УДК 517 . 949

ПРО ПРОДОВЖУВАНІСТЬ „ВЛІВО” РОЗВ’ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

М. Я. Бойко, М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
e-mail: gorodnii@yandex.ru

We give sufficient conditions for the extendibility “to the left” of solutions of a nonlinear difference equation in a Banach space.

Приведены достаточные условия продолжаемости „влево” решений нелинейного разностного уравнения в банаховом пространстве.

Нехай $(W, \|\cdot\|)$ — банахів простір; $\mathbf{0}, O, I$ — відповідно нульовий елемент, нульовий та одиничний оператори в W; k — фіксоване натуральне число; $Z_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

У роботах [1, 2] отримано достатні умови на функції $\{f_n : \Omega_n \subset W \to W : n \in Z_k\}$, при виконанні яких для заданого елемента $d \in W$ існує єдиний в деякій кулі простору W елемент x_0 такий, що

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n), \quad n \in Z_k;\ x_k = d. \tag{1}$$

При цьому було використано модифікований метод Ньютона [3, с. 470] і умови сформульовано для функції F, яка задає явний вигляд розв’язку різницевого рівняння (1) і складно виражається через $\{f_n\}$. Ці умови, зокрема умова щодо оборотності F' в деякій точці, є складними для перевірки. Також в [1] встановлено, що якщо функції $\{f_n\}$ задовольняють певну умову Ліпшиця, то для кожного $x_0 \in W$ існує таке керування $\alpha(x_0) \in W$, що для заданого $d_0 \in W$ збурене рівняння

$$z_0 = x_0,\ z_{n+1} = z_n + f_n(z_n) + \alpha(x_0), \quad n \in Z_k,\ z_k = d_0, \tag{2}$$

має розв’язок.

У даній роботі отримано аналогічні результати при менш обмежувальних умовах, які накладаються тільки на функції $\{f_n\}$. Для їхнього доведення використовується теорема Банаха про стискаючі відображення.

Про застосування отриманих результатів також див. [1, 2].

1. Продовження „вліво” розв’язків рівняння (1). Нехай $R > 0$, $d \in W$, $B := \{x \in W : \|x - d\| \le R\}$ і існує така стала $C > 0$, що для кожного $n \in Z_k$ функція $f_n : B \to W$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\forall x', x'' \in B :\ \|f_n(x') - f_n(x'')\| \le C\|x' - x''\|. \tag{3}$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

a_1) $\forall n \in Z_k \, \forall x \in B: \ \|f_n(x)\| \le \dfrac{R}{k}$;

a_2) стала C задовольняє нерівність $kC < 1$.

Тоді існує єдиний елемент x_0 у множині B, для якого виконуються рівності (1).

Доведення. Розглянемо банахів простір W^k з покоординатним додаванням і множенням елементів на скаляр та нормою

$$\|\bar{x}\|_k := \max_{0\le i\le k-1} \|x_i\|, \ \bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})^t \in W^k.$$

Покладемо $\bar{d} = (d, d, \dots, d)^t, \quad D := \{\bar{x} \in W^k : \|\bar{x} - \bar{d}\|_k \le R\}$,

$$\bar{F}(\bar{x}) := \{f_0(x_0), f_1(x_1), \dots, f_{k-1}(x_{k-1})\}^t, \ \bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})^t \in D.$$

Тоді система (1) еквівалентна такому рівнянню у просторі W^k:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{k-1} \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(x_0) \\ f_1(x_1) \\ \dots \\ f_{k-2}(x_{k-2}) \\ f_{k-1}(x_{k-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} I & -I & O & \dots & O & O \\ O & I & -I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I & -I \\ O & O & O & \dots & O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_0(x_0) \\ -f_1(x_1) \\ \dots \\ -f_{k-2}(x_{k-2}) \\ -f_{k-1}(x_{k-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ d \end{pmatrix},$$

