УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ РАЗВИТИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

В. А. Вуйичич

Мат. ин-т Серб. академии наук
11001, Београд, Сербия

We consider some nonlinear mechanics problems that originate in the mechanics of Newton and Lagrange. Using some examples, we show a necessity to reexamine some notions of the classical mechanics.

Розглянуто деякі питання нелінійної механіки, що беруть свій початок у механіці Ньютона і Лагранжа. На низці прикладів показано необхідність перегляду деяких понять класичної механіки.

В течение 90 вращений нашей планеты вокруг Солнца многое менялось и изменилось и в недрах Земли, и на Земле. Вулканы, землетрясения, ураганы и разливы рек указывают на внутреннюю и внешнюю нестационарность процессов, протекающих на Земле. Человеческий возраст в социальном, экономическом и техническом аспектах несоизмерим с предыдущей историей развития. Изменились и/или утратили силу многие утверждения науки, выраженные линейными либо нелинейными математическими соотношениями. Знания и философия людей оказались сильным фактором как развития народов, так и их самоуничтожения. Человек поднялся в космос и стал живым небесным существом, отослал возвращаемые информационные сигналы во Вселенную и проник в глубины атомной структуры материи. Математико-логические теории подчас превосходят даже границы поэзии!

На этом девяностогодовом пути Земли академик Ю. А. Митропольский был не нейтральным наблюдателем или свидетелем событий, а активным исследователем и строителем объективно возможного развития.

Более 30 лет назад автор этой статьи счел необходимым вписать имя Ю. А. Митропольского в свою книгу „Teorija oscilacija" (раздел 25 „О нелинейных колебаниях систем со многими степенями свободы" (см. [1, с. 286 – 293]) и представить студентам естественно-математического факультета Белградского университета монографию Ю. А. Митропольского „Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний". Спустя 20 лет по приглашению Комитета Югославского общества по теоретической и прикладной механике Ю. А. Митропольский прочитал доклад на тему „Some problems in the development of nonlinear mechanics theory and applications" (см. [2, с. 539 – 560]).

В процессе этого торжественного собрания Ю. А. Митропольский сказал несколько незабываемых фраз о сотрудничестве ученых разных стран, и особенно стран славянских народов. В частности, сотрудничество украинских и югославских ученых было не только желанием, но и реальностью. В результате реализации некоторых проектов сотрудничества с Институтом механики и Институтом прикладной математики и механики НАН Украины появились работы [3, 4], привлекшие большое внимание научной общественности.

В настоящей статье автор выбрал для обсуждения несколько существенных проблем нелинейной механики. Чтобы избежать возможного несогласия в использовании некоторых понятий механики, автор определился в собственной точке зрения, которая названа „Препринципы механики” (см. [5]). Рассматриваемые далее понятия основаны на предначалах существования, инвариантности и причинной определенности. Все другие определения и выводы, которые не согласуются с предначалами, автор игнорирует.

Перейдем к фактическому изложению обсуждаемых проблем. Предположим, что существуют тела, которые моделируются материальными точками массы m_ν $\nu = 1, \ldots, N$. Их положение в течение времени t определяется трехкомпонентным радиусом-вектором $\mathbf{r}_\nu(t) \in \mathbf{E}_3$. Это не противоречит первому, второму и третьему определениям Ньютона (см. [5, с. 23–26]). Третье определение Ньютона в интерпретации Даламбера утверждает, что произведение массы тела m_ν и ускорения

$$\mathbf{I}_\nu = m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} \tag{1}$$

является *силой инерции*. Согласно этому определению размерность силы

$$\dim I = MLT^{-2}. \tag{2}$$

Определение IV Ньютона: *Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения,* не вполне ясно.

Фразу „Сила **F** (от французского слова Force) есть действие A” (от латинского Aktion) можно понять так, что „сила **F** это то же самое, что и действие A”.

Между тем при аксиоматическом построении механики это теряет смысл, так как в первом случае не сказано, что такое „действие”. В то же время вторая часть определения IV индуцирует мысль о том, что понятие „сила” связано с понятием „действие”.

