УДК 517.9

КВАЗІПЕРІОДИЧНІ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА В ПОЛІ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ*

І. О. Парасюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. Акад. Глушкова, 4, Київ, 03680, Україна
e-mail: pio@univ.kiev.ua,
ioparasyuk@gmail.com

The paper deals with a natural Lagrangian system which governs the motion of a rigid body under the action of superposition of two potential force fields. The first one is a stationary field with quadratic potential, and the potential of the second one is space-linear and quasiperiodically dependend on time. We find sufficient conditions under which such a system has a classical hyperbolic quasiperiodic solution locally minimizing the time-averaged Lagrangian.

Рассматривается натуральная лагранжева система, описывающая движение твердого тела под действием суперпозиции двух потенциальных силовых полей. Первое поле стационарно и имеет квадратичный потенциал, а потенциал второго — пространственно линеен и квазипериодически зависисит от времени. Установлены достаточные условия, при выполнении которых такая система имеет классическое гиперболическое квазипериодическое решение, локально минимизирующее усредненный по времени лагранжиан.

1. Вступ. Квазіперіодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь є одним із важливих об'єктів дослідження нелінійної динаміки [1–3]. У цій роботі досліджується задача існування квазіперіодичних розв'язків системи, що описує рухи твердого тіла в евклідовому просторі $\mathbb{E}^3$ під дією суперпозиції потенціальних полів двох типів. Поле першого типу стаціонарне і визначається квадратичним „гравітаційним потенціалом”

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} B\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x},$$

де $B\colon \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{E}^3$ — невироджений знаковизначений оператор, $\mathbf{g} \in \mathbb{E}^3$ — сталий вектор, а крапкою позначено операцію скалярного добутку в $\mathbb{E}^3$. Такий потенціал виникає як апроксимація ньютонівського гравітаційного потенціалу, створеного віддаленими тілами [4–8]. Друге поле — квазіперіодичне за часом t і породжене просторово лінійним потенціалом

$$\Phi_2(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{F}(t\omega) \cdot \mathbf{x},$$

де $\mathbf{F}(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^3$ — гладке відображення k-вимірного тора $\mathbb{T}^k := \mathbb{R}^k/2\pi\mathbb{Z}^k$, а $\omega \in \mathbb{R}^k$ — вектор частот з раціонально незалежними компонентами. Це поле можна інтерпретувати як просторово однорідне змінне в часі електричне поле, яке діє на заряди, розподілені в тілі. Без обмеження загальності міркувань вважаємо, що відображення $\mathbf{F}(\cdot)$ має нульове

* Виконано за підтримки МОН України (проект № 0116U004752).

середнє

$$\bar{\mathbf{F}} := (2\pi)^{-k} \int\limits_{\mathbb{T}^k} \mathbf{F}(\varphi) d\varphi = 0,$$

оскільки ненульове середнє можна вважати врахованим у векторі $\mathbf{g}$. Описана механічна система є натуральною лагранжевою системою, конфігураційним простором якої є $\mathbb{R}^3 \times \times \mathrm{SO}(3)$.

Природно виникає питання про існування в такій системі вимушених квазіперіодичних коливань з вектором частот ω. Відомо [6, 7], що у випадку $\mathbf{F} \equiv 0$ ця система є інтегровною, тому для розв'язання сформульованої задачі в рамках теорії збурень ($\|\mathbf{F}\| \ll 1$) можна застосувати апарат КАМ-теорії (див., наприклад, [1, 9]). Однак при такому підході доводиться накладати жорсткі умови на мализну збурення, а також діофантові умови несумірності на вектор частот. Зазначимо, що методами КАМ-теорії квазіперіодичні рухи твердого тіла досліджувалися, зокрема, в [10, 11].

Поза рамками теорії збурень задача існування узагальнених та класичних майже періодичних (зокрема, квазіперіодичних) розв'язків лагранжевих систем в евклідовому просторі вивчалася багатьма авторами за допомогою варіаційних методів, методів опуклого аналізу та методів теорії монотонних операторів. Відповідні результати та посилання можна знайти, наприклад, у [12–26]. У роботах [27–29] розглядалася натуральна лагранжева система на рімановому многовиді $\mathcal{M}$ з рімановою метрикою $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для такої системи було встановлено достатні умови існування узагальнених квазіперіодичних за Безіковичем розв'язків, які є екстремалями усередненого лагранжіана

$$\bar{\mathcal{L}}[x(\cdot)] := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \left[\frac{\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle}{2} - \Pi(t, x(t)) \right] dt, \tag{1}$$

де $\Pi(\cdot, \cdot) \colon \mathbb{R} \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ — потенціальна енергія, що квазіперіодично залежить від часу. У [28] позитивну відповідь на питання про те, чи є ці розв'язки класичними, було отримано лише для систем на ріманових многовидах недодатної кривини. В [30, 31] від вимоги недодатності кривини вдалося відмовитися, наклавши жорсткіші умови монотонності досліджуваної системи.