а отже, (1) можна записати в такому еквівалентному вигляді:

$$\bar{x} = -A \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \bar{d}, \tag{4}$$

де $A : W^k \to W^k$ — лінійний неперервний оператор, який діє за правилом

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} I & I & I & \dots & I & I \\ O & I & I & \dots & I & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I & I \\ O & O & O & \dots & O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in W^k.$$

Зазначимо, що $\|A\| = k$. Покладемо $\bar{G} := -A\bar{F}(\bar{x}) + \bar{d}$, $\bar{x} \in D$. Відображення $\bar{G}$ діє з D в D, оскільки внаслідок умови a_1) для кожного $\bar{x} \in D$

$$\|\bar{G}(\bar{x}) - \bar{d}\|_k \le \|A\| \, \|\bar{F}(\bar{x})\|_k \le k \max_{0\le i\le k-1} \|f_i(x_i)\| \le R.$$

Доведемо, що $\bar{G}$ — відображення стиску. Справді, з урахуванням (3) та умови a$_2$)

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in D : \|\bar{G}(\bar{x}) - \bar{G}(\bar{y})\|_k = \|A(\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y}))\|_k \leq$$

$$\leq \|A\| \|\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})\|_k = k \max_{0 \leq i \leq k-1} \|f_i(x_i) - f_i(y_i)\| \leq kC \|\bar{x} - \bar{y}\|_k,$$

причому $kC < 1$.

Таким чином, до (4) можна застосувати теорему Банаха про стискаючі відображення.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Для виконання нерівності (3) досить, щоб f_i була диференційовною (за Фреше) у деякій відкритій множині, що містить B, і $\|f_i'(x)\| \leq C$ для кожного $x \in B$. У зв'язку з цим зазначимо, що в [1] аналогічний до теореми 1 результат доведено у випадку, коли окрім згадуваної вище умови на F' для кожного $i \in Z_k$ функція f_i є диференційовною, а f_i' задовольняє нерівність Ліпшиця в деякій кулі.

2. Керування і продовження „вліво" розв'язків збуреного рівняння. Нехай додатково $k > 1$, для кожного $i \in Z_k$ функція f_i діє з W в W і задовольняє нерівність (3) для довільних $x, y \in W$. Покладемо

$$L := \frac{k-1}{2} + \frac{(-1)^k - 1}{2k}.$$

Виконується така теорема.

Теорема 2. *Зафіксуємо $d \in W$. Якщо стала C з нерівності (3) задовольняє нерівність $LC < 1$, то для довільного $x_0 \in W$ знайдеться єдине керування $\alpha(x_0) \in W$ таке, що збурене рівняння (2) має розв'язок.*

Доведення. Нехай

$$\bar{S}(\bar{z}) := (f_1(z_1), \ldots, f_{k-1}(z_{k-1}))^t, \quad \bar{z} = (z_1, \ldots, z_{k-1})^t \in W^{k-1}.$$

Зафіксуємо $x_0 \in W$ і покладемо

$$\beta := x_0 + f_0(x_0), \quad \bar{\beta} := (\beta, \ldots, \beta, \beta + d)^t \in W^{k-1}.$$

Система (2) еквівалентна рівнянню

$$T\bar{z} = \bar{S}(\bar{z}) - \bar{\beta}, \tag{5}$$

яке розглядається в банаховому просторі $(W^{k-1}, \|\|_{k-1})$. Тут $T : W^{k-1} \to W^{k-1}$ — лінійний обмежений оператор, який діє за правилом

$$T\bar{z} := \begin{pmatrix} -2I & I & O & \ldots & O & O & O \\ -I & -I & I & \ldots & O & O & O \\ -I & O & -I & \ldots & O & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -I & O & O & \ldots & O & -I & I \\ -I & O & O & \ldots & O & O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \ldots \\ z_{k-2} \\ z_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{z} \in W^{k-1}.$$

