УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец, А. В. Коломиец

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We study applications of asymptotic methods of nonlinear mechanics and of the method of Fokker – Planck – Kolmogorov equations to stochastic oscillations in quasilinear oscillatory systems with random perturbations.

Вивчаються застосування асимптотичних методів нелінійної механіки і методу рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова до дослідження випадкових коливань у квазілінійних коливних системах із випадковими збуреннями.

В своей практической деятельности мы весьма часто сталкиваемся с воздействием случайных сил на колебательные системы и со случайными колебаниями в таких системах. Примерами случайных колебаний могут служить электрические флуктуации, шумы в радиотехнических системах, случайные вибрации летательных аппаратов, колебания различных упругих конструкций при землетрясениях и т. п. Поэтому изучение влияния случайных сил на колебательные системы и случайных колебаний в них имеет большое значение для практических задач, связанных с повышением чувствительности и помехоустойчивости радиоприемных и измерительных устройств, устойчивости строительных конструкций при случайных воздействиях и т. п. Как правило, встречающиеся в практике колебательные системы нелинейны.

Во многих задачах встречается более простой случай систем, близких к линейным и со слабыми случайными силами. Эти задачи являются предметом многочисленных теоретических и прикладных исследований.

Аналитическое исследование нелинейных случайных колебаний сопряжено с большими трудностями. В связи с этим важное значение имеют приближенные методы исследования. Особенно эффективны методы нелинейной механики, в частности асимптотический метод, метод усреднения, метод гармонического баланса и метод эквивалентной линеаризации, предложенные и обоснованные Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [1, 2].

Исследования в области теории нелинейных случайных колебаний развиваются в основном в направлении создания методов асимптотического интегрирования нелинейных стохастических систем и их математического обоснования.

Настоящая статья посвящена в основном развитию асимптотических методов, связанных с методом усреднения и применяемых в теории нелинейных стохастических дифференциальных уравнений и нелинейных случайных колебаний.

Впервые стохастические дифференциальные уравнения рассматривались С. Н. Бернштейном [3]. К необходимости изучения стохастических уравнений привели задачи исследования механических систем, находящихся под воздействием случайных сил. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [4] рассмотрели поведение такой системы в предположении, что случайные силы в пределе превращаются в процессы с независимыми приращениями. В современной терминологии такие процессы называют „белыми шумами". Предельный процесс в этом случае является марковским, для плотности переходных вероятностей которого выведено уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК).

При исследовании предельного поведения линейной колебательной системы, которая находится под воздействием случайной силы, в пределе превращающейся в белый шум, Н. Н. Боголюбов [5] показал, что движение такой системы описывается марковским процессом, плотность переходных вероятностей которого удовлетворяет уравнению в частных производных ФПК.

Уравнение ФПК известно из классических работ по физике. Связь между поведением частицы, участвующей в броуновском движении, и дифференциальным уравнением в частных производных была установлена впервые Эйнштейном, затем получила дальнейшее развитие в работах Смолуховского, Фоккера и Планка [6]. Более общие уравнения для марковских процессов были получены А. Н. Колмогоровым [7] и применены затем для изучения нелинейных динамических систем А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным и А. А. Виттом [8]. Предельный переход, однако, в уравнениях динамики не был строго обоснован. Развивая идеи Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, И. И. Гихман [9 – 11] дал общее определение динамической системы, находящейся под влиянием случайного процесса с независимыми приращениями. Он показал, что такая система описывается марковским процессом, и вывел для плотностей переходных вероятностей уравнения ФПК.

Для строгого обоснования предельного перехода И. И. Гихман [10, 11] построил теорию стохастических дифференциальных уравнений. Оказалось, что их решение является марковским процессом. Поэтому в дальнейшем стохастические дифференциальные уравнения были использованы для построения таких процессов. Кроме того, стохастические дифференциальные уравнения хорошо описывают поведение динамических систем, находящихся под влиянием случайных сил с независимыми приращениями.

