УДК 517 . 929

УСЕРЕДНЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ З ВІДХИЛЕНИМ АРГУМЕНТОМ*

Р. І. Петришин, І. М. Данилюк

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2
e-mail: rompetr@math.chnu.cv.ua

Using an averaging method we study solvability of a boundary-value problem for a multifrequency system with a shift in the argument and integral boundary-value conditions. We also obtain an estimate for the difference between the initial and the averaged problems.

С помощью метода усреднения исследована разрешимость краевой задачи для многочастотной системы с отклоненным аргументом и интегральными краевыми условиями, а также получена оценка разности решений исходной и усредненной задач.

Дослідження розв'язності крайових задач для диференціальних рівнянь значно спрощується, якщо до таких задач застосувати метод усереднення [1 – 4]. У випадку інтегральних крайових умов крім самих рівнянь можна усереднювати і крайові умови [1, 5]. У даній статті використано розроблену в [1] методику для вивчення розв'язності крайової задачі з інтегральними крайовими умовами для багаточастотної системи з відхиленим аргументом і встановлено ефективну оцінку різниці розв'язків вихідної та усередненої задач.

Розглянемо нелінійну систему $n+m$ диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними і запізненням вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau), \quad \tau \in [0, L], \end{aligned} \tag{1}$$

де $x = x(\tau,\varepsilon) \in D \subset R^n, \varphi = \varphi(\tau,\varepsilon) \in R^m, x_\lambda = x(\lambda(\tau),\varepsilon), \varphi_\lambda = \varphi(\lambda(\tau),\varepsilon), \varepsilon$ — малий додатний параметр, D — відкрита обмежена область, $\lambda(\tau)$ — неперервно диференційовна на $[0, L]$ функція, яка задовольняє умови

$$\begin{gathered} \lambda(\tau) < \tau, \quad \lambda(0) = -\Delta < 0, \quad 0 < \sigma_1^{-1} < \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} < \sigma_1 = \text{const}\,, \\ \lambda(\tau_0) = 0, \quad \tau_0 \in (0, L). \end{gathered} \tag{2}$$

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1/007).

Нехай $x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)$ задовольняє крайову умову

$$x(\tau,\varepsilon) = f(\tau) + \int\limits_0^L \eta(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau)\, d\tau, \quad \varphi(\tau,\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Omega(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^L \left(C_1(\tau)\varphi + C_2(\tau)\varphi_\lambda + \xi(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau)\right) d\tau, \qquad \tau \in [-\Delta, 0]. \tag{3}$$

Тут C_1 і C_2 — неперервні на $[0,L]$ $(m \times m)$-матриці, a, η, f і $\omega, b, g, \Omega, \xi$ — відповідно n- і m-вимірні вектори.

Вважатимемо, що $2(n+m)$-вимірна вектор-функція $z(y,\theta,\tau) = (a(y,\theta,\tau), \eta(y,\theta,\tau), b(y,\theta,\tau), \xi(y,\theta,\tau))$, де $y = (x, x_\lambda), \theta = (\varphi, \varphi_\lambda)$, має неперервні обмежені сталою σ_1 частинні похідні по всіх змінних до другого порядку на множині $D^2 \times R^{2m} \times [0,L]$, належить класу майже періодичних по θ функцій, які розкладаються в ряд Фур'є

$$z(y,\theta,\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} z_s(y,\tau) e^{i(\lambda_s,\theta)},$$

де $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця, $\lambda_0 = 0, \lambda_s \neq 0$ при $s \geq 1$, (λ_s, θ) — скалярний добуток в R^{2m}, коефіцієнти $z_s(y,\tau)$ якого задовольняють нерівність

$$\sum_{s\geq 1}\left[\left(\|\lambda_s\| + \frac{1}{\|\lambda_s\|}\right)\sup_{D_1}\|z_s(y,\tau)\| + \left(1 + \frac{1}{\|\lambda_s\|}\right)\left(\sup_{D_1}\left\|\frac{\partial z_s(y,\tau)}{\partial y}\right\| + \sup_{D_1}\left\|\frac{\partial z_s(y,\tau)}{\partial \tau}\right\|\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|\lambda_s\|}\left(\sup_{D_1}\left\|\frac{\partial^2 z_s(y,\tau)}{\partial y \partial \tau}\right\| + \sum_{j=1}^{n}\sup_{D_1}\left\|\frac{\partial^2 z_s(y,\tau)}{\partial y \partial y_j}\right\|\right)\right] \leq$$

$$\leq \sigma_1, \;\; D_1 = D^2 \times [0,L]. \tag{4}$$

Припустимо, що $f(\tau)$ і $g(\tau,\varepsilon)$ неперервно диференційовні по τ, до того ж

$$\|f(\tau)\| + \left\|\frac{df(\tau)}{d\tau}\right\| + \left\|\frac{dg(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\| \leq \sigma_1, \;\; \tau \in [-\Delta, 0], \; \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{5}$$