Легко переконатись, що оператор T є неперервно оборотним, причому

$$T^{-1}\bar{z} := \frac{1}{k}\begin{pmatrix} -I & -I & -I & \dots & -I & -I & -I \\ (k-2)I & -2I & -2I & \dots & -2I & -2I & -2I \\ (k-3)I & (k-3)I & -3I & \dots & -3I & -3I & -3I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2I & 2I & 2I & \dots & 2I & -(k-2)I & -(k-2)I \\ I & I & I & \dots & I & I & -(k-1)I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ z_{k-2} \\ z_{k-1} \end{pmatrix},$$

$\bar{z} \in W^{k-1}$, а також $\|T^{-1}\| = L$. Тому (5) можна записати у еквівалентному вигляді

$$\bar{z} = T^{-1}(\bar{S}(\bar{z}) - \bar{\beta}). \tag{6}$$

Відображення

$$\Psi(\bar{z}) := T^{-1}(\bar{S}(\bar{z}) - \bar{\beta}) \tag{7}$$

є відображенням стиску на W^{k-1}, оскільки для довільних $\bar{z}, \bar{y} \in W^{k-1}$

$$\|\Psi(\bar{z}) - \Psi(\bar{y})\|_{k-1} \leq \|T^{-1}\|\|\bar{S}(\bar{z}) - \bar{S}(\bar{y})\|_{k-1} \leq LC\|\bar{z} - \bar{y}\|_{k-1},$$

причому $LC < 1$. Тому за теоремою Банаха про стискаючі відображення рівняння (6) має єдиний розв'язок $\bar{z}^* = (z_1^*, \dots, z_{k-1}^*)^t \in W^{k-1}$. Зокрема, єдиним чином знаходиться z_1^*, а отже і $\alpha(x_0) = z_1^* - \beta$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. В [1] теорему 2 доведено при більш обмежувальній умові $2kC < 1$.

Зазначимо, що при фіксованому $x_0 \in W$ для існування керування $\alpha(x_0)$ досить вимагати виконання нерівностей (3) не в усьому просторі W, а в деяких спеціально вибраних кулях. Для формулювання відповідного результату скористаємося позначеннями з доведення теореми 2. Зафіксуємо $R > 0$ і покладемо $\bar{\gamma} := T^{-1}\bar{\beta}$, $\widetilde{D} := \{\bar{z} \in W^{k-1} : \|\bar{z} - \bar{\gamma}\|_{k-1} \leq R\}$. Тоді $\widetilde{D} = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{k-1}$, де $D_i := \{x \in W : \|x - \gamma_i\| \leq R\}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})^t$.

Справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай для кожного $1 \leq i \leq k-1$ функція $f_i : D_i \to W$ задовольняє умови:*

b_1) $\forall x \in D_i : \ \|f_i(x)\| \leq \dfrac{R}{L}$;

b_2) існує таке $C > 0$, що $LC < 1$ і $\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq C\|x - y\|$ для довільних $x, y \in D_i$.

Тоді рівняння (6) має єдиний розв'язок у множині $\widetilde{D}$.

Доведення. Внаслідок умови b_1) визначене співвідношенням (7) відображення Ψ діє із $\widetilde{D}$ в $\widetilde{D}$. Із умови b_2) випливає, що Ψ — відображення стиску. Тому рівняння (6) має єдиний розв'язок у множині $\widetilde{D}$ за теоремою Банаха про стискаючі відображення.

Теорему 3 доведено.

3. Висновки. У цій статті отримано менш обмежувальні, ніж в [1, 2], достатні умови продовжуваності „вліво” розв'язків нелінійного різницевого рівняння в банаховому просторі, а також існування збуреного рівняння, для якого продовження завжди є можливим.

1. *Теплінський Ю. В., Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. — 2001. — Вип. 7. — С. 322 – 333.

2. *Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Доп. НАН України. — 2003. — № 7. — С. 27 – 33.

3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

Одержано 23.03.2007