УДК 517.946

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Б. П. Ткач, Л. Б. Урманчева

Міжрегіон. акад. управління персоналом
вул. Фрометівська, 2, Київ, 03039, Україна

We find sufficient conditions for existence of solutions of a two-point problem for more general systems of partial differential equations.

Установлены достаточные условия существования решений двухточечной задачи для более общих систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Вступ. Чисельно-аналітичний метод відшукання розв'язків двоточкової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь був розвинутий А. М. Самойленком і М. Й. Ронто [1].

Розширення чисельно-аналітичного методу на двоточкові задачі для систем рівнянь з частинними похідними було проведено в статтях Ю. О. Митропольського і Л. Б. Урманчевої [2, 3]. У даній роботі чисельно-аналітичний метод узагальнюється на більш широкі квазілінійні системи рівнянь з частинними похідними.

Постановка задачі і формулювання основних результатів. Розглядається система рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = P(t,x)u(t,x) + Q(t,x)u'_x(t,x) + f(t,x,u(t,x),u'_t(t,x)), \tag{1}$$

де $u, f \in E_n,\ P(t,x),\ Q(t,x)$ — неперервні $(n\times n)$-матриці, $0 \le t \le T,\ x \in [-a,a]$.

Вивчаються умови існування розв'язків системи рівнянь з частинними похідними (1), які задовольняють умови: двоточкову

$$A(x)u(0,x) + C(x)u(T,x) = \omega(x), \tag{2}$$

граничну

$$u(t,0) = u_0(t) + v(0) \tag{3}$$

і початкову

$$u(0,x) = u_0(0) + v(x). \tag{4}$$

У двоточковій умові $A(x),\ C(x)$ — неперервні $(n\times n)$-матриці при $x \in [-a,a]$. Вектор-функція $v(x)$ знаходиться в процесі відшукання розв'язку системи рівнянь (1). Вектор-функція $u_0(t)$ задана, неперервна зі своєю похідною, до того ж

$$|u_0(t)| \le \vec{N}, \qquad \left|u'_0(t)\right| \le \vec{N}_0. \tag{5}$$

Вектор-функція $\omega(x)$ задана, неперервна зі своєю похідною при $x \in [-a, a]$, до того ж

$$|\omega(x)| \leq \vec{L}, \qquad \left|\omega'(x)\right| \leq \vec{L^*}. \tag{6}$$

Векторні нерівності тут і далі розуміються в сенсі покомпонентних нерівностей.

Будемо припускати, що виконуються такі умови:

I. Вектор-функція $f(t, x, u, u_1)$ визначена і неперервна в області

$$\Omega\colon (t, x, u, u_1) \in [0, T] \times [-a, a] \times D \times D_1,$$

де $D,\ D_1$ — обмежені області $E_n,$ та задовольняє нерівність Ліпшиця

$$|f(t, x, \bar{u}_1, \bar{u}_2), -f(t, x, u_1, u_2)| \leq K_1\, |\bar{u}_1 - u_1| + K_2\, |\bar{u}_2 - u_2|\,, \tag{7}$$

до того ж $K_1,\ K_2$ — сталі матриці з невід'ємними елементами.

II. Виконуються нерівності

$$\begin{gathered} \left|P(t, x)u_0(t) + f(t, x, u_0(t), u_0'(t))\right| \leq \vec{M}_0, \\ \left|P(t, x)u(t, x) + Q(t, x)u_x'(t, x) + f(t, x, u(t, x), u_t'(t, x))\right| \leq \vec{M}. \end{gathered} \tag{8}$$

III. Елементи матриць $A'(x),\ C'(x)$ при $x \in [-a, a]$ є обмеженими неперервними похідними відповідно елементів матриць $A(x)$ і $C(x)$. Матриця $C(x)$ має обернену $(C(x))^{-1}$, і похідні її елементів є обмеженими неперервними функціями при $x \in [-a, a]$.