Розглянемо усереднену по φ, φ_λ задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau), \;\; \tau \in [0,L], \tag{6.1}$$

$$\bar{x}(\tau) = f(\tau) + \int\limits_0^L \eta_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau)\, d\tau, \;\; \tau \in [-\Delta, 0], \tag{6.2}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau), \ \tau \in [0, L], \tag{6.3}$$

$$\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Omega(t)\,dt + \int\limits_0^L (C_1(\tau)\bar{\varphi} + C_2(\tau)\bar{\varphi}_\lambda +$$

$$+ \xi_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau))\,d\tau, \ \tau \in [-\Delta, 0], \tag{6.4}$$

в якій $(a_0, \eta_0, b_0, \xi_0) = z_0$.

Для розв'язання крайової задачі (6.1), (6.2) розглянемо допоміжну початкову задачу

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau), \ \tau \in [0, L], \\ &\bar{x}(\tau) = f(\tau) + \mu, \ \tau \in [-\Delta, 0], \end{aligned} \tag{7}$$

де μ — деякий параметр, $\mu \in \tilde{D} \subset R^n$, $\tilde{D}$ — відкрита область. Нехай розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \mu)$ цієї задачі визначено для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$, $\mu \in \tilde{D}$. Розглянемо рівняння

$$\mu = \int\limits_0^L \eta_0(\bar{x}(\tau, \mu), \bar{x}(\lambda(\tau), \mu), \tau)\,d\tau \tag{8}$$

і припустимо, що $\mu = \bar{\mu} \in \tilde{D}$ — розв'язок цього рівняння. Тоді $\bar{x}(\tau, \bar{\mu})$ є розв'язком крайової задачі (6.1), (6.2).

Розглянемо далі початкову задачу

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau), \quad \tau \in [0, L],$$

$$\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Omega(t)\,dt + \nu, \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

в якій $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{\mu})$, $\bar{x}_\lambda = \bar{x}(\lambda(\tau), \bar{\mu})$, $\nu \in R^m$ — параметр, і позначимо її розв'язок $\bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \nu, \varepsilon)$. Тоді для всіх $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ маємо

$$\bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \nu, \varepsilon) = g(0, \varepsilon) + \nu + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \omega(t)\,dt + \int\limits_0^\tau b_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau)d\tau. \tag{9}$$

Підберемо ν так, щоб функція (9) була розв'язком крайової задачі (6.3), (6.4). Для цього досить припустити, що матриця

$$P_1 = E - \int\limits_0^L (C_1(\tau) + C_2(\tau))\,d\tau,$$

де E — одинична m-вимірна матриця, є невиродженою.

Тоді

$$\bar{\varphi}(\tau,\bar{\mu},\bar{\nu},\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Omega(t)\,dt + \bar{\nu}, \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

$$\bar{\varphi}(\tau,\bar{\mu},\bar{\nu},\varepsilon) = g(0,\varepsilon) + \bar{\nu} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \omega(t)\,dt + \int\limits_0^\tau b_0(\bar{x}(t,\bar{\mu}),\bar{x}(\lambda(t),\bar{\mu}),t)\,dt, \quad \tau \in [0, L],$$

є розв'язком задачі (6.3), (6.4), де

$$\bar{\nu} = P_1^{-1}\left(\int\limits_0^L \xi_0(\bar{x}(\tau,\bar{\mu}),\bar{x}(\lambda(\tau),\bar{\mu}),\tau)\,d\tau + \int\limits_0^L C_1(\tau)e(\tau,\bar{\mu},\varepsilon)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\tau_0} C_2(\tau)\left(g(\lambda(\tau),\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\lambda(\tau)} \Omega(t)\,dt\right)d\tau + \int\limits_{\tau_0}^L C_2(\tau)e(\lambda(\tau),\bar{\mu},\varepsilon)\,d\tau\right),$$

$$e(\tau,\bar{\mu},\varepsilon) = g(0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \omega(t)\,dt + \int\limits_0^\tau b_0(\bar{x}(t,\bar{\mu}),\bar{x}(\lambda(t),\bar{\mu}),t)\,dt.$$