В начале пятидесятых годов XX века независимо от И. И. Гихмана К. Ито [12] провел прямое построение траекторий диффузионных марковских процессов с помощью стохастических дифференциальных и интегральных уравнений, ввел понятие стохастического интеграла по винеровскому процессу и определил стохастический дифференциал, которые впоследствии получили название интеграла и дифференциала Ито. В последнее время И. И. Гихман и А. В. Скороход [13, 14] создали наиболее общую теорию стохастических дифференциальных уравнений.

Во многих задачах, связанных с исследованием колебаний динамических систем, изучаются колебательные системы со слабыми нелинейностями и слабыми случайными силами. Эффективными методами исследования случайных колебательных процессов в нелинейных системах являются асимптотические методы нелинейной механики и метод уравнений ФПК. Применение асимптотических методов и метода усреднения ничем не отличается от детерминированного случая, за исключением случайных воздействий типа белого шума. В последнем случае в стохастических дифференциальных уравнениях для амплитуд и фаз появляются дополнительные члены в коэффициентах сноса. Уже первые применения асимптотических методов при исследовании случайных колебаний позволяют получить весьма интересные принципиальные результаты во многих прикладных задачах.

Применение принципа усреднения особенно эффективно для нелинейных систем, содержащих малый параметр. Метод уравнений ФПК дает в этом случае хорошие результаты, если рассматриваемое исходное уравнение можно привести к стандартному по Н. Н. Боголюбову виду. Такая форма стохастических дифференциальных уравнений называется также „стандартной” по Н. Н. Боголюбову. Приведение стохастических дифференциальных уравнений к „стандартной” форме с последующим применением принципа усреднения и аппарата уравнений ФПК является весьма эффективным подходом в исследовании нелинейных стохастических колебательных систем. Усреднение можно провести или в самых стандартных стохастических дифференциальных уравнениях, которые затем с помощью уравнений ФПК легко анализируются, или в составленном для них уравнении ФПК, которое в этом случае также имеет стандартный вид.

Рассмотрим „автономную” колебательную систему с одной степенью свободы, находящуюся под воздействием стационарного гауссова белого шума и описываемую дифференциальным уравнением второго порядка Ито [15]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon} f_2\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\dot{\xi}(t), \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = y_0, \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр; ω — некоторая постоянная величина; f_1 и f_2 — нелинейные функции, удовлетворяющие условиям теоремы существования и единственности решения, $\dot{\xi}(t)$ — процесс белого шума, являющийся обобщенной производной от винеровского процесса $\xi(t)$ ($\mathbf{M}\xi(t) = 0$, $\mathbf{M}\xi^2(t) = t$, $\mathbf{M}$ — математическое ожидание).

Под решением уравнения (1) понимаем решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} dx(t) &= y(t)dt, \\ dy(t) &= \left[-\omega^2 x(t) + \varepsilon f_1\left(x(t), y(t)\right)\right] dt + \sqrt{\varepsilon} f_2\left(x(t), y(t)\right) d\xi(t) \end{aligned} \tag{2}$$

или эквивалентной системы интегральных уравнений Ито

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int\limits_0^t y(s)ds, \\ y(t) &= y_0 + \int\limits_0^t \left[-\omega^2 x(s) + \varepsilon f_1\left(x(s), y(s)\right)\right] ds + \sqrt{\varepsilon} \int\limits_0^t f_2\left(x(s), y(s)\right) d\xi(s). \end{aligned} \tag{3}$$

Решением системы (2), как известно, является марковский процесс $\{x(t), y(t)\}$ в фазовом пространстве.