IV. При $x \in [-a, a]$ існує обернена матриця $\left[(C(x))^{-1}A(x) + E + Q_0(x)\right]^{-1}$, де E — одинична матриця, матриця

$$Q_0(x) = \int\limits_0^T Q(t, x)dt, \tag{9}$$

до того ж елементи матриці $Q_0(x)$ мають неперервні обмежені похідні і $Q_0(0) = 0$, а матриця S_0 має елементи, які є supremum модулів елементів оберненої матриці, тобто

$$S_0 = \left|\left[(C(x))^{-1}A(x) + E + Q_0(x)\right]^{-1}\right|_0. \tag{10}$$

V. При $x \in [-a, a]$ існує обернена матриця

$$\left[E - S_0 a \left|P_0(x) - Q_0'(x)\right|_0\right]^{-1}, \tag{11}$$

де

$$P_0(x) = \int\limits_0^T P(t, x)dt. \tag{12}$$

VI. У крузі одиничного радіуса знаходяться власні числа матриці

$$F = P^*\left(a\,\frac{T}{2}\,B + aTB_1\right) + Q^*TB + K_1\left(a\,\frac{T}{2}\,B + aTB_1 + S^*aT\right) + K_2aB, \tag{13}$$

де елементи матриць P^* і Q^* визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \{P^*\}_{ij} &= \sup_{t,x} \left|\{P(t,x)\}_{ij}\right|, \\ \{Q^*\}_{ij} &= \sup_{t,x} \left|\{Q(t,x)\}_{ij}\right|, \end{aligned} \tag{14}$$

а матриці B і B_1 — рівностями

$$B = E + P^* S^* aT + Q^* T S_0 L_1^{(1)}, \tag{15}$$

$$B_1 = \left|\left[C^{-1}(x)A(x) + E\right]\right|_0 S^*. \tag{16}$$

Тут

$$\begin{gathered} S^* = \left|\left\{E - aS_0 \left|P_0(x) - Q_0'(x))\right|_0 \right\}^{-1}\right|_0 S_0, \\ L_1^{(1)} = E + \left[R^* + P^*\right] S^* a, \qquad R^* = \left|\left(C^{-1}(x)A(x)\right)'\right|_0. \end{gathered} \tag{17}$$

Розглянемо послідовні наближення у вигляді

$$\begin{gathered} u_0(t,x) = u_0(t) + v_0(x), \\ u_{n+1}(t,x) = u_0(t) + \sum_{i=0}^{n+1} v_i(x) \\ + \int_0^x \int_0^t \left[P(\xi,\eta)u_n(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)u'_{n\eta}(\xi,\eta) + \right. \\ \left. + f\left(\xi,\eta,\tilde{u}_n(\xi,\eta),\tilde{u}'_{n\xi}(\xi,\eta)\right)\right] d\xi\, d\eta + \alpha_n(x)t, \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$\tilde{u}_n(t,x) = u_n(t,x) - v_n(x). \tag{19}$$

Виберемо $\alpha_n(x)$ із умови так, щоб виконувалася двоточкова умова

$$A(x)\tilde{u}_{n+1}(0,x) + C(x)\tilde{u}_{n+1}(T,x) = \omega(x). \tag{20}$$

Тоді одержимо

$$\begin{gathered} \alpha_n(x) = -\frac{1}{T} \int_0^x \int_0^T \left[P(\xi,\eta)u_n(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)u'_{n\eta}(\xi,\eta) + \right. \\ \left. + f\left(\xi,\eta,\tilde{u}_n(\xi,\eta),\tilde{u}'_{n\xi}(\xi,\eta)\right)\right] d\xi\, d\eta + \end{gathered}$$

$$+\frac{1}{T}\left\{C^{-1}(x)\left(\omega(x)-A(x)\left[u_0(0)+v_0(x)+\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\right]\right)-\right.$$

$$\left.-u_0(T)-\sum_{i=0}^{n}v_i(x)\right\}. \tag{21}$$

Підставляючи $\alpha_n(x)$ у (18), отримуємо [2, 3]

$$u_0(t,x)=u_0(t)+v_0(x),$$

$$u_{n+1}(t,x)=u_0(t)+\sum_{i=0}^{n+1}v_i(x)+\int_0^x\int_0^t\{[P(\xi,\eta)u_n(\xi,\eta)+$$

$$+Q(\xi,\eta)u'_{n\eta}(\xi,\eta)+f\left(\xi,\eta,\tilde{u}_n(\xi,\eta),\tilde{u}'_{n\xi}(\xi,\eta)\right)\right]-$$