Позначимо через P_2 квадратну n-вимірну матрицю

$$P_2 = E - \int\limits_0^L \left(\frac{\partial \eta_0(\bar{x}(\tau,\bar{\mu}),\bar{x}(\lambda(\tau),\bar{\mu}),\tau)}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}(\tau,\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \eta_0(\bar{x}(\tau,\bar{\mu}),\bar{x}(\lambda(\tau),\bar{\mu}),\tau)}{\partial \bar{x}_\lambda}\frac{\partial \bar{x}(\lambda(\tau),\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}}\,d\tau\right).$$

Перейдемо тепер до розв'язання вихідної крайової задачі (1), (3) методом усереднення. Для того щоб усереднена система (6.1), (6.3) правильно описувала еволюцію розв'язків системи (1) на часовому відрізку $[0, L]$, потрібно накласти певні обмеження на частоти $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau),\ldots,\omega_m(\tau))$ і $\Omega(\tau) = (\Omega_1(\tau),\ldots,\Omega_m(\tau))$ [1]. Нехай

$$\omega_\nu(\tau) \in C^{p-1}_{[0,L]},\ \Omega_\nu(\tau) \in C^{p-1}_{[-\Delta,0]},\ \lambda(\tau) \in C^p_{[0,L]}, \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10}$$

при деякому натуральному $p \geq 2m$. Позначимо через $\overline{A}(\tau)$, $\underline{A}(\tau)$ і $\underline{B}(\tau)$ $(p \times m)$-вимірні матриці

$$\overline{A}(\tau) = \left(\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\,\omega_\nu(\tau)\right)_{l,\nu=1}^{p,m}, \quad \tau \in [0, L],$$

$$\underline{A}(\tau) = \left(\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}} \left(\omega_\nu(\lambda(\tau)) \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right) \right)_{l,\nu=1}^{p,m}, \quad \tau \in [\tau_0, L],$$

$$\underline{B}(\tau) = \left(\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}} \left(\Omega_\nu(\lambda(\tau)) \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right) \right)_{l,\nu=1}^{p,m}, \quad \tau \in [0, \tau_0],$$

а через $A(\tau)$ і $B(\tau)$ $(p \times 2m)$-вимірні матриці

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \overline{A}(\tau) & \underline{A}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [\tau_0, L],$$

$$B(\tau) = \begin{pmatrix} \overline{A}(\tau) & \underline{B}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, \tau_0].$$

Припустимо, що

$$\begin{aligned} &\det\left(A^T(\tau)A(\tau)\right) > 0, \quad \tau \in [\tau_0, L], \\ &\det\left(B^T(\tau)B(\tau)\right) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \end{aligned} \tag{11}$$

де A^T і B^T — транспоновані матриці.

Теорема. *Нехай:*

1) існує розв'язок $\mu = \bar{\mu} \in \tilde{D}$ рівняння (7), для якого крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{\mu})$ належить D для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$;

2) виконуються припущення (2), (4), (5), (10), (11);

3) матриці P_1 і P_2 є невиродженими.

Тоді існують сталі $\varepsilon_0 > 0$ і $\sigma_2 > 0$ такі, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в малому околі розв'язку $\bar{x}(\tau, \bar{\mu}), \bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \varepsilon)$ усередненої задачі (6.1) – (6.4) існує єдиний розв'язок $x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (3), причому

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{\mu})\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \varepsilon)\| \le \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

для всіх $\tau \in [-\Delta, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доведення. Згідно із зробленими припущеннями D — відкрита область і $\bar{x}(\tau, \bar{\mu}) \in D$ при $\tau \in [-\Delta, L]$, тому крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{\mu})$ належить D разом із деяким своїм ρ_1-околом. Оскільки $\det P_2 \neq 0$ і $\tilde{D}$ — відкрита область, то $\mu = \bar{\mu}$ — ізольований розв'язок рівняння (8), тобто існують такі додатні числа $\rho_3 \le \rho_2 \le \rho_1$, що в кулі $K_1 = \{\mu \,|\, \mu \in R^n, \|\mu - \bar{\mu}\| < < \rho_2\}$ не існує інших розв'язків рівняння (8), а розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \mu)$ задачі (7) є визначеним для всіх $\tau \in [-\Delta, L], \mu \in K_1$ і належить D разом із своїм ρ_3-околом.