В классической механике эти два понятия существенно отличаются. Согласно Полаку (см. [6, с. 782–783]) действие у Лейбница и Мопертюи — это произведение *массы, скорости* и *времени*. У Эйлера упоминается понятие *действия силы* (см. [6, с. 70, 71]) в форме

$$A = \int \left(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right) dt,$$

размерность которого

$$\dim A = ML^2T^{-1}. \tag{3}$$

Мы принимаем это понятие действия силы в смысле определения

$$A(F) = \int\limits_{t_0}^{t} W(\mathbf{F}) dt = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{r_0}^{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right) dt, \tag{4}$$

где $W(\mathbf{F})$ — работа силы $\mathbf{F}$. Следовательно, действие силы инерции (1) выражается так:

$$A(\mathbf{I}) = \int\limits_{t_0}^{t} W(\mathbf{I})dt = -\int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{r_0}^{r} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \right) dt =$$

$$= -m\int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{v_0}^{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = -m\int\limits_{t_0}^{t} 2E_k dt. \tag{5}$$

Таким образом, разделяются понятие *силы*, физическая размерность которой определяется формулой (2), и понятие *действия силы* (5), размерность которого определяется формулой (3). Это не формальное разделение, а такое, которое индуцирует две грани механики: механику Ньютона с его определением силы и механику Лагранжа, построенную на основе действия (5). Как известно, их задачи не тождественны.

В первом случае построение механики осуществляется на основе трех аксиом Ньютона, во втором — на основе принципа действия Лагранжа или принципа Гамильтона. Поскольку и силы, и работа сил, т. е. энергия, в общем случае являются нелинейными функциями, механика уже по своему математическому основанию является *нелинейной наукой*.

Согласно Ньютону существуют две задачи для математиков: *„Рациональная механика есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное" или „Дело математиков найти такую силу, которая в точности удерживала бы заданное тело в движении по заданной орбите с данной скоростью, и, наоборот, найти тот криволинейный путь, на котором заданной силой будет отклонено тело, вышедшее из заданного места с заданной скоростью"* (см. [5, с. 2, 27]).

Согласно Лагранжу или Гамильтону основная задача математиков состоит в интегрировании дифференциальных уравнений движения, т. е. в определении движения на основе заданной энергии. Гамильтон писал: *„Задача математической динамики для системы n точек заключается в том, чтобы проинтегрировать систему $6n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих $6n$ переменных p_i, q^i (наше обозначение) и время t"* (см. [6, с. 237]).

Покажем на простом примере существующие здесь различия.

Пример 1. Предположим, что материальная точка массы m движется с постоянной скоростью v по окружности радиуса R. Необходимо определить силу, которая обеспечивает рассматриваемое движение.

1. Согласно Ньютону имеем:

а) применение теоремы IV и следствий 1–3 приводит к выражению

$$F = -m\frac{v^2}{R} = -m\frac{4\pi^2R^2}{RT^2} = -m\frac{4\pi^2R^3}{R^2T^2} = -\mu\frac{m}{R^2},$$

где $\mu = \dfrac{4\pi^2R^3}{T^2}$ — постоянная Гаусса;

б) согласно аксиомам координат Декарта x, y имеем

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

далее,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} = v^2 + a\frac{F_x}{m} + y\frac{F_y}{m} = v^2 + \frac{RF}{m} = 0$$

и, окончательно, $F = -m\dfrac{v^2}{R}$;

в) в полярных координатах ρ, θ имеем

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho, \tag{6}$$

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = F_\theta. \tag{7}$$

Поскольку $\dot{\rho} = 0$ и $\ddot{\rho} = 0$, получаем

$$F_\theta = 0, \quad F_\rho = -mR\frac{4\pi^2}{T^2} = -m\frac{v^2}{R}.$$

2. Согласно методу независимых обобщенных координат Лагранжа число независимых координат равно 1; пусть это будет $q = \theta$. В этом случае имеем одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q_\theta,$$

так как

$$E_k = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 \rightarrow \frac{d}{dt}(mR\dot{\theta}) = Q_\theta = 0.$$

В этом случае сила F_ρ „потерялась", поскольку она не действует в тангенциальном многообразии $\theta \in TM^1$.