$$-\overline{\left[P(\xi,\eta)u_n(\xi,\eta)+Q(\xi,\eta)u'_{n\eta}(\xi,\eta)\right.+}$$

$$\left.\overline{+f\left(\xi,\eta,\tilde{u}_n(\xi,\eta),\tilde{u}'_{n\xi}(\xi,\eta)\right)\right]}\Bigg\}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\frac{t}{T}\left\{C^{-1}(x)\left(\omega(x)-A(x)\left[u_0(0)+v_0(x)+\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\right]\right)-\right.$$

$$\left.-u_0(T)-\sum_{i=0}^{n}v_i(x)\right\},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

$$\bar{f}=\frac{1}{T}\int_0^T f\,dt.$$

Вектор-функції $v_i(x)$ вибираємо з умови таким чином, щоб $\alpha_i(x)=0,\ i=0,1,2,\ldots,$ тобто виконувалася двоточкова умова (20).

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай права частина системи рівнянь з частинними похідними (1) – (4) задовольняє умови I – VI. Тоді існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1) – (4), який є рівномірною границею при* $n\to\infty$, $(t,x)\in[0,T]\times[-a,a]$ *послідовності функцій (22) і задовольняє також систему інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними*

$$u(t,x)=u_0(t)+v(x)+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\left[P(\xi,\eta)u(\xi,\eta)+Q(\xi,\eta)u'_\eta(\xi,\eta)+\right.$$

$$\left.+f\left(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u'_\xi(\xi,\eta)\right)\right]d\xi\,d\eta, \tag{23}$$

до того ж вектор-функція $v(x)$ є рівномірною при $x \in [-a, a]$ границею послідовності

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} v_i(x) \right\}.$$

Доведення. Для встановлення рівномірної збіжності послідовності наближень (22) оцінюємо поступово різниці

$$u_1(t,x) - u_0(t,x), u_2(t,x) - u_1(t,x), \ldots, u_{n+1}(t,x) - u_n(t,x)$$

та їх частинні похідні по t і x. Для оцінювання вектор-функції $v_0(x)$ і її похідної із співвідношення (21) при $n = 0$ одержуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\int_0^x \int_0^T Q(\xi,\eta) v_0'(\eta) d\xi\, d\eta + \int_0^x \int_0^T P(\xi,\eta) v_0(\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= C^{-1}(x) \left(\omega(x) - A(x)[u_0(0) + v_0(x)]\right) -$$

$$- u_0(T) - v_0(x) - \int_0^x \int_0^T f\left(\xi, \eta, u_0(\xi), u_0'(\xi)\right)\, d\xi\, d\eta -$$

$$- \int_0^x \int_0^T P(\xi,\eta) u_0(\xi)\, d\xi\, d\eta. \tag{24}$$

Враховуючи позначення (9) і (12), систему рівнянь (24) записуємо у вигляді

$$\int_0^x Q_0(\eta) v_0'(\eta) d\eta + \int_0^x P_0(\eta) v_0(\eta) d\eta + \left[C^{-1}(x) A(x) + E\right] v_0(x) = C^{-1}(x) \psi_0(x), \tag{25}$$

де

$$\psi_0(x) = \omega(x) - A(x) u_0(0) - C(x) u_0(T) -$$

$$- C(x) \int_0^x \int_0^T \left[P(\xi,\eta) u_0(\xi) + f(\xi,\eta,u_0(\xi),u_0'(\xi))\right]\, d\xi\, d\eta.$$

Оскільки $Q_0(0) = 0$ і

$$\int_0^x Q_0(\eta) v_0'(\eta) d\eta = Q_0(x) v_0(x) - \int_0^x Q_0'(\eta) v_0(\eta) d\eta,$$

то система рівнянь для знаходження $v_0(x)$ набирає вигляду

$$\left(C^{-1}(x) A(x) + E + Q_0(x)\right) v_0(x) = - \int_0^x \left(P_0(\eta) - Q_0'(\eta)\right) v_0(\eta) d\eta + C^{-1}(x) \psi_0(x). \tag{26}$$