У [29] досліджувалася, зокрема, задача про вимушені квазіперіодичні коливання сферичного маятника — лагранжевої натуральної механічної системи, конфігураційним простором якої є сфера

$$\mathbb{S}^2 := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\},$$

а власна потенціальна енергія та потенціальна енергія квазіперіодичного зовнішнього збудження відповідно мають вигляд

$$\Pi_0(\mathbf{x}) = g \cdot (x_3 - 1), \quad \Pi_1(t, \mathbf{x}) = a(t\omega) \sum_{i=1}^{3} b_i x_i,$$

де $g = \mathrm{const} > 0$, $b_i = \mathrm{const}$, $b_3 > 0$,

$$a(\cdot)\colon \in \mathrm{C}^\infty\left(\mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{R}\right), \quad \max_{\varphi\in\mathbb{T}^k} |a(\varphi)| = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{T}^k} a(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Було показано, що нерівність $g \geq 2{,}42 \max\left\{\sqrt{b_1^2+b_2^2}, b_3\right\} + b_3$ гарантує існування вимушених квазіперіодичних коливань $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*(t\omega)$, де відображення $\mathbf{x}_*(\cdot)\colon \mathrm{C}\left(\mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{S}^2\right)$ набуває значень у „верхній” півсфері $\mathbb{S}^2 \cap \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_3 \geq 0\right\}$, причому функція $t \mapsto \mathbf{x}_*(t\omega)$ мінімізує відповідний усереднений лагранжіан вигляду (1), де $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$. У [31] встановлено умови існування експоненціально дихотомічного квазіперіодичного розв'язку системи, що описує рух зарядженої частинки по одиничній сфері під впливом суперпозиції трьох силових полів: поля кулонівського потенціалу, квазіперіодичних у часі електричного та магнітного полів.

У цій роботі ми одержимо аналогічні результати щодо динаміки твердого тіла в полі потенціалу $\Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(t\omega, \mathbf{x})$. Неважко переконатися в тому (див. наведене нижче твердження 1), що рух твердого тіла в полі такого потенціалу є суперпозицією двох рухів: руху його центра інерції $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ та обертального руху навколо центра інерції $t \mapsto R(t) \in \mathrm{SO}(3)$. Ми покажемо (теорема 1), що при виконанні низки умов існує квазіперіодичний обертальний рух твердого тіла, що описується гіперболічним квазіперіодичним розв'язком лагранжевої системи на многовиді версорів (кватерніонів, модуль яких дорівнює 1). Цей розв'язок у класі квазіперіодичних функцій із частотним базисом ω є екстремаллю усередненого лагранжіана обертальних рухів

$$\bar{\mathcal{L}}_{\mathrm{rot}}[R(\cdot)] := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \left[\mathrm{K}_{\mathrm{rot}}(\dot{R}(t)) - \Pi_{\mathrm{rot}}(t, R(t))\right] dt, \tag{2}$$

де $\mathrm{K}_{\mathrm{rot}}(\cdot)\colon T\mathrm{SO}(3) \mapsto \mathbb{R}_+$ та $\Pi_{\mathrm{rot}}(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}\times\mathrm{SO}(3)$ — кінетична та потенціальна енергії обертального руху тіла навколо його центра інерції. Гіперболічність розв'язку означає, що система у варіаціях відносно нього є експоненціально дихотомічною на всій часовій осі. Зазначимо, що умови теореми 1 пов'язують між собою певну характеристику опуклості потенціальної енергії, моменти інерції тіла, власні числа оператора B, ріманову секційну кривину многовиду версорів, наділеного лівоінваріантною метрикою, асоційованою з $\mathrm{K}_{\mathrm{rot}}$, та амплітуду „електричного” поля.

