УДК 519 . 44; 517 . 9

ЗОБРАЖЕННЯ НАПІВГРУП ІТЕРАЦІЯМИ ВІДОБРАЖЕНЬ ІНТЕРВАЛУ

М. В. Плахотник

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We describe semigroups that are generated by two idempotents and have faithful representations in continuous maps of an interval into itself. For each such a semigroup, we give the above representation.

Описаны полугруппы, порожденные двумя идемпотентами, которые имеют точные представления непрерывными отображениями интервала в себя. Для каждой из этих полугрупп приведено такое представление.

1. Вступ. Неперервні динамічні системи, породжені відображеннями інтервалу, почали інтенсивно вивчати з 1964 року завдяки відомій теоремі Шарковського. Ідемпотенти (відображення, для яких виконується умова $f^2 = f$), що відображають інтервал у себе, описано в [1].

Теорема 1 [1]. *Відображення $f \in C^0([0, 1], [0, 1])$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли існують такі дійсні числа a і b, $a \leq b$, що відображення f відображає проміжок $[0, 1]$ у проміжок $[a, b]$ і для кожного $x \in [a, b]$ має місце рівність $f(x) = x$.*

Задачу про вивчення властивостей скінченних напівгруп відображень інтервалу в себе розглянуто, зокрема, в [2]. В роботі [3] наведено велику кількість прикладів того, як крайові задачі математичної фізики зводяться до різницевих рівнянь, а останні легко зводяться до динамічних систем. В [4] показано, що відображення зв'язного замкненого одновимірного компактного многовиду, яке має скінченну напівгрупу ітерацій, топологічно спряжене або з поворотом кола на раціональний кут, або з відображенням замкненого інтервалу.

Теорема 2 [4]. *Для неперервного відображення f інтервалу в себе з тотожності $f^{k+m}(x) \equiv f^k(x)$ для деяких чисел m та k випливає тотожність $f^{k+2}(x) \equiv f^k(x)$.*

2. Скінченні напівгрупи. Позначення та домовленості. Нехай S — скінченна напівгрупа, що породжена двома твірними f та g і може бути зображена ітераціями неперервних відображень замкненого інтервалу в себе. Далі вважатимемо, що відображення f та g є ідемпотентами.

Оскільки напівгрупа S є скінченною, то її циклічні напівгрупи, породжені елементами fg та gf, також скінченні. Тому існують числа n_1 та k_1, для яких $(fg)^{n_1} = (fg)^{n_1+k_1}$, а також числа n_2 та k_2, для яких $(gf)^{n_2} = (gf)^{n_2+k_2}$. Виберемо числа n_1, k_1, n_2 та k_2 найменшими з можливих. Будемо говорити, що напівгрупа S має показниковий тип (n_1, k_1, n_2, k_2). Таким чином, для довільної напівгрупи S визначено функції $n_1(S)$, $k_1(S)$, $n_2(S)$ та $k_2(S)$. Задачу опису напівгруп, породжених ідемпотентами, які зображаються ітераціями неперервних відображень замкненого інтервалу, будемо розв'язувати для кожного показникового типу окремо.

Не всі четвірки натуральних чисел можуть бути показниковим типом деякої напівгрупи композицій двох ідемпотентів, які відображають замкнений інтервал в себе. Наприклад, з теореми 2 випливає, що $\{k_1,\, k_2\} \subset \{1,\, 2\}$.

Нехай $k_1(S) = 1$. Тоді для деякого натурального числа n виконується рівність $(fg)^n = (fg)^{n+1}$. Домножаючи її на g зліва та на f справа, отримуємо $(gf)^{n+1} = (gf)^{n+2}$, звідки випливає $k_2(S) = 1$. Аналогічно, з того, що $k_2(S) = 1$, випливає $k_1(S) = 1$. З наведених міркувань і теореми 2 випливає наступна теорема.

Теорема 3. *З точністю до перейменування твірних напівгрупа, породжена двома ідемпотентами, що зображається композиціями неперервних відображень замкненого інтервалу в себе, має один з таких показникових типів:*

$$(n,\,1,\,n,\,1),\,(n+1,\,1,\,n,\,1),\,(n,\,2,\,n,\,2)\ \textit{або}\ (n,\,2,\,n+1,\,2),\quad n \in \mathbb{N}.$$

Звісно, крім співвідношень вигляду $(fg)^k = (fg)^m$ та $(gf)^k = (gf)^m$ можуть бути й інші співвідношення. Напівгрупові співвідношення, які не суперечать показниковому типу напівгрупи та не є наслідками з нього, називатимемо додатковими. Оскільки твірні елементи напівгрупи є ідемпотентами, то кожне з додаткових співвідношень можна подати як прирівнювання двох напівгрупових слів, кожне з яких має вигляд $f(gf)^m$, $(gf)^n$, $g(fg)^k$ або $(fg)^l$ для деяких чисел $m,\,n,\,k,\,l$. Для кожного з чотирьох можливих показникових типів напівгруп запишемо всі можливі додаткові співвідношення, діючи таким чином. Наприклад, взявши в напівгрупі показникового типу $(n,\,1,\,n,\,1)$ рівність $f(gf)^m = (gf)^l$, переконаємось, що $l \le n$ та $m \le n$, інакше їх можна зменшити внаслідок показникового типу напівгрупи. Домноживши рівність $f(gf)^m = (gf)^l$ на g зліва, отримаємо $(gf)^{m+1} = (gf)^l$, звідки $m+1 \ge n$ та $l \ge n$, бо інакше число $n_1(S)$ або $n_2(S)$ відповідно можна зменшити, що суперечитиме показниковому типу напівгрупи. Тому $l = n$, а $m = n$ або $m = n-1$. Аналогічні дії можна виконати з усіма можливими типами напівгрупових слів і для всіх можливих показникових типів напівгруп. У роботі ми не наводитимемо відповідних викладок через їх тривіальність та громіздкість, а формулюватимемо лише списки можливих додаткових співвідношень для кожного типу напівгруп.

Для неперервних відображень p та q під добутком pq розумітимемо композицію $q(p)$, тобто спершу на аргумент діятиме перший множник, а потім другий. Замість того щоб говорити, що графік відображення проходить через точку, говоритимемо, що відображення проходить через точку.

3. Показниковий тип напівгрупи $(n,\,1,\,n,\,1)$. ***3.1. Додаткові співвідношення.***

Лема 1. *Нехай напівгрупа S має показниковий тип $(n,\,1,\,n,\,1)$. Тоді можливими співвідношеннями можуть бути лише такі 16 співвідношень:*

$$\begin{array}{lll}
v_1 : f(gf)^{n-1} = f(gf)^n, & v_2 : f(gf)^{n-1} = (gf)^n, & v_3 : f(gf)^n = (gf)^n, \\
v_4 : f(gf)^{n-1} = g(fg)^{n-1}, & v_5 : f(gf)^{n-1} = g(fg)^n, & v_6 : f(gf)^n = g(fg)^{n-1}, \\
v_7 : f(gf)^n = g(fg)^n, & v_8 : f(gf)^{n-1} = (fg)^n, & v_9 : f(gf)^n = (fg)^n, \\
v_{10} : (gf)^n = g(fg)^{n-1}, & v_{11} : (gf)^n = g(fg)^n, & v_{12} : (gf)^{n-1} = (fg)^n, \\
v_{13} : (gf)^n = (fg)^n, & v_{14} : g(fg)^{n-1} = g(fg)^n, & v_{15} : g(fg)^{n-1} = (fg)^n, \\
v_{16} : g(fg)^n = (fg)^n, & &
\end{array}$$

імплікації між якими можна подати у вигляді графа

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
v_1 & \leftarrow & v_8 & \rightarrow & v_9 & \leftrightarrows & v_{11} & \leftarrow & v_{10} & \rightarrow & v_{14} & & v_2 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow \\
v_4 & \rightarrow & v_5 & \rightarrow & v_7 & \leftrightarrows & v_{13} & \leftarrow & v_6 & \leftarrow & v_{12} & \rightarrow & v_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
v_{14} & & v_2 & \rightarrow & v_3 & \leftrightarrows & v_{16} & \leftarrow & v_{15} & \rightarrow & v_{14}, & &
\end{array}$$

тобто стрілка з v_i до v_j у графі означає, що з існування в напівгрупі рівності v_i випливає, що в ній є рівність v_j.