Використовуючи нерівності (5), (6), (8), для оцінки $\psi_0(x)$ одержуємо

$$|\psi_0(x)|_0 = \sup_{x\in[-a,a]} |\psi_0(x)| \leq \vec{L} + (A_0 + C_0)\vec{N} + C_0 aT\vec{M}_0, \tag{27}$$

де

$$A_0 = \sup_{x\in[-a,a]} |A(x)|, \qquad C_0 = \sup_{x\in[-a,a]} |C(x)|.$$

Тоді з рівняння (26) і нерівності (27) випливає, що

$$|v_0(x)| \leq \vec{L_0}, \tag{28}$$

до того ж

$$\vec{L}_0 = \left| \left[E - S_0 a \left| P_0(x) - Q_0'(x) \right|_0 \right]^{-1} \right|_0 S_0 \left| C^{-1}(x) \right|_0 \left[\vec{L} + (A_0 + C_0)\, \vec{N} + C_0 aT\vec{M}_0 \right]$$

і

$$\left| C^{-1}(x) \right|_0 = \sup_{x\in[-a,a]} \left| C^{-1}(x) \right|.$$

Знаходячи похідну по x від правої і лівої частин рівняння (25), для похідної $v_0'(x)$ отримуємо співвідношення

$$\left(Q_0(x) + C^{-1}(x)A(x) + E \right) v_0'(x) + \left\{ P_0(x) + \left[C^{-1}(x)A(x) \right]_x' \right\} v_0(x) = \left[C^{-1}(x)\psi_0(x) \right]_x'. \tag{29}$$

Із системи рівнянь (29), співвідношення (10) і нерівності (28) маємо оцінку

$$\left| v_0'(x) \right| \leq S_0 \left\{ \left| \left[C^{-1}(x)\psi_0(x) \right]_x' \right|_0 + \left| P_0(x) + \left[C^{-1}(x)A(x) \right]_x' \right|_0 \vec{L_0} \right\} = \vec{L}_0^{(1)},$$

де

$$\left| \left[C^{-1}(x)\psi_0(x) \right]_x' \right|_0 = \sup_{x\in[-a,a]} \left| \left[C^{-1}(x)\psi_0(x) \right]_x' \right|$$

та елементи матриці $\left| P_0(x) + \left[C^{-1}(x)\psi_0(x) \right]_x' \right|_0$ є supremum модулів елементів матриці $P_0(x) + \left[C^{-1}(x)\psi_0(x) \right]_x'$.

Із (22), (19), враховуючи нерівності (5), (6), (8), (28), для різниці $\tilde{u}_1(t,x) - u_0(t,x)$ одержуємо оцінку

$$|\tilde{u}_1(t,x) - u_0(t,x)| \leq a\alpha(t)\vec{M} + \vec{R}, \tag{30}$$

де

$$\alpha(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \qquad \vec{R} = C_0^{-1}\vec{L} + \left(C_0^{-1}A_0 + E \right)\left(\vec{N} + \vec{L}_0 \right),$$

до того ж елементи матриць C_0^{-1} і A_0 визначаються співвідношеннями

$$\left(C_0^{-1} \right)_{ij} = \sup_{x\in[-a,a]} \left| \left(C^{-1}(x) \right)_{ij} \right|,$$

$$(A_0)_{ij} = \sup_{x\in[-a,a]} |(A(x))_{ij}|.$$

Для знаходження оцінок частинних похідних використовуємо (18) і умову $\alpha_0(x) = 0$. Тоді

$$\left|\tilde{u}'_{1t}(t,x) - u'_{0t}(t,x)\right| \le a\vec{M}, \qquad \left|\tilde{u}'_{1x}(t,x) - u'_{0x}(t,x)\right| \le T\vec{M}. \tag{31}$$

Розглядаючи різницю $\alpha_n(x) - \alpha_{n-1}(x)$ і враховуючи, що $Q_0(0) = 0$, одержуємо систему інтегральних рівнянь для знаходження вектор-функції $v_n(x),\ n = 1, 2, \ldots,$ у вигляді

$$\left(C^{-1}(x)A(x) + Q_0(x) + E\right) v_n(x) + \int\limits_0^x \left(P_0(\eta) - Q'_0(\eta)\right) v_n(\eta) d\eta = \psi_n(x), \tag{32}$$