3. Согласно Гамильтону из двух его дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}}, \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}$$

получается тот же результат, что и с помощью метода Лагранжа.

Приведенный пример показывает, что дифференциальные уравнения движения одного и того же объекта могут быть как линейными, так и нелинейными в зависимости от выбора системы координат (в евклидовом пространстве E^2, либо на многообразии $M^1 \subset E^2$).

Таким образом, классическая аналитическая динамика нуждается в некоторой модификации (см. [3, 7, 8]), включая основные выражения, такие как тензор инерции, интеграл энергии, вариационные принципы механики, число независимых дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода, дифференциальные уравнения Гамильтона и критерии устойчивости решений этих уравнений.

Далее рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, масса которых — постоянная или переменная величина $m_\nu = \mathrm{const}$, либо $m_\nu = m_\nu(t)$, и докажем некоторые новые утверждения. Пусть реономные связи, наложенные на данную систему, имеют вид

$$f_\nu(y_i(t), \tau_\nu(t)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, k < 3N, \quad i = 1, \dots, 3N. \tag{8}$$

Функции $\tau_\nu(t)$ известны, и всегда можно найти некоторую функцию

$$\tau(t) = q^0(t) \to t = t(q^0). \tag{9}$$

Принимая во внимание (9), связи (8) можно представить в виде

$$f_\nu(y^j(t)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, k < 3N, \quad j = 0, 1, \dots, 3N. \tag{10}$$

При выполнении условия

$$\left| \frac{\partial f_n u}{\partial y^j} \right| \neq 0 \tag{11}$$

из системы уравнений

$$\dot f_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial y^0}\dot y^0 + \ldots + \frac{\partial f_\nu}{\partial y^1}\dot y^1 + \ldots + \frac{\partial f_\nu}{\partial y^k}\dot y^k + \frac{\partial f_\nu}{\partial y^{k+1}}\dot y^{k+1} + \ldots + \frac{\partial f_\nu}{\partial y^{3N}}\dot y^{3N} = \sum_{\nu=0}^{3N} \frac{\partial f_\nu}{\partial y^j}\dot y^j \tag{12}$$

можно определить k координат скоростей $\dot y^k$ как функции от $3N - k + 1$ независимых координат $y^{k+1}, \dots, y^{3N}, y^0$, которые будем обозначать буквами $q^0, q^1, \dots, q^n$, $n = 3N - k$ [3].

Относительно введенных независимых обобщенных координат получаем систему $n + 1$ ковариантного дифференциального уравнения

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot q^\beta}{dt} = Q^*_\alpha, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n. \tag{13}$$

Ковариантные координаты тензора инерции

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}(m_1, \dots, m_N;\, q^0, q^1, \dots, q^n) \tag{14}$$

и координаты вектора ускорения

$$\frac{D\dot q^\beta}{dt} = \ddot q^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\dot q^\alpha \dot q^\gamma, \qquad q \in M^{n+1}, \tag{15}$$

в общем случае являются нелинейными функциями.

Из выражений (6) и (7) видим, что координаты вектора ускорения в уравнениях (13) представлены в линейном виде. Если же координаты ускорения вычислять на основе классических обобщенных координат, представленных в уравнениях Лагранжа второго рода, то из соотношений (15) видно, что дифференциальные уравнения движения механической системы являются нелинейными на многообразии M^{n+1} вне зависимости от степеней нелинейности обобщенных сил Q^*_α. То же самое заключение имеет место и в рамках уравнений Гамильтона относительно многообразия M^n.