Зауважимо, що цей граф не є планарним, тому для наочності деяким додатковим співвідношенням $(v_1,\, v_2,\, v_{14})$ відповідають дві різні вершини цього графа.

Зауважимо, що в лемі 1 не йдеться про повноту переліку імплікацій. Повнота не буде використовуватись при доведенні основного результату роботи. Доведемо кілька імплікацій.

$v_2 \rightarrow v_{16}$. Справді, якщо $f(gf)^{n-1} = (gf)^n$, то, помноживши на g справа, отримаємо $f(gf)^{n-1}g = (gf)^n g$, тобто $(fg)^n = g(fg)^n$.

$v_4 \rightarrow v_5$. Нехай $f(gf)^{n-1} = g(fg)^{n-1}$. Зауважимо, що кожна з частин рівності не змінюється при множення на f та при множенні на g зліва та справа. Тоді маємо ланцюг рівностей $f(gf)^{n-1} = g(fg)^{n-1} = g(fg)^{n-1}fg = g(fg)^n$, звідки $f(gf)^{n-1} = g(fg)^n$.

$v_7 \rightarrow v_{13}$. Нехай виконується рівність $f(gf)^n = g(fg)^n$. Помноживши цю рівність на f зліва, отримаємо $f(gf)^n = (fg)^{n+1}$, звідки $f(gf)^n = (fg)^n$, а помноживши рівність $f(gf)^n = g(fg)^n$ на g зліва, одержимо $(gf)^{n+1} = g(fg)^n$, звідки $(gf)^n = g(fg)^n$. З останньої рівності та рівності $f(gf)^n = (fg)^n$ маємо $(gf)^n = (fg)^n$.

Наявність решти імплікацій для всіх показникових типів доводиться аналогічно. Оскільки граф додаткових співвідношень для показникового типу $(n,\, 1,\, n,\, 1)$ є досить складним і містить багато вершин, то виписування можливих напівгруп цього показникового типу розіб'ємо на природні частини.

3.2. Точні зображення напівгруп показникового типу $(n,\, 1,\, n,\, 1)$ неперервними відображеннями інтервалу, які не мають спільних нерухомих точок. Така напівгрупа не може мати додаткові співвідношення вигляду $a(f,\, g)f = b(f,\, g)g$, де a та b — деякі напівгрупові слова. Доведемо це.

За теоремою 1 образи відображень f та g збігаються з їх множинами нерухомих точок. Оскільки ці відображення не мають спільних нерухомих точок, то їх образи не перетинаються, звідки рівність вигляду $a(f,\, g)f = b(f,\, g)g$ не може виконатись у жодній точці, і, тим паче, не може бути напівгруповою тотожністю.

Лема 2. *Нехай напівгрупа показникового типу $(n,\, 1,\, n,\, 1)$, породжена ідемпотентами, зображається відображеннями інтервалу, які не мають спільних нерухомих точок. Тоді між додатковими співвідношеннями є імплікації, які можна зобразити у вигляді графа* $v_{14} \leftarrow v_{15} \rightarrow v_3 \leftrightarrows v_{16} \leftarrow v_2 \rightarrow v_1$.

Зауважимо, що рівності v_{14} та v_{15} отримуються з рівностей v_1 та v_2 відповідно простим перейменуванням твірних напівгрупи. Це зауваження та наведений вище граф дозволяють сформулювати список можливих напівгруп.

Лема 3. *Нехай напівгрупа показникового типу $(n,\, 1,\, n,\, 1)$, породжена ідемпотентами, зображається відображеннями інтервалу, які не мають спільних нерухомих точок.*

Тоді ця напівгрупа є однією з наведеного нижче списку:

$$S_1(n) =< f,\ g >, \quad S_2(n) =< f,\ g|\, v_{14} >,$$
$$S_3(n) =< f,\ g|\, v_3,\ v_{16} >, \quad S_4(n) =< f,\ g|\, v_1,\ v_{14} >,$$
$$S_5(n) =< f,\ g|\, v_{15} >, \quad S_6(n) =< f,\ g|\, v_2,\ v_{15} > .$$

3.3. Виконуються умови v_7 та v_{13}. Рівність $v_{13}\ :\ (gf)^n = (gf)^n$ означає, що ітерації відображень gf та fg асимптотично збігаються. Якщо в попередньому пункті ми розглядали напівгрупи, породжені відображеннями, які не мають спільних нерухомих точок, то тут розглянемо відображення, які мають єдину спільну нерухому точку, до того ж асимптотично ітерації відображень fg та gf будуть тотожно дорівнювати цій спільній нерухомій точці.

З графа, наведеного в лемі 1, маємо, що якщо в напівгрупі виконується співвідношення v_7, то виконуються і співвідношення $v_3,\ v_9,\ v_{11},\ v_{16}$.

З транзитивності відношення рівності можемо отримати кілька тверджень про імплікації між додатковими співвідношеннями в напівгрупі, в якій є співвідношення v_7: 1) якщо в напівгрупі виконуються додаткові співвідношення v_1 та v_7, то в цій напівгрупі виконуються співвідношення v_5; 2) якщо в напівгрупі виконуються співвідношення v_2 та v_{11}, то в цій напівгрупі виконується співвідношення v_5; 3) якщо в напівгрупі виконуються співвідношення v_{14} та v_7, то в цій напівгрупі виконується співвідношення v_6.