де

$$\begin{aligned}\psi_n(x) = &-\int\limits_0^x \int\limits_0^T P(\xi,\eta)\left(\tilde{u}_n(\xi,\eta) - u_{n-1}(\xi,\eta)\right) d\xi\, d\eta - \\ &-\int\limits_0^x \int\limits_0^T Q(\xi,\eta)\left(\tilde{u}'_{n\eta}(\xi,\eta) - u'_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\right) d\xi\, d\eta - \\ &-\int\limits_0^x \int\limits_0^T \Big[f\big(\xi,\eta,\tilde{u}_n(\xi\eta),\tilde{u}'_{n\xi}(\xi,\eta)\big) - \\ &- f\Big(\xi,\eta,\tilde{u}_{n-1}(\xi,\eta),\tilde{u}'_{(n-1)\xi}(\xi,\eta)\Big)\Big]\, d\xi\, d\eta.\end{aligned} \tag{33}$$

Для оцінки $v'_n(x),\ n = 1, 2, \ldots,$ одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\left(C^{-1}(x)A(x) + Q_0(x) + E\right) v'_n(x) = \psi'_n(x) - \Big[\left(C^{-1}(x)A(x)\right)' + P_0(x)\Big] v_n(x). \tag{34}$$

Із співвідношення (33) при $n = 1$, оцінок (7), (14), (30) і (31) випливає, що

$$|\psi_1(x)| \le aT\vec{D}, \qquad \left|\psi'_1(x)\right| \le T\vec{D},$$

де

$$\vec{D} = P^*\left(a\frac{T}{2}\vec{M} + \vec{R}\right) + Q^*T\vec{M} + K_1\left(a\frac{T}{2}\vec{M} + \vec{R} + \vec{L}_0\right) + K_2 a\vec{M}.$$

Тоді маємо

$$|v_1(x)| \le S^* aT\vec{D} \tag{35}$$

і

$$\left|v'_1(x)\right| \le S_0 L_1^{(1)} T\vec{D}, \tag{36}$$

де S^* і $L_1^{(1)}$ визначені в (17). Використовуючи нерівності (31), (35), (36), для різниці $\tilde{u}_2(t,x) - u_1(t,x)$ із (22) отримуємо оцінки

$$|\tilde{u}_2(t,x) - u_1(t,x)| \le a\alpha(t)\vec{D}^* + \left|\left[C^{-1}(x)A(x) + E\right]\right|_0 S^* aT\vec{D},$$

$$\left|\tilde{u}'_{2t}(t,x) - u'_{1t}(t,x)\right| \le a\vec{D}^*, \tag{37}$$

$$\left|\tilde{u}'_{2x}(t,x) - u'_{1x}(t,x)\right| \le T\vec{D}^*,$$

до того ж

$$\vec{D}^* = P^*\left(a\,\frac{T}{2}\,\vec{M} + \vec{R} + S^*aT\vec{D}\right) + Q^*\left(T\vec{M} + S_0L_1^{(1)}T\vec{D}\right) +$$

$$+ K_1\left(a\,\frac{T}{2}\,\vec{M} + \vec{R} + \vec{L}_0\right) + K_2a\vec{M}. \tag{38}$$

За допомогою нерівностей (37) із співвідношення (33) при $n = 2$ маємо оцінку

$$|\psi_2(x)|_0 \le aT\vec{G}, \qquad \left|\psi'_2(x)\right|_0 \le T\vec{G},$$

де

$$\vec{G} = \left(P^*a\,\frac{T}{2} + Q^*T + a\left(K_1\,\frac{T}{2} + K_2\right)\right)\vec{D}^* +$$

$$+ aT\left[(P^* + K_1)\left|\left(C^{-1}(x)A(x) + E\right)\right|_0 + K_1\right]S^*\vec{D}. \tag{39}$$

Тоді з (32) і (34) знаходимо

$$\begin{aligned} |v_2(x)|_0 &\le S^*aT\vec{G}, \\ |v'_2(x)|_0 &\le S_0L_1^{(1)}T\vec{G}. \end{aligned} \tag{40}$$