Рассмотрим частный случай. Предположим, что силы $Q^*_\alpha = 0$ и массы m_ν материальных точек величины постоянные. В этом случае дифференциальные уравнения (13) упрощаются

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = 0 \tag{16}$$

и с учетом (15) принимают вид

$$\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = \ddot{q}^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma = 0. \tag{17}$$

Поскольку $a_{\alpha\beta}(m_1,\ldots,m_N;q^1,\ldots,q^n)$ и $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(q^1,\ldots,q^n)$ — нелинейные функции обобщенных независимых координат $q \in M^n$ и $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma$ являются квадратичными функциями относительно обобщенных скоростей $\dot{q} \in TM^n$, дифференциальные уравнения (16), (17) являются нелинейными относительно координат q и их производных $\dot{q}$. В то же время они являются линейными относительно $\dfrac{D\dot{q}^\beta}{dt}$ или $\ddot{q}^\beta$.

Уравнения (17) можно привести к соотношениям

$$\dot{q}^\beta = -\int \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha dq^\gamma + \dot{q}^\beta(t_0), \tag{18}$$

которые в общем случае не интегрируются.

В то же время применение тензорного или ковариантного интеграла (см. [9]) позволяет доказать, что

$$\int a_{\alpha\beta}D\dot{q}^\beta = \int D(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) = a_{\alpha\beta}D\dot{q}^\beta - A_\alpha = 0, \tag{19}$$

так как $a_{\alpha\beta}$ и A_α — ковариантно постоянные тензоры, для которых $D(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta) = 0$ и $DA_\alpha = 0$. Выражение (18) в общей механике теряет смысл, в то же время соотношения (19) согласуются с законом инерции Галилея, Ньютона и Герца.

Следует заметить, что проблема тензорного интегрирования в механике остается недостаточно разработанной (см. работу [10] и приведенную в ней библиографию). Особые затруднения вызывает понимание конфигурационного пространства. Монографию [11] можно рассматривать как хорошую подготовку для решения проблемы тензорного интегрирования.

Пример 2. Рассмотрим применение ковариантного интеграла к проблеме двух тел, моделируемых материальными точками, массы которых m_1 и m_2 постоянны, а расстояние между ними определяется формулой

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \rho(t)\boldsymbol{\rho}_0, \tag{20}$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы, определяющие положение точек.

Согласно законам Ньютона ищем силу, которая удерживала бы тела на заданном расстоянии $\rho(t)$ между собой и на кеплеровских орбитах.

В силу второго и третьего законов Ньютона имеем

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1,$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_2,$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = F\boldsymbol{\rho}_0$$

при заданном условии (20). При этом $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\rho}_0 = \dfrac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$.

Силу $F_\rho = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\rho}_0$ определяем так. Из того, что

$$\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - = \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{or}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 - = \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{v}}_2 - \dot{\mathbf{v}}_1, \quad \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} = \ddot{\boldsymbol{\rho}},$$

следует выражение для искомой силы

$$F_1 = -F_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{D\dot{\rho}}{dt},$$

так как

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{D\rho}{dt} \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{D\dot{\theta}}{dt} \boldsymbol{g}_\theta, \qquad \boldsymbol{\rho}_0 \perp \boldsymbol{g}_\theta,$$

где

$$\frac{D\rho}{dt} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2. \tag{21}$$

Под названием „проблема двух тел” обычно понимают исследование кеплеровских движений планеты массы m вокруг Солнца массы $M_\odot$. При этом применяются известные соотношения из законов Кеплера:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

$$\rho^2 \dot{\theta} = C = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},$$

$$\frac{a^3}{T^2} = K = \text{const}.$$

Принимая во внимание, что $\dot{\theta}\rho^{-2} = C\rho^{-2}$, и используя (21), получаем выражение „ньютоновой силы гравитации”

$$F = f\frac{M_{\odot}m}{\rho^2}, \tag{22}$$

где

$$f = \frac{4\pi^2 a^3}{(M_{\odot}+m)T^2} = \frac{\mu}{M_{\odot}+m}. \tag{23}$$

Далее исследуем движение под действием известной силы (22). В этом случае дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$M_{\odot}\ddot{\mathbf{r}}_M = f\frac{M_{\odot}m}{\rho^2}, \tag{24}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_p = -f\frac{M_{\odot}m}{\rho^2}. \tag{25}$$