Лема 4. *Якщо графіки $(fg)^n$ та $(gf)^n$ є однією і тією ж прямою, то граф додаткових співвідношень напівгрупи, утвореної композиціями відображень f та g, має вигляд*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
v_4 & \rightarrow & v_2 & \leftrightarrows & v_5 & \leftrightarrows & v_8 & \leftrightarrows & v_1 & \rightarrow & v_3 & \rightarrow & v_7 & \rightarrow & v_9 \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & & & \downarrow \\
v_4 & \rightarrow & v_{15} & \leftrightarrows & v_6 & \leftrightarrows & v_{10} & \leftrightarrows & v_{14} & \rightarrow & v_{16} & \leftarrow & v_{13} & \leftarrow & v_{11}.
\end{array}$$

Лема 5. *Нехай у напівгрупі S виконуються співвідношення v_2 та v_{15}. Тоді в цій напівгрупі виконується співвідношення v_4.*

Лема 6. *Якщо скінченна напівгрупа, породжена ідемпотентами, зображається композиціями відображень інтервалу, графіки яких мають єдину спільну точку, і ітерації кожного з твірних асимптотично сталі, то напівгрупа є однією з напівгруп $S_7(n) = =< f,\ g|\, v_4 >,\ \ S_8(n) =< f,\ g|\, v_2 >=< f,\ g|\, v_6 >,\ \ S_9(n) =< f,\ g|\, v_3 >$.*

3.4. Умови v_7 та v_{13} не виконуються, а умови v_9 та v_{11} виконуються. Зауважимо, що цей випадок вичерпує всі напівгрупи показникового типу $(n,\ 1,\ n,\ 1)$, які ще не виписані. Оскільки умови $v_9,\ v_{11}$ і $v_{16},\ v_3$ відповідно отримуються одна з одної перейменуванням твірних, то не принципово, чи клас напівгруп, в яких умови v_7 та v_{13} не виконуються, а умови v_9 та v_{11} виконуються, збігається з класом напівгруп, в яких умови v_7 та v_{13} виконуються, а умови v_9 та v_{11} не виконуються. Крім того, якщо не виконується жодна з умов $v_3,\ v_7,\ v_9,\ v_{11},\ v_{13},\ v_{16}$, то можуть виконуватись лише умови v_1 та v_{14}, а такі напівгрупи описано серед тих, які можуть бути зображені відображеннями, що не мають спільних нерухомих точок.

Лема 7. *1. Якщо в напівгрупі виконуються співвідношення v_3 та v_{11}, то в ній виконується співвідношення v_7. 2. Якщо в напівгрупі виконуються співвідношення v_3 та v_{11}, то в ній виконується співвідношення v_7. 3. Якщо в напівгрупі виконуються співвідношення v_1 та v_9, то в ній виконується співвідношення v_8.*

Лема 8. *Якщо скінченна напівгрупа, породжена ідемпотентами, є такою, що додаткове співвідношення v_7 не виконується, а співвідношення v_9 виконується, то граф додаткових співвідношень є таким:* $v_1 \leftrightarrow v_8 \rightarrow v_9 \leftrightarrows v_{11} \leftarrow v_{10} \leftrightarrow v_{14}$.

Лема 9. *Якщо скінченна напівгрупа, породжена ідемпотентами, є такою, що додаткове співвідношення v_7 не виконується, а співвідношення v_9 виконується, то напівгрупа є однією з напівгруп* $S_{10}(n) = < f,\ g|\, v_9 >$, $S_{11}(n) = < f,\ g|\, v_8 > = < f,\ g|\, v_{10} >$, $S_{12}(n) = < f,\ g|\, v_8,\, v_{10} >$.

4. Показниковий тип напівгрупи $(n+1,\ 1,\ n,\ 1)$.

Лема 10. *Нехай напівгрупа має показниковий тип* $(n+1,\, 1,\, n,\, 1)$. *Тоді можливими додатковими співвідношеннями можуть бути лише 6 співвідношень:*

$$v_1 : g(fg)^n = (fg)^{n+1},\quad v_2 : g(fg)^{n+1} = (fg)^{n+1},\quad v_3 : g(fg)^n = f(gf)^n,$$
$$v_4 : g(fg)^n = (gf)^n,\qquad v_5 : (fg)^{n+1} = (gf)^n,\qquad v_6 : f(gf)^n = (gf)^n.$$

Лема 11. *Імплікації між співвідношеннями $v_1 - v_6$ можна подати у вигляді графа*

$$\begin{array}{ccccccccc} v_3 & \rightarrow & v_5 & \rightarrow & v_2 & \rightleftarrows & v_1 & \rightleftarrows & v_6 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & v_4 & & & & & & \end{array}.$$

Зауважимо, що з виконання рівностей v_4 та v_6 випливає рівність v_3.

Лема 12. *Якщо скінченна напівгрупа показникового типу* $(n+1,\, 1,\, n,\, 1)$, *породжена ідемпотентами, зображається композиціями відображень інтервалу, то напівгрупа є однією з напівгруп* $S_{13}(n) = < g,\ f >$, $S_{14}(n) = < g,\ f|\, v_2 >$, $S_{15}(n) = < f,\ g|\, v_3 >$, $S_{16}(n) = < f,\ g|\, v_4 >$.

5. Показниковий тип напівгрупи $(n,\ 2,\ n,\ 2)$ та $(n,\ 2,\ n+1,\ 2)$.

Лема 13. *Нехай напівгрупа S має показниковий тип* $(n,\, 2,\, n,\, 2)$. *Тоді можливими додатковими співвідношеннями можуть бути лише 2 співвідношення:* $v_1 : f(gf)^{n-1} = f(gf)^{n+1}$, $v_2 : g(fg)^{n-1} = g(fg)^{n+1}$.

Лема 14. *Нехай напівгрупа показникового типу* $(n,\, 2,\, n,\, 2)$, *породжена ідемпотентами, зображається відображеннями інтервалу, які не мають спільних нерухомих точок. Тоді ця напівгрупа є однією з напівгруп* $S_{17}(n) = < g,\ f| >$, $S_{18}(n) = < g,\ f|\, v_1 >$ *або* $S_{19}(n) = < g,\ f|\, v_1,\, v_2 >$.

Лема 15. *Напівгрупа S показникового типу* $(n,\, 2,\, n+1,\, 2)$ *не може мати додаткових співвідношень.*

Підсумовуючи викладене, можемо записати 20 серій напівгруп, які вичерпуватимуть всі напівгрупи, породжені двома ідемпотентами, що можуть бути точно зображені композиціями неперервних відображень.

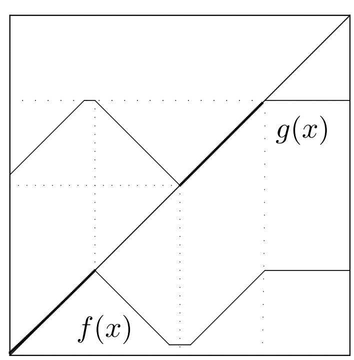
Теорема 4. *Нехай скінченна напівгрупа, породжена ідемпотентами, зображається відображеннями інтервалу. Тоді ця напівгрупа є однією з наведеного нижче списку:*
$S_1(n) = < f,\, g|(fg)^n = (fg)^{n+1},\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_2(n) = < f,\, g|\, g(fg)^{n-1} = g(fg)^n >,$
$S_3(n) = < f,\, g|\, f(gf)^n = (gf)^n,\, g(fg)^n = (fg)^n >,$
$S_4(n) = < f,\, g|\, f(gf)^{n-1} = f(gf)^n,\, g(fg)^{n-1} = g(fg)^n >,$
$S_5(n) = < f,\, g|\, g(fg)^{n-1} = (fg)^n,\, (fg)^n = (fg)^{n+1},\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_6(n) = < f,\, g|\, f(gf)^{n-1} = (gf)^n,\, g(fg)^{n-1} = (fg)^n\, (fg)^n = (fg)^{n+1},\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_7(n) = < f,\, g|\, f(gf)^{n-1} = g(fg)^{n-1},\, (gf)^n = (fg)^n >,$
$S_8(n) = < f,\, g|\, f(gf)^{n-1} = (gf)^n,\, (gf)^n = (fg)^n >,$
$S_9(n) = < f,\, g|\, f(gf)^n = (gf)^n,\, (gf)^n = (fg)^n >,$
$S_{10}(n) = < f,\, g|\, f(gf)^n = (fg)^n,\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_{11}(n) = < f,\, g|\, f(gf)^{n-1} = (fg)^n,\, (gf)^n = (gf)^{n+1},\, (fg)^n = (fg)^{n+1} >,$
$S_{12}(n) = < f,\, g|f(gf)^{n-1} = (fg)^n, (gf)^n = g(fg)^{n-1}, (gf)^n = (gf)^{n+1}, (fg)^n = (fg)^{n+1} >,$
$S_{13}(n) = < g,\, f|(fg)^{n+1} = (fg)^{n+2},\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_{14}(n) = < g,\, f|\, g(fg)^{n+1} = (fg)^{n+1},\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_{15}(n) = < f,\, g|\, g(fg)^n = f(gf)^n,\, (fg)^{n+1} = (fg)^{n+2},\, (gf)^n = (gf)^{n+1} >,$
$S_{16}(n) = < f,\, g|\, g(fg)^n = (gf)^n >,$
$S_{17}(n) = < g,\, f|(fg)^n = (fg)^{n+2},\, (gf)^n = (gf)^{n+2} >,$
$S_{18}(n) = < g,\, f|\, f(gf)^{n-1} = f(gf)^{n+1} >,$
$S_{19}(n) = < g,\, f|\, f(gf)^{n-1} = f(gf)^{n+1},\, g(fg)^{n-1} = g(fg)^{n+1} >,$
$S_{20}(n) = < g,\, f|\, (fg)^n = (fg)^{n+2} >.$