Із співвідношень (22) за допомогою нерівностей (35), (37), (40) і співвідношень (38), (39) для різниці $\tilde{u}_3(t,x) - u_2(t,x)$ та її похідних одержуємо оцінки

$$|\tilde{u}_3(t,x) - u_2(t,x)| \le a\alpha(t)B\vec{G} + aTB_1\vec{G},$$

$$\left|\tilde{u}'_{3t}(t,x) - u'_{2t}(t,x)\right| \le aB\vec{G}, \tag{41}$$

$$\left|\tilde{u}'_{3x}(t,x) - u'_{2x}(t,x)\right| \le TB\vec{G},$$

причому матриці B і B_1 визначаються рівностями (15) і (16). Використовуючи вираз (33) для $\psi_n(x)$, систему інтегральних рівнянь (32) для знаходження $v_n(x)$ та оцінки (41), маємо

$$|\psi_n(x)|_0 \le aTF^{n-2}\vec{G}, \qquad \left|\psi'_n(x)\right|_0 \le TF^{n-2}\vec{G}, \tag{42}$$

$$|v_n(x)|_0 \le S^*aF^{n-2}\vec{G}, \qquad \left|v'_n(x)\right|_0 \le S_0L_1^{(1)}TF^{n-2}\vec{G}, \quad n = 3,4,\ldots, \tag{43}$$

причому матриця F визначена рівністю (13). Тоді для різниці $\tilde{u}_{n+1}(t,x) - u_n(t,x)$ та її похідних отримуємо оцінки

$$|\tilde{u}_{n+1}(t,x) - u_n(t,x)| \le a\,\frac{T}{2}\,BF^{n-2}\vec{G} + aTB_1F^{n-2}\vec{G},$$

$$\left|\tilde{u}'_{(n+1)t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\right| \le aBF^{n-2}\vec{G}, \tag{44}$$

$$\left|\tilde{u}'_{(n+1)x}(t,x) - u'_{nx}(t,x)\right| \le TBF^{n-2}\vec{G}.$$

Враховуючи оцінки (43) і (44), знаходимо

$$|u_{n+k}(t,x) - u_n(t,x)| \le a\,\frac{T}{2}\,BF^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}F^i\vec{G} + aTB_1F^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}F^i\vec{G} + S^*aTF^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}F^i\vec{G},$$

$$\left|u'_{(n+k)x}(t,x) - u'_{nx}(t,x)\right| \le TBF^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}F^i\vec{G} + S_0L_1^{(1)}TF^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}F^i\vec{G}, \tag{45}$$

$$\left|u'_{(n+k)t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\right| \le aBF^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}F^i\vec{G}.$$

Із нерівностей (43) бачимо, що виконуються оцінки

$$\sum_{i=2}^{n}|v_i(x)| \le S^*aT\sum_{k=0}^{n-2}F^k\vec{G}, \quad \sum_{i=2}^{n}\left|v'_i(x)\right| \le S_0L_1^{(1)}T\sum_{k=0}^{n-2}F^k\vec{G}. \tag{46}$$

Із нерівностей (45) і умови VI випливає рівномірна при $(t,x) \in [0,T]\times[-a,a]$ збіжність послідовних наближень $u_n(t,x)$ та їхніх частинних похідних.

Рівномірна при $x \in [-a,a]$ збіжність послідовності функцій

$$\left\{\sum_{i-0}^{n} v_i(x)\right\}$$

та їхніх похідних

$$\left\{\sum_{i-0}^{n} v'_i(x)\right\}$$

випливає з нерівностей (46) і умови VI.