У монографії [1] на підставі припущень (10), (11) одержано оцінку осциляційного інтеграла

$$\left\| \int_0^\tau F(t) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{t}}^t (k, \tilde{\omega}(\xi))\, d\xi \right\} dt \right\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\frac{1}{p}} \left[\left(1 + \frac{1}{\|k\|} \right) \sup_{[0,L]} \|F(t)\| + \frac{1}{\|k\|} \sup_{[0,L]} \left\| \frac{dF(t)}{dt} \right\| \right] \tag{13}$$

для всіх $\tau \in [0, L], \bar{t} \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], k \neq 0$ при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ зі сталою σ_3, не залежною від k, ε, F і $\bar{t}$, але залежною від L і $\tilde{\omega}$. Тут

$$\tilde{\omega}(\tau) = \left(\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau), \Omega_1(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}, \ldots, \Omega_m(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right), \ \tau \in [0, \tau_0],$$

$$\tilde{\omega}(\tau) = \left(\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau), \omega_1(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}, \ldots, \omega_m(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right), \ \tau \in (\tau_0, L],$$

$(k, \tilde{\omega})$ — скалярний добуток в R^{2m}, $F(\tau)$ має на $[0, L]$ кусково-неперервну похідну [6].

Ця оцінка та обмеження (4) на коефіцієнти Фур'є ведуть до нерівності

$$\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\| \leq \sigma_4 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \ \tau \in [-\Delta, L], \mu \in K_1, \nu \in R^m, \tag{14}$$

в якій стала σ_4 не залежить від ε, $u = (x(\tau, \mu, \nu, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \mu), \varphi(\tau, \mu, \nu, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \mu, \nu, \varepsilon))$, а $x(\tau, \mu, \nu, \varepsilon), \varphi(\tau, \mu, \nu, \varepsilon)$ і $\bar{x}(\tau, \mu), \bar{\varphi}(\tau, \mu, \nu, \varepsilon)$ — розв'язки систем відповідно (1) і (6.1), (6.3), які при $\tau \in [-\Delta, 0]$ збігаються з функцією

$$f(\tau) + \mu, \ g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\, dt + \nu.$$

Для того щоб функція $x(\tau, \mu, \nu, \varepsilon), \varphi(\tau, \mu, \nu, \varepsilon)$ була розв'язком крайової задачі (1), (3), потрібно вибрати параметри μ і ν з умов

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^L \eta(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau)\, d\tau, \\ \nu &= \int_0^L (C_1(\tau)\varphi + C_2(\tau)\varphi_\lambda + \xi(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau))\, d\tau, \end{aligned} \tag{15}$$

де $x = x(\tau, \mu, \nu, \varepsilon), x_\lambda = x(\lambda(\tau), \mu, \nu, \varepsilon), \varphi = \varphi(\tau, \mu, \nu, \varepsilon), \varphi_\lambda = \varphi(\lambda(\tau), \mu, \nu, \varepsilon)$.

Покладемо в (15)

$$\mu = \bar{\mu} + h, \quad \nu = \bar{\nu} + r, \quad v = (h, r), \quad d = (\eta, \xi), \quad \tilde{d} = d - d_0, \quad d_0 = (\eta_0, \xi_0),$$

$$C_3(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_4(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, L],$$

$$P_3(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial b_0(\bar{x}(t, \bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(t), \bar{\mu}), t)}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}(t, \bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} + \frac{\partial b_0(\bar{x}(t, \bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(t), \bar{\mu}), t)}{\partial \bar{x}_\lambda}\frac{\partial \bar{x}(\lambda(t), \bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}}\right) dt$$

при $\tau \in [0, L]$ і $P_3(\tau) = 0$ при $\tau \in [-\Delta, 0)$,

$$P_4 = \int_0^L \left(\frac{\partial \xi_0(\bar{x}(t,\bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(t),\bar{\mu}), t)}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}(t,\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} + \frac{\partial \xi_0(\bar{x}(t,\bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(t),\bar{\mu}), t)}{\partial \bar{x}_\lambda} \frac{\partial \bar{x}(\lambda(t),\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} \right) dt,$$

$$P = \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ P_5 & P_1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} P_2 - E \\ P_1 - E \end{pmatrix},$$

$$P_5 = -P_4 - \int_0^L (C_1(\tau) P_3(\tau) + C_2(\tau) P_3(\lambda(\tau)))\, d\tau.$$

Зазначимо, що в цих позначеннях 0 — нуль-матриця, $C_3(\tau), C_4(\tau)$ і P_6 — $((n+m)\times m)$-вимірні, $P_3(\tau)$ — $(m \times n)$-вимірна, P — $((n+m)\times(n+m))$-вимірна матриці.