В силу малости параметра ε возможно применение асимптотического метода Крылова – Боголюбова – Митропольского для уравнения (1). Применяя этот метод, целесообразно перейти от уравнения (1) к системе уравнений первого порядка относительно амплитуды и фазы случайных колебаний. Для этого, как обычно принято, выполним в уравнении (1) или в системе (2) замену переменных

$$x = A\cos\left(\omega t + \Theta\right), \quad \frac{dx}{dt} = y = -A\omega\sin\left(\omega t + \Theta\right), \tag{4}$$

где A и Θ — случайные процессы. Чтобы составить дифференциальные уравнения для A и Θ, учитывая формулу Ито [13] и второе из соотношений (4), находим дифференциал первой из формул (4):

$$\cos\Psi dA - A\sin\Psi d\Theta - \sin\Psi dA d\Theta - \frac{1}{2}\,A\cos\Psi d\Theta^2 = 0. \tag{5}$$

Получая дифференциал второй из формул (4) и подставляя во второе из уравнений (2) вместо x, y, dy соответственно их выражения, имеем

$$-\omega\sin\Psi dA - A\omega\cos\Psi d\Theta - \omega\cos\Psi dA d\Theta + \frac{1}{2}A\omega\sin\Psi d\Theta^2 =$$
$$= \varepsilon f_1\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)dt + \sqrt{\varepsilon}f_2\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)d\xi(t). \tag{6}$$

Решая систему двух уравнений (5), (6) относительно неизвестных dA и $d\Theta$ с точностью до членов порядка малости ε^2, получаем систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dA &= \Big[\frac{\varepsilon}{2\omega^2 A}f_2^2\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)\cos^2\Psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\omega}\,f_1\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)\sin\Psi\Big]\,dt - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega}f_2\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)\sin\Psi\,d\xi\left(t\right), \\ d\Theta &= \Big[-\frac{\varepsilon}{\omega^2 A^2}f_2^2\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)\sin\Psi\cos\Psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{A\omega}\,f_1\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)\cos\Psi\Big]\,dt - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{A\omega}f_2\left(A\cos\Psi, -A\omega\sin\Psi\right)\cos\Psi d\xi\left(t\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что правые части уравнений пропорциональны малому параметру, поэтому A и Θ будут медленно изменяющимися случайными функциями времени. Полученные уравнения представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме для двумерного диффузионного марковского процесса.

Системе уравнений (7) соответствует уравнение ФПК

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left[K_a W\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[K_\theta W\right] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[D_a W\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left[D_{a\theta}W\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[D_\theta W\right]\right\}, \tag{8}$$

где $W = W\left(a_0, \theta_0, t_0, a, \theta, t\right)$ — плотность совместного распределения амплитуды и фазы; K_a, K_θ — коэффициенты сноса амплитуды и фазы; D_a, D_θ — коэффициенты диффузии амплитуды и фазы; $D_a\theta$ — смешанный коэффициент диффузии амплитуды и фазы;

$$K_a = \frac{\varepsilon}{2\omega^2 a}f_2^2\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\cos^2\psi - \frac{\varepsilon}{\omega}\,f_1\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\sin\psi,$$

$$K_\theta = -\frac{\varepsilon}{\omega^2 a} f_2^2\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\sin\psi\cos\psi - \frac{\varepsilon}{a\omega} f_1\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\cos\psi,$$

$$D_a = \frac{\varepsilon}{\omega^2} f_2^2\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\sin^2\psi, \tag{9}$$

$$D_{a\theta} = \frac{\varepsilon}{a\omega^2} f_2^2\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\sin\psi\cos\psi,$$

$$D_\theta = \frac{\varepsilon}{a^2\omega^2} f_2^2\left(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\cos^2\psi.$$

Уравнение (8) является параболическим дифференциальным уравнением в стандартной форме, для которого Р. З. Хасьминским [16] установлен принцип усреднения. Согласно этому принципу усреднения решение задачи Коши для уравнения (8) при $\varepsilon \to 0$ можно приблизить равномерно на достаточно большом промежутке времени порядка $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left[A(a)W_0\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[B(a)W_0\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[C(a)W_0\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left[D(a)W_0\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[E(a)W_0\right]\right\}, \tag{10}$$