Нижче ми покажемо, як саме кожна з цих напівгруп зображається неперервними відображеннями. Зауважимо, що для різних n та m напівгрупи $S_i(n)$ та $S_j(n)$ неізоморфні, оскільки в напівгрупі $S_i(n)$ число n є найменшим, для якого виконується умова $(fg)^n = (fg)^{n+k}$ або $(gf)^n = (gf)^{n+k}$ для деякого k. Тому сформульована вище теорема справді описує всі скінченні напівгрупи, породжені двома ідемпотентами, які зображаються неперервними відображеннями інтервалу.

6. Точні зображення серій напівгруп. Доведення того, що кожна з 20 серій напівгруп може бути зображена неперервними відображеннями, буде зводитись до того, що для кожної з цих серій ми явно запишемо однопараметричну сім'ю відображень, що точно зображатиме кожну з напівгруп серії при відповідному значенні параметра.

Лема 16. *Напівгрупа $S_5(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Нехай f та g відображають відрізок $[0,\, 128]$ в себе.



Позначимо $\delta = \dfrac{32}{n}$, $n > 0$. Нехай відображення f проходить через точки $(0, 0)$, $(32, 32)$, $(64 - \delta, \delta)$, $(64 + \delta, \delta)$, $(96, 32)$, $(128, 32)$, а відображення g — через точки $(0, 64 + \delta)$, $(32 - \delta, 96)$, $(32, 96)$, $(64, 64)$, $(96, 96)$, $(128, 96)$.

На рисунку вертикальні пунктирні відрізки відповідають прямим $x = 32$, $x = 64$ та $x = 96$, а горизонтальні пунктирні відрізки — прямим $y = 64$ та $y = 96$.

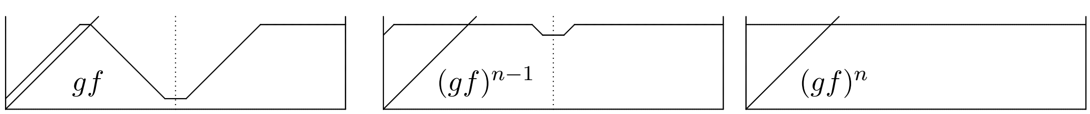
Запишемо відображення gf. Почнемо з проміжку $[0, 32 - \delta]$, на якому відображення g є лінійним і відображає відрізок $[0, 32 - \delta]$ у відрізок $[64 + \delta, 96]$, на якому відображення f є лінійним. Тому відображення gf на відрізку $[0, 32 - \delta]$ є лінійним. Знайдемо значення gf на кінцях вказаного відрізка: $(gf)(0) = f(64 + \delta) = \delta$, $(gf)(32 - \delta) = f(96) = 32$. Оскільки відображення g є сталим на проміжку $[32 - \delta, 32]$, то відображення gf також буде сталим на цьому проміжку і дорівнюватиме 32 (з неперервності відображення gf у точці $32 - \delta$).

Відрізок $[32, 64]$ під дією відображення g переходить у відрізок $[64, 96]$, на якому відображення f має злам у точці $64 + \delta$. Оскільки відображення g має кутовий коефіцієнт -1 на відрізку $[32, 64]$ і $g(64) = 64$, то $g(64 - \delta) = 64 + \delta$ і відображення gf є лінійним на відрізку $[32, 64 - \delta]$, до того ж $(gf)(64 - \delta) = \delta$. Оскільки для кожного $x \in [64 - \delta, 64]$ виконується умова $g(x) \in [64, 64 + \delta]$, а відображення f є сталим на відрізку $[64, 64 + \delta]$, то $(gf)(x) = \delta$ для кожного $x \in [64 - \delta, 64]$.

Оскільки на відрізку $[64, 96]$ виконується тотожність $g(x) \equiv x$, то відображення gf збігається з відображенням f на цьому відрізку. Таким чином, відображення gf проходить через точки $(0, 0)$, $(32 - \delta, 32)$, $(32, 32)$, $(64 - \delta, \delta)$, $(64 + \delta, \delta)$, $(96, 32)$, $(128, 32)$.

Встановимо, через які точки проходить кожна з ітерацій відображення gf. Оскільки образом відрізка $[0, 128]$ при дії цього відображення є $[0, 32]$, а на відрізку $[0, 32]$ відображення gf проходить через точки $(0, 0)$, $(32 - \delta, 32)$, $(32, 32)$, то можна сказати, що за кожну ітерацію кожна точка (x, y) графіка відображення $(gf)^k$ або піднімається на δ, якщо $y \leq 32 - \delta$, або y набуває значення 32 і при подальших ітераціях не змінюється.

Зауважимо, що δ підібрано таким чином, що $32/\delta$ є цілим числом. Тому довжина горизонтального відрізка в правому кінці проміжку $[0, 32]$, яка дорівнює δ для відображення gf, дорівнює $k\delta$ для відображення $(gf)^k$, а на відрізку $[32 - k\delta, 32]$ графік відображення $(gf)^k$ є паралельним до прямої $y = x$. Зокрема, $(gf)^{n-1}(0) = 32 - \delta$ та $(gf)^n(0) = 32$, відображення $(gf)^{n-1}$ проходить через точки $(0, 32 - \delta)$, $(\delta, 32)$, $(64 - 2\delta, 32)$, $(64 - \delta, 32 - \delta)$, $(64 + \delta, 32 - \delta)$, $(64 + 2\delta, 32)$ та $(128, 32)$, а $(gf)^n \equiv 32$.



Тепер знайдемо відображення fg. Оскільки $f(x) \equiv x$ на відрізку $[0, 32]$, то відображення fg збігається з відображенням g на цьому відрізку.

З огляду на те, що відображення f має кутовий коефіцієнт -1 на відрізку $[32, 64 - \delta]$ та $f(32) = 32$, маємо $f(32 + \delta) = 32 - \delta$. Оскільки при цьому відображення g є сталим на відрізку $[32 - \delta, 32]$, то відображення fg тотожно дорівнює 64 на відрізку $[32, 32 + \delta]$.