Оскільки

$$\det P = \det P_1 \det P_2 \neq 0,$$

то з (15) отримаємо рівність

$$v = P^{-1} \int_0^L \Big[\tilde{d}(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau) + (d_0(x, x_\lambda, \tau) - d_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau)) + C_3(\tau)(\varphi - \bar{\varphi}) +$$

$$+ C_4(\tau)(\varphi_\lambda - \bar{\varphi}_\lambda) + (d_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \tau) - d_0(\bar{x}(\tau,\bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(\tau),\bar{\mu}), \tau) - L^{-1} P_6 h +$$

$$+ C_3(\tau)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \varepsilon) - r - P_3(\tau) h) + C_4(\tau)(\bar{\varphi}_\lambda - \bar{\varphi}(\lambda(\tau), \bar{\mu}, \bar{\nu}, \varepsilon) -$$

$$- r - P_3(\lambda(\tau)) h \Big] d\tau \equiv F_1(v, \varepsilon),$$

в якій $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\mu), \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau,\mu,\nu,\varepsilon), \bar{x}_\lambda = \bar{x}(\lambda(\tau),\mu), \bar{\varphi}_\lambda = \bar{\varphi}(\lambda(\tau),\mu,\nu,\varepsilon)$.

Враховуючи, що

$$\bar{x}(\tau,\mu) = \bar{x}(\tau,\bar{\mu}) + \frac{\partial \bar{x}(\tau,\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} h + R_1(\tau, h),$$

$$\frac{\partial \bar{x}(\tau,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial \bar{x}(\tau,\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} + R_2(\tau, h), \quad \tau \in [-\Delta, L], \quad \|h\| < \rho_2,$$

$$R_1(\tau, h) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu} + hl)}{\partial \bar{\mu}} - \frac{\partial \bar{x}(\tau,\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}} \right) dl\, h,$$

$$\|R_1(\tau,h)\| \leq \sigma_5 \|h\|^2, \quad \|R_2(\tau,h)\| \leq \sigma_5 \|h\|, \quad \tau \in [-\Delta, L], \quad \|h\| < \rho_2,$$

маємо рівності

$$\bar{\varphi} - \bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \varepsilon) = r + P_3(\tau)h + R_3(\tau, h), \quad \tau \in [-\Delta, L], \quad \|h\| < \rho_2,$$

$$\bar{\varphi}_\lambda - \bar{\varphi}(\lambda(\tau), \bar{\mu}, \bar{\nu}, \varepsilon) = r + P_3(\lambda(\tau))h + R_3(\lambda(\tau), h), \quad \tau \in [0, L], \quad \|h\| < \rho_2,$$

де

$$R_3(\tau, h) = \int_0^\tau (b_0(\bar{x}(t, \mu), \bar{x}(\lambda(t), \mu), t) - b_0(\bar{x}(t, \bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(t), \bar{\mu}), t))\, dt - P_3(\tau)h$$

при $\tau \in [0, L]$ і $R_3(\tau, h) \equiv 0$ при $\tau \in [-\Delta, 0]$,

$$\|R_3(\tau, h)\| \leq \tilde{\sigma}_5 \|h\|^2, \quad \tau \in [-\Delta, L], \quad \|h\| < \rho_2.$$

Очевидно також, що

$$\int_0^L (d_0(\bar{x}(\tau, \mu), \bar{x}(\lambda(\tau), \mu), \tau) - d_0(\bar{x}(\tau, \bar{\mu}), \bar{x}(\lambda(\tau), \bar{\mu}), \tau))\, d\tau = P_6 h + R_4(h),$$

$$\|R_4(h)\| \leq \underset{\sim}{\sigma_5} \|h\|^2, \quad \|h\| < \rho_2.$$

Тут $\sigma_5, \tilde{\sigma}_5$ і $\underset{\sim}{\sigma_5}$ — сталі, не залежні від h. Тому, враховуючи обмеження (4) на коефіцієнти Фур'є і оцінки (13), (14), із (16) дістаємо нерівності

$$\|F_1(v, \varepsilon)\| \leq \sigma_6(\|v\|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{p}}), \quad \left\| \frac{\partial}{\partial v} F_1(v, \varepsilon) \right\| \leq \sigma_6(\|v\| + \varepsilon^{\frac{1}{p}}) \tag{17}$$

при $\|v\| < \rho_2$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ зі сталою σ_6, не залежною від v і ε.