Принимая во внимание (23), из выражений (24) и (25) находим

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -f\frac{M_{\odot}+m}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{\rho}_0,$$

или

$$\frac{D\dot{\rho}}{dt} = -\frac{\mu}{\rho^2}, \qquad \rho^2\frac{D\dot{\theta}}{dt} = 0.$$

Далее имеем

$$\dot{\rho}D\dot{\rho} = -\mu\frac{d\rho}{\rho^2}, \qquad \rho^2\dot{\theta}D\dot{\theta} = 0$$

или

$$\frac{1}{2}D\dot{\rho}^2 = \mu d\rho^{-1}, \qquad \frac{1}{2}D(\rho^2\dot{\theta}^2) = 0.$$

Применяя теперь ковариантное интегрирование, получаем

$$\hat{\int} D(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) = -2\mu\int\frac{d\rho}{\rho^2}, \qquad \hat{\int} D(\rho^2\dot{\theta}) = 0.$$

Таким образом, мы получили два известных интеграла (см. [11, с. 421])

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 - 2\frac{\mu}{\rho} = A_1, \qquad \rho^2\dot{\theta} = A_2,$$

где $A_1 = h,\ A_2 = C$ — ковариантные постоянные.

Из изложенного следует необходимость модификации аналитической механики как стационарных, так и нестационарных систем. Некоторые результаты в этом направлении изложены в ряде работ (см. [7, 10, 12 – 14]). Отсюда следует, что мнение о завершенности построения теории движения твердого тела в XVIII столетии является далеким от действительности.

По нашему мнению Ю. А. Митропольский понял глубже, чем многие другие, взаимную связь прикладной математики, законов природы и человеческих потребностей с целью построения процессов устойчивого развития. Поэтому в завершение следует привести одну фразу из сербско-славянской поэзии и философии: „*Благо томе ко довиек живи, имао се рашта и родити*" (Хорошо тому, кто на свете живет и имел для чего родиться).

1. *Vujičić V. A.* Teorija oscilacija. — Beograd: Nauchna kniga, 1976. — 465 p.
2. *Mitropolskii Yu. A.* Some problems in the development of nonlinear mechanics theory and applications // Facta Univ. Ser. Mech., Automat. Control and Robotics. — 1995. — **1**, № 5. — P. 539 – 556.
3. *Вуйичич В. А., Мартынюк А. А.* Некоторые задачи механики неавтономных систем. — Београд: Мат. ин-т Серб. академии наук, Киев: Ин-т механики НАН Украины, 1991. — 109 с.
4. *Vujičić V. A., Kovalev A. M.* Contrallability and decomposition of the mechanical systems // J. Appl. Math. and Mech. — 2000. — **64**, № 1. — P. 25 – 34.
5. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии (Перевод с латинского и комментарии А. Н. Крылова). — М.: Наука, 1989. — 688 с.
6. *Вариационные* принципы механики / Под ред. Л. С. Полака. — М.: Наука, 1959. — 932 с.
7. *Vujičić V. A.* Preprinciples of mechanics. — Beograd: Math. Inst. SANU, 1999. — 225 p.
8. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1977. — Т. 1. — 479 с.
9. *Vujičić V. A.* The covariant integration on manifolds // Tensor. — 1986. — **43**, № 3. — P. 418 – 432.
10. *Drašković Z.* On the invariance in mechanics. — Beograd: Mat. Inst. SANU, 2005. — 95 p.
11. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979. — 759 с.
12. *Vujičić V. A.* On a generalization of Newton's law of gravitation // Int. Appl. Mech. — 2000. — **40**, № 3.
13. *Mušicki Dj.* Extended Lagrangian formalism and main general principles of mechanics // Eur. J. Mech. A. Solids. — 2005. — **24**. — P. 227 – 242.
14. *Vujičić V. A.* On a generalization of Kepler's third law // Astron. and Astrophys. Trans. — 2005. — **24**, № 6. — P. 489 – 495.

Получено 26.09.2006