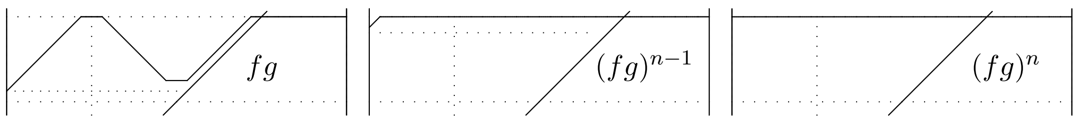
Далі, внаслідок того, що відображення f відображає відрізок $[32 + \delta, 64 - \delta]$ у відрізок $[\delta, 32 - \delta]$, на якому відображення g є лінійним, відображення fg також є лінійним на цьому відрізку. Маємо $(fg)(64 - \delta) = g(\delta) = 2\delta$. Оскільки відображення f стале на відрізку $[64 - \delta, 64 + \delta]$, то $(fg)(x) \equiv 2\delta$ на цьому відрізку.

З огляду на те, що відображення f має кутовий коефіцієнт 1 на відрізку $[64 + \delta, 96]$ і $f(96) = 32$, маємо $f(96 - \delta) = 32 - \delta$. Звідси отримуємо, що f відображає відрізок

$[64+\delta,\ 96-\delta]$ у відрізок $[2\delta,\ 32-\delta]$, на якому відображення g є лінійним. Крім того, $(fg)(96-\delta) = g(32-\delta) = 96$, тому на відрізку $[64-\delta,\ 96-\delta]$ відображення fg проходить через точки $(64-\delta,\ 2\delta)$, $(64+\delta,\ 2\delta)$, $(96-\delta,\ 32)$.

Оскільки відображення f переводить відрізок $[96-\delta,\ 128]$ у відрізок $[32-\delta,\ 32]$, на якому відображення g тотожно дорівнює 96, то відображення fg також тотожно дорівнює 96 на відрізку $[96-\delta,\ 128]$, звідки випливає, що відображення fg проходить через точки $(0,\ 64+\delta)$, $(32-\delta,\ 96)$, $(36,\ 96)$, $(64-\delta,\ 64+2\delta)$, $(64+\delta,\ 64+2\delta)$, $(96-\delta,\ 96)$, $(128,\ 96)$.

Так само, як ітерації відображення gf, кожна точка $(x,\ y)$ графіка ітерацій відображення fg або піднімається на δ, якщо $y \le 96$, або y набуває значення 96.



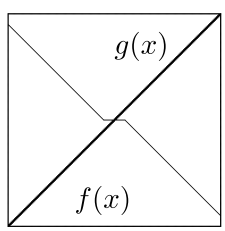
Оскільки мінімум відображення $(fg)^k$ дорівнює $64+k\delta$, то умова $(fg)^k = (fg)^{k+1}$ виконується для того k, для якого $\min(fg)^k = 96$, тобто $64+k\delta = 96$, звідки $k = n$.

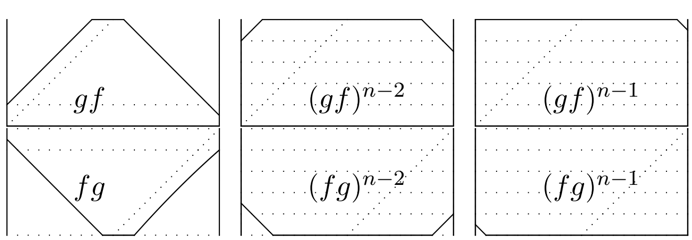
Перевіримо виконання додаткових співвідношень. Рівність $v_1 : f(gf)^{n-1} = f(gf)^n$ порушується для $x \in (0,\ \delta)$, бо відображення $(gf)^{n-1} < 32$ на цьому проміжку, в той час як відображення $f(gf)^n$ є сталим. Співвідношення $v_{15} : g(fg)^{n-1} = g(fg)^n$ виконується, бо відображення $(fg)^{n-1}$ тотожно дорівнює 96 на образі відображення g. Таким чином, за лемою 2 композиції побудованих відображень f та g утворюють напівгрупу $S_5(n)$.

Лему доведено.

Лема 17. *Напівгрупа $S_7(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Нехай $n > 1$. Нехай кусково-лінійні відображення f та g відображають відрізок $[0,\ 80]$ в себе. Позначимо $\delta = \dfrac{40}{n-1}$, $n > 1$. Нехай відображення f проходить через точки $(0,\ 0)$, $(40,\ 40)$, $(40+\delta/2,\ 40)$, $(80,\ \delta/2)$, а відображення g — через точки $(0,\ 80-$ $-\delta/2)$, $(40-\delta/2,\ 40)$, $(40,\ 40)$, $(80,\ 80)$. Наведемо композиції відображень f та g.





Відображення gf проходитиме через точки $(0,\ \delta)$, $(40-\delta,\ 40)$, $(40+\delta/2,\ 40)$, $(80,\ \delta/2)$, а відображення fg — через точки $(0,\ 80-\delta/2)$, $(40-\delta/2,\ 40)$, $(40+\delta,\ 40)$, $(80,\ 80-\delta)$.

Як і при доведенні леми 16, можемо показати, що кожна точка $(x,\, y)$ графіка відображення $(gf)^k$, для якої виконується нерівність $y \leq 40 - \delta$, переходить у точку $(x,\, y+\delta)$, інакше y набуває значення 40. Також кожна точка $(x,\, y)$ графіка відображення $(fg)^k$, для якої виконується нерівність $y \geq 40 + \delta$, переходить у точку $(x,\, y-\delta)$, інакше y набуває значення 40.

Для невеликих k мінімум відображення $(gf)^k$ дорівнює $\delta/2+\delta(k-1)$. Умова $(gf)^{k+1} = (gf)^k$ вперше виконується для того k, для якого $(gf)^{k-1}(0) = 40-\delta/2$, тобто $40-\delta/2 = \delta/2+\delta(k-2)$, звідки $k = 40/\delta+1 = n$.

Для невеликих k максимум відображення $(fg)^k$ дорівнює $(fg)^k(0) = 80-\delta/2-\delta(k-1)$. Умова $(fg)^k = (fg)^{k+1}$ вперше виконується для того k, для якого $(fg)^{k-1}(0) = 40+\delta$, тобто $80-\delta/2-\delta(k-2) = 40+\delta$, звідки $k = 40/\delta+1 = n$.

Переконаймось у тому, що рівність $v_4 : (gf)^{n-1}g = (gf)^{n-1}g$ виконується. Це так, бо відображення $(gf)^{n-1}$ відрізняється від сталої 40 лише на проміжку $(80-\delta/2,\, 80]$ і відображає цей проміжок у проміжок $(38,\, 40]$, який відображення g відображає в точку 40. Так само $(gf)^{n-1}g(x) \equiv 40$. Тому за лемою 4 композиції відображень f та g утворюють напівгрупу $S_7(n)$. Напівгрупа $S_7(1) = f, g : | f = g$ точно зображається довільними двома ідемпотентами, які збігаються.