где

$$A(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_a d\psi, \quad B(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\theta d\psi,$$

$$C(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_a d\psi, \quad D(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_{a\theta} d\psi, \tag{11}$$

$$E(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_\theta d\psi.$$

Как известно, усреднение можно провести в уравнениях (7). Под усредненной системой стохастических дифференциальных уравнений, соответствующей системе (7), понимаем систему

$$d\overline{A} = \overline{f}_1^{(1)}(\overline{A})dt + \sigma_{11}(\overline{A})d\xi_1(t) + \sigma_{12}(\overline{A})d\xi_2(t),$$

$$d\overline{\Theta} = \overline{f}_1^{(2)}(\overline{A})dt + \sigma_{12}(\overline{A}) + \sigma_{22}(\overline{A})d\xi_2(t), \tag{12}$$

где

$$\overline{f}_1^{(1)} = \begin{matrix} M \\ t \end{matrix} \left\{-\frac{\varepsilon}{\omega} f_1\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin\overline{\Psi} + \frac{\varepsilon}{2\omega^2\overline{A}} f_2^2\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\cos^2\overline{\Psi}\right\},$$

$$\overline{f}_1^{(2)} = \underset{t}{M} \left\{ -\frac{\varepsilon}{\overline{A}\omega} f_1\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\cos\overline{\Psi} - \frac{\varepsilon}{\omega^2\overline{A}^2} f_2^2\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin\overline{\Psi}\cos\overline{\Psi} \right\},$$

матрица $\|\sigma_{ik}\|$ является корнем квадратным из симметрической матрицы

$$\left\| \begin{array}{c} \dfrac{\varepsilon}{\omega^2} \underset{t}{M} f_2^2\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin^2\overline{\Psi} \\ \dfrac{\varepsilon}{\omega^2\overline{A}} \underset{t}{M} f_2^2\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin\overline{\Psi}\cos\overline{\Psi} \\ \dfrac{\varepsilon}{\omega^2\overline{A}} \underset{t}{M} f_2^2\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin\overline{\Psi}\cos\overline{\Psi} \\ \dfrac{\varepsilon}{\omega^2\overline{A}^2} \underset{t}{M} f_2^2\left(\overline{A}\cos\overline{\Psi}, -\overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\cos^2\overline{\Psi} \end{array} \right\|,$$

$\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — независимые виннеровские процессы, $\underset{t}{M}$ — оператор усреднения, $\underset{t}{M}\{V(\Psi)\} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} V(\Psi)d\Psi$. При некоторых предположениях марковский процесс $\{A(t), \Theta(t)\}$ сходится на отрезке $0 \le t \le \dfrac{L}{\varepsilon}$ к марковскому процессу $\left\{\overline{A}(t), \overline{\Theta}(t)\right\}$. В случае периодического воздействия в правых частях уравнения (1) $f_1(\nu t, x, dx/dt)$ и $f_2(\nu t, x, dx/dt)$ различают резонансный и нерезонансный случаи. В нерезонансном случае усредненная система имеет вид (12), а в резонансном — вид

$$\begin{aligned} d\overline{A} &= \overline{f}_1^{(1)}(\overline{A}, \overline{\Theta})dt + \sigma_{11}(\overline{A}, \overline{\Theta})d\xi_1(t) + \sigma_{12}(\overline{A}, \overline{\Theta})d\xi_2(t), \\ d\overline{\Theta} &= \overline{f}_1^{(2)}(\overline{A}, \overline{\Theta})dt + \sigma_{12}(\overline{A}, \overline{\Theta}) + \sigma_{22}(\overline{A}, \overline{\Theta})d\xi_2(t), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\overline{f}_1^{(1)} = \underset{t}{M} \left\{ -\frac{\varepsilon s}{\nu r} f_1\left(\nu t, \overline{A}\cos\overline{\Psi} - \overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin\overline{\Psi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon s^2}{2\overline{A}r^2\nu^2} f_2^2\left(\nu t, \overline{A}\cos\overline{\Psi} - \overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\cos^2\overline{\Psi} \right\},$$