Із нерівностей (17) випливає, що при

$$\varepsilon_0 \leq \min\left\{\rho_4^{2p},\, (2\sigma_6)^{-p}\right\}, \quad \rho_4 = \min\left\{\frac{1}{4\sigma_6},\, \frac{\rho_2}{2}\right\}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $F_1(v, \varepsilon)$ відображає кулю $K_2 = \{v \mid v \in R^{n+m},\, \|v\| \leq \rho_4\}$ в себе і є відображенням стиску, бо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial v} F(v, \varepsilon) \right\| \leq \frac{3}{4}, \quad v \in K_2, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Тому в кулі K_2 існує єдиний розв'язок $v = v_0(\varepsilon) = (h_0(\varepsilon), r_0(\varepsilon))$ рівняння (16), який можна визначити методом послідовних наближень:

$$v_0(\varepsilon) = \lim_{k \to \infty} v_k(\varepsilon), \quad v_{k+1}(\varepsilon) = F_1(v_k(\varepsilon), \varepsilon), \quad k \geq 1, \quad v_1(\varepsilon) \equiv 0.$$

Згідно із зробленими вище припущеннями $4\sigma_6^2\varepsilon_0^{\frac{1}{p}} < 1$, тому звідси одержуємо $\|v_0(\varepsilon)\| \leq$ $\leq 2\sigma_6\varepsilon^{\frac{1}{p}}$.

Таким чином, побудовано розв'язок $x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (3), де

$$x(\tau,\varepsilon) = x(\tau,\bar\mu + h_0(\varepsilon),\bar\nu + r_0(\varepsilon),\varepsilon), \quad \varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau,\bar\mu + h_0(\varepsilon),\bar\nu + r_0(\varepsilon),\varepsilon),$$

причому якщо ця задача має інший розв'язок $\tilde x(\tau,\varepsilon), \tilde\varphi(\tau,\varepsilon)$, то при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ хоча б в одній точці $\tilde\tau = \tilde\tau(\varepsilon) \in [-\Delta, L]$ виконується нерівність

$$\|x(\tilde\tau,\varepsilon) - \tilde x(\tilde\tau,\varepsilon)\| + \|\varphi(\tilde\tau,\varepsilon) - \tilde\varphi(\tilde\tau,\varepsilon)\| \geq \frac{\rho_4}{2}.$$

Нарешті зазначимо, що на підставі (14) виконуються нерівності

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar x(\tau,\bar\mu)\| \leq \|x(\tau,\varepsilon) - \bar x(\tau,\bar\mu + h_0(\varepsilon))\| + \|\bar x(\tau,\bar\mu + h_0(\varepsilon)) - \bar x(\tau,\bar\mu)\| \leq$$

$$\leq \left(\sigma_4 + 2\sigma_6 \sup_{\substack{\tau\in[-\Delta,L]\\ \mu\in K_1}} \left\|\frac{\partial\bar x(\tau,\mu)}{\partial\mu}\right\|\right)\varepsilon^{\frac{1}{p}} \equiv \tilde\sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar\varphi(\tau,\bar\mu,\bar\nu,\varepsilon)\| \leq (\sigma_4 + 2L\sigma_1\tilde\sigma_2)\varepsilon^{\frac{1}{p}} \equiv \underset{\sim}{\sigma_2}\,\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

для всіх $\tau \in [-\Delta, L], \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, тобто справджується оцінка (12) зі сталою $\sigma_2 = \tilde\sigma_2 + \underset{\sim}{\sigma_2}$.

Теорему доведено.

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.
2. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
3. *Митропольский Ю. А., Байнов Д. Д., Милушева С. Д.* Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений // Мат. физика. — 1979. — Вып. 25. — С. 3–22.
4. *Байнов Д. Д., Милушева С. Д.* О некоторых применениях метода усреднения для решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных, интегро-дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений // Proc. VIII Int. Conf. Nonlinear Oscillations. — Prague, 1978. — P. 771–789.
5. *Бігун Я. Й.* Усереднення в багаточастотних системах з лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика. — 2005. — Вип. 269. — С. 5–10.
6. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1973. — Ч. 2. — 448 с.

Одержано 15.08.07