Лема 18. *Напівгрупа $S_{10}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Позначимо $\delta = \dfrac{40}{n-1}$, $n > 1$. Нехай кусково-лінійні відображення f та g відображають відрізок $[0,\, 80+\delta]$ в себе. Нехай відображення f проходить через точки $(0,\, 0)$, $(40+\delta/2,\, 40+\delta/2)$, $(40+3\delta/4,\, 40+\delta/2)$, $(80+3\delta/4,\, \delta/2)$, $(80+\delta,\, 0)$, а відображення g — через точки $(0,\, 80+\delta/4)$, $(40,\, 40+\delta/4)$, $(40+\delta/4,\, 40+\delta/4)$, $(80+13\delta/16,\, 80+13\delta/16)$, $(80+\delta,\, 80+13\delta/16)$.

Запишемо композиції відображень f та g. Відображення gf проходитиме через точки $(0,\, \delta)$, $(40-\delta/4,\, 40+\delta/2)$, $(40-\delta/4,\, 40+\delta/2)$, $(40,\, 40+\delta/4)$, $(40+\delta/4,\, 40+\delta/4)$, $(40+\delta/2,\, 40+\delta/2)$, $(40+3\delta/4,\, 40+\delta/2)$, $(80+3\delta/4,\, \delta/2)$, $(80+13\delta/16,\, 3\delta/8)$, $(80+\delta,\, 3\delta/8)$. Для невеликих k мінімум відображення $(gf)^k$ дорівнюватиме $(gf)^k(80+\delta) = 3\delta/8+\delta(k-1)$. Умова $(gf)^{k+1} = (gf)^k$ вперше виконується для того k, для якого $(gf)^{k-1}(80+\delta) = 40-\delta+3\delta/8$, тобто $3\delta/8+\delta(k-2) = 40-\delta+3\delta/8$, звідки $k = 40/\delta+1 = n$.

Відображення fg проходитиме через точки $(0,\, 80+\delta/4)$, $(40,\, 40+\delta/4)$, $(40+\delta/4,\, 40+\delta/4)$, $(40+\delta/2,\, 40+\delta/2)$, $(40+3\delta/4,\, 40+\delta/2)$, $(40+\delta,\, 40+\delta/4)$, $(40+5\delta/4,\, 40+\delta/4)$, $(80+3\delta/4,\, 80-\delta/4)$, $(80+\delta,\, 80+\delta/4)$. Для невеликих k максимум відображення $(fg)^k$ дорівнює $(fg)^k(0) = 80+\delta/4-\delta(k-1)$. Умова $(fg)^k = (fg)^{k+1}$ уперше виконується для того k, для якого $(fg)^{k-1}(0) = 40+5\delta/4$, звідки $80+\delta/4-\delta(k-2) = 40+5\delta/4$, тобто $k = 40/\delta+1 = n$.

Рівність $v_{13} : (fg)^n = (gf)^n$ не виконується тому, що на відрізку $(80+3\delta/4,\, 80+\delta)$ відображення $(gf)^n$ пройде через точки $(80+\delta/2,\, 40+\delta/2)$, $(80+13\delta/16,\, 40+3\delta/8)$, $(80+\delta,\, 40+3\delta/8)$, в той час як відображення $(fg)^n$ проходить через точки $(80+3\delta/4,\, 40+\delta/2)$, $(80+7\delta/8,\, 40+\delta/4)$, $(80+\delta,\, 40+\delta/4)$. Водночас виконується рівність $v_9 : (fg)^n f = (fg)^n$, бо образом відрізка $[0,\, 80+\delta]$ під дією відображення $(fg)^n$ є $[40+\delta/4,\, 40+\delta/2]$, а відображення f не рухає жодну з точок цього відрізка. Перевіримо рівність $v_8 : f(gf)^{n-1} = (fg)^n$. Зауважимо, що для кожного $x \in [0,\, \delta/8]$ виконується нерівність $(gf)^{n-1}(x) \leq 40$ і при цьому відображення f не рухає жодну точку образу $(gf)^5([0,\, \delta/8]) = [40,\, 40+\delta/8]$ відрізка $[0,\, \delta/8]$ під дією відображення $(gf)^{n-1}$. Тому для кожної точки $x \in [0,\, \delta/8)$ виконується нерівність $f(gf)^{n-1}(x) < 40$, що разом з очевидною рівністю $(fg)^n([0,\, 80{+}\delta]) = [40,\, 40{+}\delta/4]$ дає нерівність $f(gf)^{n-1} \neq (fg)^n$. Перевіримо виконання рівності $v_{10} :\ (gf)^n = g(fg)^{n-1}$. Зауважимо, що для кожного $x \in [80+\delta/2,\, 80+\delta]$ виконується нерівність $(fg)^{n-1}(x) >$ $> 40+\delta/4$ і відображення g не рухає жодну точку відрізка $[80+\delta/2,\, 80+13\delta/16]$. Тому для кожного $x \in (80+\delta/2,\, 80+13\delta/16]$ виконується нерівність $g(fg)^{n-1}(x) > 40+\delta/4$, в той час як для кожного $x \in [0,\, 80+\delta]$ виконується включення $(gf)^n(x) \in [40,\, 40+\delta/4]$. Це означає, що в напівгрупі композицій відображень f та g рівність v_{10} не виконується. Тому за лемою 9 композиції відображень f та g утворюють напівгрупу $S_{10}(n)$, $n > 1$.

Побудуємо відображення відрізка $[0,\, 80]$, композиції яких зображають напівгрупу $S_{10}(1)$. Нехай відображення f проходить через точки $(0,\, 0)$, $(40,\, 40)$, $(60,\, 40)$ та $(80,\, 0)$, а відображення g — через точки $(0,\, 40)$, $(20,\, 20)$, $(70,\, 70)$ та $(80,\, 70)$. Так задані відображення зображають потрібну напівгрупу.

Лему доведено.

Як бачимо, схеми доведення лем 16 – 18 є аналогічними. Тому для інших серій напівгруп лише наводитимемо відображення і не описуватимемо технічні кроки для перевірки того, що дані відображення зображають потрібну напівгрупу. В доведеннях наступних лем будемо використовувати число b, яке є правим кінцем проміжку $[0,\, b]$, на якому діють відображення; записуватимемо параметр $\delta = \delta(n)$, що фігуруватиме в заданні функцій f та g, множину F точок, через які проходить кусково-лінійне відображення f, та множину точок G, через які проходить відображення g.

Лема 19. *Напівгрупа $S_1(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{20}{n-1}$, $b = 240$ та F: $(0,\, 0)$, $(80,\, 80)$, $(160,\, 0)$, $(180,\, 40)$, $(180+\delta,\, 40)$ $(220-\delta/2,\, 80-3\delta/2)$, $(220,\, 80)$, $(240,\, 80)$; G: $(0,\, 160)$, $(40,\, 180)$, $(40+\delta,\, 180)$, $(80-\delta/2,\, 220-3\delta/2)$, $(80,\, 220-\delta/2)$, $(100+\delta/2,\, 220-\delta/2)$, $(160,\, 160)$, $(220,\, 220)$, $(240,\, 220)$.

Для $n = 1$, $b = 45$ та F: $(0,\, 0)$, $(15,\, 15)$, $(0,\, 30)$, $(45,\, 15)$; G: $(0,\, 30)$, $(10,\, 40)$, $(25,\, 40)$, $(30,\, 30)$, $(42,\, 42)$, $(45,\, 30)$.