$$\overline{f}_1^{(2)} = \underset{t}{M} \left\{ -\frac{\varepsilon s}{\overline{A}\nu r} f_1\left(\nu t, \overline{A}\cos\overline{\Psi} - \overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\cos\overline{\Psi} + \frac{\varepsilon\Delta s}{2\nu r} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon s^2}{\overline{A}^2 r^2\nu^2} f_2^2\left(\nu t, \overline{A}\cos\overline{\Psi} - \overline{A}\omega\sin\overline{\Psi}\right)\sin\overline{\Psi}\cos\overline{\Psi} \right\},$$

$$\omega^2 = \left(\frac{r}{s}\nu\right)^2 + \varepsilon\Delta, \quad \overline{\Psi} = \frac{r}{s}\nu t + \overline{\Theta}(t),$$

σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} определяются так же, как и в (12). Здесь $\underset{t}{M}$ — оператор усреднения по времени:

$$\underset{t}{M}\ \{U(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt.$$

При анализе колебательных систем со случайными воздействиями важную роль играет стационарная плотность распределения амплитуды вследствие того, что стационарные точки этой плотности (если они существуют) соответствуют устойчивым и неустойчивым состояниям исходной колебательной системы в зависимости от того, достигается ли в этой точке соответственно максимум или минимум.

Теперь исследуем случайные колебания систем с двумя степенями свободы [17, 18]

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon f_k\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2} g_{kj}\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right)\dot{\xi}_j(t), \quad k = 1, 2, \tag{14}$$

где ε — малый положительный параметр, f_k и g_{kj} — некоторые аналитические функции, $\dot{\xi}_1(t)$ и $\dot{\xi}_2(t)$ — независимые белые шумы. Выполним замену переменных

$$x_k = a_k \cos\psi_k, \quad \frac{dx_k}{dt} = -a_k\omega_k \sin\psi_k. \tag{15}$$

Очевидно, что в новых переменных система (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \varepsilon A_{1k}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2} A_{2j}^{(k)}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)\,\dot{\xi}_j(t), \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \omega_k + \varepsilon B_{1k}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2} B_{2j}^{(k)}(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)\,\dot{\xi}_j(t), \\ & k = 1, 2. \end{aligned} \tag{16}$$

Коэффициенты $A_{1k}, A_{1k}^{(k)}, B_{1k}, B_{1k}^{(k)}, k, j = 1, 2$, определяются соответствующим образом через коэффициенты f_k и g_{kj} исходного уравнения (14):

$$\begin{aligned} A_{1k} = \frac{\cos^2\psi_k}{2a_k\omega_k^2}&[g_{k1}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2) + \\ &+ g_{k2}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2)] - \\ &- \frac{\sin\psi_k}{\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2), \end{aligned}$$

$$A_{21}^{(k)} = -\frac{\sin\psi_k}{\omega_k} g_{k1}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$A_{22}^{(k)} = -\frac{\sin\psi_k}{\omega_k} g_{k2}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$B_{1k} = -\frac{\sin\psi_k\cos\psi_k}{a_k^2\omega_k^2}[g_{k1}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2)+$$

$$+\, g_{k2}^2(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2)]-$$

$$-\, \frac{\cos\psi_k}{a_k\omega_k} f_k(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$B_{21}^{(k)} = -\frac{\cos\psi_k}{a_k\omega_k} g_{k1}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2),$$

$$A_{22}^{(k)} = -\frac{\cos\psi_k}{a_k\omega_k} g_{k2}(a_1\cos\psi_1, -a_1\omega_1\sin\psi_1, a_2\cos\psi_2, -a_2\omega_2\sin\psi_2).$$

