормированное пространство, а при $p \in (0;1)$ — пространство с квазинормой.

Выделим также в пространствах S^p_{φ} объекты приближения — объединения элементов $f \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории аппроксимаций понятию класса функций.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$, формальный ряд Фурье которого по системе φ имеет вид

$$S[\,f\,]_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_{\varphi}(k)\varphi_k,$$

существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[\,f\,]_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k\, \widehat{f}(k)\varphi_k,$$

т. е. когда $\widehat{F}_{\varphi}(k) = \psi_k\, \widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, то элемент F называется ψ-интегралом элемента f. В таком случае записываем $F = \mathcal{J}^{\psi} f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначаем множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$.

Пусть, далее,

$$U^p_{\varphi} = \left\{f \in S^p_{\varphi} : \|f\|_{p,\varphi} \leq 1\right\}$$

— единичный шар в данном пространстве S^p_{φ} и ψU^p_{φ} — множество ψ-интегралов всех элементов из U^p_{φ}.

Заметим, что если пространство S^p_{φ} является полным, а

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{103}$$

то

$$\psi\, U^p_{\varphi} = \left\{ f \in S^p_{\varphi} : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\widehat{f}(k)}{\psi_k}\right|^p \leq 1 \right\},$$

т. е. множество ψU_φ^p является p-эллипсоидом в пространстве S_φ^p с полуосями, равными $|\psi_k|$.

Пусть, наконец, $f \in S_\varphi^p$, $n \in \mathbb{N}$, γ_n — произвольный набор из n натуральных чисел и

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k,$$

где α_k — некоторые комплексные числа.

Величина

$$e_n(f)_p = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\varphi} \tag{104}$$

называется наилучшим n-членным приближением элемента $f \in S_\varphi^p$ в пространстве S_φ^p.

Величины вида (104) рассматривались в работах [7–13]. В частности, в работах [7–10] были найдены точные значения величин

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} e_n(f)_p$$

наилучших n-членных приближений классов ψU_φ^q в пространствах S_φ^p при всех $0 < p$, $q < \infty$. Для этих значений справедливы следующие утверждения.

Теорема C. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (103) и*

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k = 0, \tag{105}$$

p и q — произвольные числа такие, что $0 < q \le p < \infty$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \sup_{l \in \mathbb{N}} (l - n) \left(\sum_{k=1}^{l} \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}} = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}},$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — перестановка в убывающем порядке последовательности $|\psi_k|$, а l^* — некоторое натуральное число.

Теорема D. *Пусть p и q — произвольные числа, для которых $q > p > 0$, а $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (103) и*

$$\|\psi\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty. \tag{106}$$

Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \bar{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}} \left[(s^* - n)^{\frac{q}{q-p}} + \bar{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}} \bar{\sigma}_2 \right]^{\frac{q-p}{q}},$$

где

$$\bar\sigma_1 = \bar\sigma_1(s^*) = \sum_{k=1}^{s^*} \bar\psi_k^{-q}, \quad \bar\sigma_2 = \bar\sigma_2(s^*) = \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \bar\psi_k^{\frac{pq}{q-p}},$$

$\bar\psi = \{\bar\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— перестановка в убывающем порядке последовательности* $|\psi_k|$, *а число* s^* *выбрано из условия*

$$\bar\psi_{s^*}^{-q} \le \frac{1}{s^*-n}\sum_{k=1}^{s^*}\bar\psi_k^{-q} < \bar\psi_{s^*+1}^{-q}.$$

Такое число s^* *всегда существует и единственно.*

Отметим, что условия (105) и (106) гарантируют в соответствующих случаях вложение $\psi U_\varphi^q \subset S_\varphi^p$.

Сравнивая значения величин $e_n(\psi\, U_\varphi^q)_p$ из теорем C и D со значениями величин $G_n(\varphi, p)$, определяемых соотношениями (84) и (92), видим, что если $r = \dfrac{q}{p}$ и при любом $k \in \mathbb{N}$ $\bar\varphi(k) = \bar\psi_k^p$, то для всех $0 < p, q < \infty$ справедливо равенство

$$e_n^p(\psi\, U_\varphi^q)_p = G_n(\varphi, r).$$

Из этого соотношения и теорем $1'$ и $3'$ следуют утверждения, дающие порядки при $n \to \infty$ величин $e_n(\psi\, U_\varphi^q)_p$.

Утверждение 3. *Пусть последовательность* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что при всех* $k \in \mathbb{N}$ $\bar\psi_k = \psi_1(k)$, *где* ψ_1 *— некоторая функция из множества* $\mathfrak{M}_0$. *Тогда для любых* $0 < q \le p < \infty$ *справедливо порядковое при* $n \to \infty$ *равенство*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \frac{\bar\psi_n}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

Утверждение 4. *Пусть* $0 < p < q < \infty$, *а последовательность* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет при любом* $k \in \mathbb{N}$ *равенству* $\bar\psi_k^p = \psi_1(k)$, *где функция* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_C$ *такова, что* $\|\psi_1\|_{L_{\frac{q-p}{q}}[1,\infty)} < \infty$ *и функция* $1/\psi_1(t)$ *выпукла вниз при всех* $t \ge t_0 \ge 1$. *Тогда справедливо порядковое при* $n \to \infty$ *равенство*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \bar\psi_n n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

1. *Степанец А. И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 10. — С. 1378–1410.

2. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 1. — С. 37–40.

3. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций. — Киев, 2007. — 103 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2).

4. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций // Докл. НАН Украины. — 2007. — № 3. — С. 25–31.

5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. — М.: Наука, 1970. — 320 с.
6. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
7. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2001.— **53**, № 3. — С. 392 – 416.
8. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Там же. — № 8. — С. 1121 – 1146.
9. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Труды Ин-та математики НАН Украины. — 2002. — **40**, ч. II. — С. 333 – 368.
10. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства S^p с несимметрической метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 2. — С. 264 – 277.
11. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Наилучшие n-членные приближения Λ-методами в пространствах S^p_φ // Там же. — № 8. — С. 1107 – 1126.
12. *Шидлич А. Л.* Наилучшие n-членные приближения Λ-методами в пространствах S^p_φ // Экстремальные задачи теории функций и смежные вопросы: Труды Ин-та математики НАН Украины. — 2003. — **46**. — С. 283 – 306.
13. *Рукасов В. И.* Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 6. — С. 806 – 816.
14. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Об одной экстремальной задаче для положительных рядов // Там же. — 2005. — **57**, № 12. — С. 1677 – 1683.
15. *Fang Gensun, Qian Lixin.* Approximation characteristics for diagonal operators in different computational settings // J. Approxim. Theory. — 2006. — **140**, Issue 2. — P. 178 – 190.
16. *Софман Л. Б.* Поперечники октаэдров // Мат. заметки. — 1969. — **5**, № 4. — С. 429 – 436.
17. *Софман Л. Б.* Поперечники бесконечного октаэдра // Вестн. Моск. ун-та. — 1973. — № 5. — С. 54 – 56.
18. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. — Springer, 1985. — 291 p.
19. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Труды Ин-та математики НАН Украины. — 2002. — **40**, ч. I. — С. 159 – 176.
20. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 688 – 702.

Получено 05.07.07