Лема 20. *Напівгрупа $S_2(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{20}{n-1}$, $b = 240$ та F: $(0,\, 0)$, $(80,\, 80)$, $(160,\, 0)$, $(180,\, 40)$, $(180+\delta,\, 40)$, $(220-\delta/2,\, 80-3\delta/2)$, $(240,\, 80-3\delta/2)$; G: $(0,\, 160)$, $(40,\, 180)$, $(40+\delta,\, 180)$, $(80-\delta/2,\, 220-3\delta/2)$, $(80,\, 220-\delta/2)$, $(100+\delta/2,\, 220-\delta/2)$, $(160,\, 160)$, $(220,\, 220)$, $(240,\, 220)$.

Для $n = 1$, $b = 120$ та F: $(0,\, 0)$, $(30,\, 30)$, $(60,\, 0)$, $(75,\, 30)$, $(90,\, 30)$, $(120,\, 0)$; G: $(0,\, 60)$, $(30,\, 75)$, $(60,\, 60)$, $(90,\, 90)$, $(120,\, 90)$.

Лема 21. *Напівгрупа $S_3(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{20}{n-1}$, $b = 240$ та F: $(0,\, 0)$, $(80,\, 80)$, $(160,\, 0)$, $(180,\, 40)$, $(180+\delta,\, 40)$, $(220-\delta/2,\, 80-3\delta/2)$, $(220,\, 80)$, $(240,\, 80)$; G: $(0,\, 160)$, $(40,\, 180)$, $(40+\delta,\, 180)$, $(80-\delta/2,\, 220-3\delta/2)$, $(80,\, 220-\delta/2)$, $(80+\delta/2,\, 220-3\delta/2)$, $(120-\delta,\, 180)$, $(120,\, 180)$, $(160,\, 160)$, $(220,\, 220)$, $(240,\, 220)$.

Для $n = 1$, $b = 90$ та F: $(0,\, 0)$, $(30,\, 30)$, $(0,\, 60)$, $(90,\, 30)$; G: $(0,\, 60)$, $(20,\, 80)$, $(40,\, 80)$, $(60,\, 60)$, $(85,\, 85)$, $(90,\, 85)$.

Лема 22. *Напівгрупа $S_4(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{20}{n-1}$, $b = 240$ та F: $(0, 0)$, $(80, 80)$, $(160, 0)$, $(180, 40)$, $(180 + \delta, 40)$, $(220, 80 - \delta)$, $(240 - \delta, 80 - \delta)$, $(240, 80)$; G: $(0, 160)$, $(40, 180)$, $(40 + \delta, 180)$, $(80, 220 - \delta)$, $(100 + \delta, 220 - \delta)$, $(160, 160)$, $(220, 220)$, $(240, 220)$.

Для $n = 1$, $b = 90$ та F: $(0, 0)$, $(30, 30)$, $(60, 0)$, $(90, 30)$, $(105, 30)$, $(120, 0)$; G: $(0, 60)$, $(30, 90)$, $(60, 60)$, $(90, 90)$, $(120, 60)$.

Лема 23. *Напівгрупа $S_6(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{10}{n-1}$, $b = 140$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(80, 0)$, $(90, 20)$, $(90 + \delta, 20)$, $(110, 40 - \delta)$, $(140, 40 - \delta)$; G: $(0, 80)$, $(20, 90)$, $(20 + \delta, 90)$, $(40, 110 - \delta)$, $(60 - \delta, 90)$, $(60, 90)$, $(80, 80)$, $(110, 110)$, $(140, 110)$.

Для $n = 1$, $b = 120$ та F: $(0, 0)$, $(30, 30)$, $(90, 0)$, $(120, 30)$; G: $(0, 90)$, $(30, 105)$, $(90, 90)$, $(120, 120)$.

Лема 24. *Напівгрупа $S_8(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{40}{n}$, $b = 80$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(40 + \delta, 40)$, $(80, \delta)$; G: $(0, 80 - \delta)$, $(\delta, 80 - \delta)$, $(40, 40)$, $(80, 80)$.

Для $n = 1$, $b = 80$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(40, 40)$; G: $(0, 0)$, $(80, 80)$.

Лема 25. *Напівгрупа $S_9(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{40}{n-1}$, $b = 80$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(40 + \delta, 40)$, $(80 - \delta/2, 3\delta/2)$, $(80, \delta/2)$; G: $(0, 80 - \delta/4)$, $(\delta/4, 80 - \delta/4)$, $(40, 40)$, $(80, 80)$.

Для $n = 1$, $b = 80$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(80, 40)$; G: $(0, 80)$, $(40, 40)$, $(80, 80)$.

Лема 26. *Напівгрупа $S_{11}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{40}{n-1}$, $b = 80 + \delta$ та F: $(0, 0)$, $(40 + \delta/2, 40 + \delta/2)$, $(40 + 3\delta/4, 40 + \delta/2)$, $(80 + 3\delta/4, \delta/2)$, $(80 + 7\delta/8, \delta/4)$, $(80 + \delta, \delta/4)$; G: $(0, 80)$, $(\delta/4, 80)$ $(40, 40 + \delta/4)$, $(40 + \delta/4, 40 + \delta/4)$, $(80 + 13\delta/16, 80 + 13\delta/16)$, $(80 + \delta, 80 + 13\delta/16)$.

Для $n = 1$, $b = 80$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(60, 40)$, $(80, 0)$; G: $(0, 40)$, $(20, 20)$, $(60, 60)$, $(80, 60)$.

Лема 27. *Напівгрупа $S_{12}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 2$, $\delta = \dfrac{40}{n-1}$, $b = 80$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(40 + \delta/2, 40)$, $(80 - \delta/4, 3\delta/4)$, $(80, \delta/4)$; G: $(0, 80 - \delta/2)$, $(40 - \delta/4, 40 - \delta/4)$, $(80 - 3\delta/16, 80 - 3\delta/16)$, $(80, 80 - 3\delta/16)$.

Для $n = 1$ напівгрупа $S_{12}(1)$ точно зображається довільними різними ідемпотентами, чиї множини нерухомих точок збігаються.

Для $n = 2$, $b = 90$ та F: $(0, 0)$, $(50, 50)$, $(70, 50)$, $(80, 40)$, $(90, 20)$; G: $(0, 60)$, $(30, 30)$, $(60, 60)$, $(85, 85)$, $(90, 85)$.

Лема 28. *Напівгрупа $S_{13}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{20}{n}$, $b = 120$ та F: $(0, 0)$, $(40, 40)$, $(80, 0)$, $(90, 20)$, $(90 + \delta, 20)$, $(110, 40 - \delta)$, $(120, 40 - \delta)$; G: $(0, 80)$, $(20, 90)$, $(40, 110)$, $(50, 110)$, $(80, 80)$, $(110, 110)$, $(120, 110)$.

Для $n = 1$, $b = 120$ та F: $(0,\ 0)$, $(40,\ 40)$, $(80,\ 0)$, $(90,\ 20)$, $(120,\ 20)$; G: $(0,\ 80)$, $(20,\ 90)$, $(40,\ 110)$, $(50,\ 110)$, $(80,\ 80)$, $(110,\ 110)$, $(120,\ 110)$.