Решением системы уравнений (16) будет четырехмерный марковский процесс $\{a_1(t), a_2(t), \theta_1(t), \theta_2(t)\}$. Этому процессу будет соответствовать стационарное уравнение ФПК

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial a_k}[A_{1k}W] + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial a_k}[B_{1k}W] = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial a_i\partial a_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2}A_{2k}^{(i)}A_{2k}^{(j)}\right)W\right] + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial a_i\partial\theta_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2}A_{2k}^{(i)}B_{2k}^{(j)}\right)W\right] + \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2}B_{2k}^{(i)}B_{2k}^{(j)}\right)W\right]\right\}, \qquad (17)$$

где $\theta_k = \psi_k - \omega t$, коэффициенты $A_{1k}, B_{1k}, A_{2k}^{(1)}, A_{2k}^{(2)}, B_{2k}^{(1)}, B_{2k}^{(2)}$ имеют вид коэффициентов правых частей уравнений (16).

Решать эти уравнения аналитически весьма затруднительно. Для уравнений четвертого порядка

$$x^{IV} + b_1x''' + b_2x'' + b_0x = \varepsilon f\left(x, x', x'', x'''\right) + \sqrt{\varepsilon}g\left(x, x', x'', x'''\right)\dot{\xi}(t) \qquad (18)$$

А. И. Мельниковым [19] исследованы случайные колебательные процессы в зависимости от характера корней характеристического полинома линейного уравнения ($\varepsilon = 0$). Исследован вопрос о существовании стационарных решений усредненного уравнения ФПК.

Для уравнений второго порядка типа Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon\left(1 - x^2\right)\frac{dx}{dt} + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t) \qquad (19)$$

В. Г. Коломийцем [15] с помощью изложенных выше методов найдена стационарная устойчивая амплитуда случайных колебаний в виде

$$a = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{2}}}. \qquad (20)$$

В заключение отметим, что при исследовании влияния случайных сил на нелинейные колебательные системы применение асимптотических методов нелинейной механики и аппарата уравнений ФПК имеет большое практическое преимущество перед другими методами, поскольку позволяет находить квадратуру стационарной плотности распределения амплитуды и фазы случайных колебаний.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
3. *Бернштейн С. Н.* Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 95 – 124.
4. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Про рівняння Фоккера – Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана // Зап. каф. мат. фізики. — Київ: Вид-во АН УРСР, 1939. — Т. 4. — С. 5 – 157.
5. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. — Львов: Изд-во АН УССР, 1945. — 137 с.
6. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. — М.: Изд-во иностр. лит., 1936. — 608 с.
7. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. — 1938. — Вып. 5. — С. 5 – 41.
8. *Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // Собр. тр. А. А. Андронова. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 142 – 160.
9. *Гихман И. И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями // Укр. мат. журн. — 1950. — № 3. — С. 45 – 69.
10. *Гихман И. И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. Ч. 1 // Там же. — 1950. — № 4. — С. 37 – 63.
11. *Гихман И. И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. Ч. 2 // Там же. — 1951. — № 3. — С. 317 – 339.
12. *Ито К.* Стохастические дифференциальные уравнения // Математика: Сб. пер. — 1957. — № 1. — С. 78 – 115.
13. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
15. *Коломиец В. Г.* Случайные колебания нелинейных систем с сосредоточенными параметрами. — Киев, 1980. — 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80-28).
16. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. — 1963. — **8**, № 1. — С. 3 – 25.
17. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Исследование колебательных систем второго порядка. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. — 50 с.
18. *Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. — Киев: Наук. думка, 1992. — 344 с.
19. *Мельников А. И.* О колебательных процессах в автономных системах стохастических дифференциальных уравнений Ито четвертого порядка // Асимптотические методы в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 87 – 93.

Получено 15.09.06