Переходячи до границі в (18) і (20) при $n \to \infty$, легко переконатися, що гранична функція $u_\infty(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x)$ задовольняє систему інтегро-диференціальних рівнянь (23) і двоточкову умову (2). Із нерівностей (45) при $k \to \infty$ отримуємо оцінки різниці між шуканим розв'язком і його n-м наближенням:

$$|u_\infty(t,x) - u_n(t,x)| \le a\,\frac{T}{2}\,BF^{n-2}(E-F)^{-1}\vec{G} + aTB_1F^{n-2}(E-F)^{-1}\vec{G} +$$

$$+ S^*aTF^{n-1}(E-F)^{-1}\vec{G},$$

$$\left|u'_{\infty t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\right| \le aTBF^{n-2}(E-F)^{-1}\vec{G},$$

$$\left|u'_{\infty x}(t,x) - u'_{nx}(t,x)\right| \le TBF^{n-2}(E-F)^{-1}\vec{G} + S_0L_1^{(1)}TF^{n-1}(E-F)^{-1}\vec{G}.$$

Для доведення єдиності розв'язку системи рівнянь із частинними похідними (1), який задовольняє двоточкову умову (2) та умови (3), (4), припускаємо, що існують два розв'язки $u(t,x)$ та $z(t,x)$. Вони задовольняють систему інтегро-диференціальних рівнянь (23) та двоточкову умову (2) і можуть бути записані у вигляді

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = {} & u_0(t) + v(x) + \\
& + \int_0^x \int_0^t \Big\{ \big[P(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)u'_\eta(\xi,\eta) + f\left(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u'_\xi(\xi,\eta)\right) \big] - \\
& - \overline{\Big[P(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)u'_\eta(\xi,\eta) + f\Big(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u'_\xi(\xi,\eta)\Big) \Big]} \Big\} d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{t}{T} \left\{ C^{-1}(x) \left(\omega(x) - A(x)[u_0(0) + v(x)] \right) - u_0(T) - v(x) \right\}, \\
z(t,x) = {} & u_0(t) + v(x) + \\
& + \int_0^x \int_0^t \Big\{ \big[P(\xi,\eta)z(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)z'_\eta(\xi,\eta) + f\left(\xi,\eta,z(\xi,\eta),z'_\xi(\xi,\eta)\right) \big] - \\
& - \overline{\Big[P(\xi,\eta)z(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)z'_\eta(\xi,\eta) + f\Big(\xi,\eta,z(\xi,\eta),z'_\xi(\xi,\eta)\Big) \Big]} \Big\} d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{t}{T} \left\{ C^{-1}(x) \left(\omega(x) - A(x)[u_0(0) + v(x)] \right) - u_0(T) - v(x) \right\}.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Тоді, використовуючи співвідношення (14) і нерівність (7), із (47) отримуємо оцінки

$$
\begin{gathered}
|u(t,x) - z(t,x)| \le a\,\frac{T}{2}\,\vec{S}_1, \\
\left| u'_t(t,x) - z'_t(t,x) \right| \le a\vec{S}_1, \\
\left| u'_x(t,x) - z'_x(t,x) \right| \le T\vec{S}_1,
\end{gathered}
\tag{48}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\vec{S}_1 = {} & P^*|u(t,x) - z(t,x)|_0 + Q^* \left| u'_x(t,x) - z'_x(t,x) \right|_0 + \\
& + K_1|u(t,x) - z(t,x)|_0 + K_2 \left| u'_\xi(t,x) - z'_\xi(t,x) \right|_0 .
\end{aligned}
$$

Враховуючи структуру матриць F і B із (13) і (15) та оцінки (48), після n ітерацій маємо нерівності

$$
\begin{gathered}
|u(t,x) - z(t,x)| \le a\,\frac{T}{2}\,F^{n-1}\vec{S}_1, \\
\left| u'_t(t,x) - z'_t(t,x) \right| \le aF^{n-1}\vec{S}_1,
\end{gathered}
\tag{49}
$$

$$\left|u'_x(t,x) - z'_x(t,x)\right| \leq TF^{n-1}\vec{S}_1.$$

При $n \to \infty$ із оцінок (49) і умови VI випливають рівності

$$u(t,x) \equiv z(t,x),$$

$$u'_t(t,x) \equiv z'_t(t,x),$$

$$u'_x(t,x) \equiv z'_x(t,x),$$

тобто єдиність розв'язку задачі (1) – (4).

Теорему доведено.

Література

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
2. *Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б.* О двухточечной задаче для систем гиперболического типа // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 12. – С. 1657 – 1663.
3. *Урманчева Л. Б.* Двухточечные и многоточечные задачи для систем уравнений с частными производными гиперболического типа. – Киев, 1992. – 40 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики).

Одержано 22.09.17