Лема 29. *Напівгрупа $S_{14}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 1$, $\delta = \dfrac{20}{n}$, $b = 120$ та F: $(0,\ 0)$, $(40,\ 40)$, $(80,\ 0)$, $(90,\ 20)$, $(90+\delta,\ 20)$, $(110-\delta,\ 40-2\delta)$, $(110-\delta/2,\ 40-\delta)$, $(120,\ 40-\delta)$; G: $(0,\ 80)$, $(20,\ 90)$, $(40,\ 110)$, $(60,\ 90)$, $(80,\ 80)$, $(110,\ 110)$, $(120,\ 110)$.

Для $n = 1$, $b = 120$ та F: $(0,\ 0)$, $(40,\ 40)$, $(80,\ 0)$, $(90,\ 20)$, $(120,\ 20)$; G: $(0,\ 80)$, $(20,\ 90)$, $(40,\ 110)$, $(60,\ 90)$, $(80,\ 80)$, $(110,\ 110)$, $(120,\ 110)$.

Лема 30. *Напівгрупа $S_{15}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 0$, $\delta = \dfrac{40}{n}$, $b = 80$ та F: $(0,\ 0)$, $(40,\ 40)$, $(40+\delta,\ 40)$, $(80,\ \delta)$; G: $(0,\ 80)$, $(40,\ 40)$, $(80,\ 80)$.

Лема 31. *Напівгрупа $S_{16}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 0$, $\delta = \dfrac{40}{n}$, $b = 80$ та F: $(0,\ 0)$, $(40+3\delta/8,\ 40+3\delta/8)$, $(80-\delta/4,\ \delta)$, $(80,\ \delta/2)$; G: $(0,\ 80-\delta/4)$, $(40-\delta/4,\ 40)$, $(40,\ 40)$, $(80-\delta/4,\ 80-\delta/4)$, $(80,\ 80-\delta/4)$.

Лема 32. *Напівгрупа $S_{17}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 2$, $\delta = \dfrac{32}{n}$, $b = 192$ та F: $(0,\ 3\delta/4)$, $(3\delta/4,\ 3\delta/4)$, $(64-\delta,\ 64-\delta)$, $(64+\delta,\ 64-\delta)$, $(128-3\delta/4,\ 3\delta/4)$, $(128+\delta/2,\ 3\delta/4)$, $(128+3\delta/4,\ 7\delta/4)$, $(160-\delta/2,\ 32+\delta/2)$, $(160+\delta/2,\ 32-\delta/2)$, $(192,\ 64-\delta)$; G: $(0,\ 128)$, $(64,\ 192)$, $(128,\ 128)$, $(192,\ 192)$.

Для $n = 1$, $b = 81$ та F: $(0,\ 6)$, $(6,\ 6)$, $(18,\ 18)$, $(33,\ 18)$, $(51,\ 6)$, $(61.5,\ 12)$, $(69,\ 18)$, $(78,\ 9)$, $(81,\ 18)$; G: $(0,\ 54)$, $(27,\ 81)$, $(54,\ 54)$, $(81,\ 81)$.

Для $n = 2$, $b = 96$ та F: $(0,\ 4)$, $(4,\ 4)$, $(24,\ 24)$, $(40,\ 24)$, $(60,\ 4)$, $(66,\ 4)$, $(68,\ 12)$, $(80,\ 24)$, $(88,\ 16)$, $(96,\ 24)$; G: $(0,\ 64)$, $(32,\ 96)$, $(64,\ 64)$, $(96,\ 96)$.

Лема 33. *Напівгрупа $S_{18}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 0$, $\delta = \dfrac{32}{n+1}$, $b = 96$ та F: $(0,\ 0)$, $(32,\ 32)$, $(64,\ 0)$, $(96-\delta,\ 32-\delta)$, $(96,\ 32-\delta)$; G: $(0,\ 64+\delta)$, $(\delta,\ 64)$, $(32,\ 96-\delta)$, $(32+\delta,\ 96-\delta)$, $(64,\ 64)$, $(96,\ 96)$.

Лема 34. *Напівгрупа $S_{19}(n)$ зображається неперервними відображеннями інтервалу.*

Доведення. Для $n > 2$, $\delta = \dfrac{32}{n}$, $b = 192$ та F: $(0,\ 0)$, $(64,\ 64)$, $(64+\delta,\ 64)$, $(128,\ \delta)$, $(192-3\delta,\ 64-2\delta)$, $(192-2\delta,\ 64-2\delta)$, $(192-\delta,\ 64-\delta)$, $(192,\ 64-\delta)$; G: $(0,\ 128+\delta)$, $(64-2\delta,\ 192-\delta)$, $(64-\delta,\ 192-2\delta)$, $(64,\ 192-\delta)$, $(64+\delta,\ 192-\delta)$, $(128,\ 128)$, $(192,\ 192)$.

Для $n = 1$, $b = 81$ та F: $(0,\ 6)$, $(6,\ 6)$, $(18,\ 18)$, $(33,\ 18)$, $(51,\ 6)$, $(61.5,\ 12)$, $(69,\ 18)$, $(78,\ 9)$, $(81,\ 18)$; G: $(0,\ 54)$, $(27,\ 81)$, $(54,\ 54)$, $(81,\ 81)$.

Для $n = 2$, $b = 96$ та F: $(0,\ 4)$, $(4,\ 4)$, $(24,\ 24)$, $(40,\ 24)$, $(60,\ 4)$, $(66,\ 4)$, $(68,\ 12)$, $(80,\ 24)$, $(88,\ 16)$, $(96,\ 24)$; G: $(0,\ 64)$, $(32,\ 96)$, $(64,\ 64)$, $(96,\ 96)$.

Лема 35. *Для кожного n напівгрупа $S_{20}(n)$ показникового типу $(n,\ 2,\ n+1,\ 2)$ зображається композиціями неперервних відображень інтервалу.*

Доведення. Для $n > 0$, $\delta = \dfrac{32}{n+1}$, $b = 96$ та F: $(0,\ 0)$, $(32,\ 32)$, $(64,\ 0)$, $(96,\ 32)$; G: $(0,\ 64+\delta)$, $(32-\delta,\ 96)$, $(32,\ 96-\delta)$, $(32+\delta,\ 96-\delta)$, $(64,\ 64)$, $(96,\ 96)$.

З лем 16 – 34 та теорем 2 і 4 випливає така теорема, анонсована в [5].

Теорема 5. *Скінченна напівгрупа, породжена двома ідемпотентами, точно зображається неперервними відображеннями інтервалу в себе тоді і лише тоді, коли для кожного її елемента* z *з рівності* $z^k = z^{k+m}$ *для натуральних* k *та* m *випливає* $z^k = z^{k+2}$.

1. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974.
2. *Romanenko E. Yu.* Limit properties of the semigroup generated by a continuous map of an intervals // Доп. НАН України. — 1998. — № 3.
3. *Шарковський О. М.* Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність, комп'ютерна турбулентність // Пр. Укр. мат. конгресу-2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С. 125 – 149.
4. *Плахотник М. В., Федоренко В. В., Федоренко Ю. В.* Одновимірні динамічні системи з обмеженими у сукупності потужностями орбіт // Вісн. Київ. ун-у. — 2006. — № 4. — С. 119 – 128.
5. *Плахотник М. В.* Напівгрупи ітерацій n-вимірного куба // Тези доп. наук. конф. мол. учених і студентів з диференц. рівнянь та їх застосувань, присвяченої 100-річному ювілею Я. Б. Лопатинського (Донецьк, 2006). — 2006. — С. 102 – 104.

Одержано 28.04.2007