2. Лагранжіан системи у кватерніонних параметрах Родріга – Гамільтона. Для опису руху тіла скористаємося кватерніонними параметрами Родріга – Гамільтона (див., наприклад, [7, 8]). Нехай $\mathbb{H}$ — тіло кватерніонів, $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^3$ — базис в $\mathbb{H}$, елементи якого характеризуються рівностями

$$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_k^2 = -\mathbf{e}_0, \quad k = 1, \ldots, 3,$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

Умовимося довільний кватерніон $q = \sum_{k=0}^3 q_k\mathbf{e}_k$ записувати у вигляді

$$q = q_0 + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} := \sum_{k=1}^3 q_k\mathbf{e}_k,$$

суто уявний кватерніон $\mathbf{q}$ називати вектором, для спряженого до q кватерніона використовувати позначення $q^* := q_0 - \mathbf{q}$, а через $|q| := \sqrt{qq^*} = \sqrt{\sum_{k=0}^{3} q_k^2}$ позначати модуль кватерніона q. Кватерніон q є вектором тоді і лише тоді, коли $q^* = -q$. Відомо, що $|pq| = |p|\,|q|$ (див., наприклад, [32]). Домовимося також використовувати позначення

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := -\frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$$

для скалярного та векторного добутку векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ відповідно. Тоді

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{3}$$

Простір векторів природно ототожнювати з евклідовим простором $\mathbb{E}^3$, наділеним крім скалярного добутку $\cdot$ векторним добутком $\times$.

Нагадаємо, що елементи множини $\mathbb{H}_1 := \{q \in \mathbb{H} \colon |q| = 1\}$, дифеоморфної 3-сфері $\mathbb{S}^3$, називають версорами. Вони характеризуються властивістю $q^{-1} = q^*$ і утворюють групу відносно операції добутку, ізоморфну групі $\mathrm{SU}(2)$, яка є універсальним дволистим накриттям групи $\mathrm{SO}(3)$. Для кожного версора q відповідність

$$\mathbf{a} \mapsto Q(q)\mathbf{a} := q\mathbf{a}q^*$$

визначає ортогональне перетворення простору $\mathbb{E}^3$, а відображення

$$Q(\cdot) \colon \mathbb{H}_1 \mapsto \mathrm{SO}(3)$$

є гомоморфізмом, причому $Q(p) = Q(q)$ тоді й лише тоді, коли $p = \pm q$ (див., наприклад, [32]). Очевидно, що

$$Q(q)\mathbf{a} \cdot Q(q)\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad Q(q)\mathbf{a} \times Q(q)\mathbf{b} = Q(q)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Нехай $\dot{q} \in T_q\mathbb{H}_1$ — дотичний вектор (вектор миттєвої швидкості) кривої на $\mathbb{H}_1$, випущеної з точки q. З рівностей $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(q^*q) = q^*\dot{q} + \dot{q}^*q = 0$, $(q^*\dot{q})^* = \dot{q}^*q = -q^*\dot{q}$ випливає, що

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(\dot{q}) := 2q^*\dot{q} \tag{4}$$

є суто уявним кватерніоном, який називають вектором кутової швидкості. Легко перевіряються використовувані в подальшому рівності

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q(q)\mathbf{a} = Q(q)(\mathbf{\Omega}(\dot{q}) \times \mathbf{a}), \tag{5}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q^{-1}(q)\mathbf{a} = \left[Q^{-1}(q)\mathbf{a}\right] \times \mathbf{\Omega}(\dot{q}). \tag{6}$$

Вільне тверде тіло трактуємо як континуальну систему точок із голономними в'язями, заданими рівнянням

$$\mathbf{x} = Q(q)\mathbf{y} + \mathbf{r}$$

у нерухомому просторі $\mathbb{E}^3$. Тут вектори $\mathbf{y}$ пробігають замкнену область $\bar{D}$ рухомого простору, жорстко зв'язаного з тілом, і, отже, „нумерують" точки тіла, не змінюючись у процесі руху; вектор $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3$ визначає положення центра інерції тіла у нерухомому просторі; ортогональне перетворення $R = Q(q)$, де $q \in \mathbb{H}_1$, визначає орієнтацію тіла у просторі.

Таким чином, пара $(q, \mathbf{r})$ відіграє роль параметрів в'язі — узагальнених координат. З урахуванням формули (5) миттєву швидкість точки тіла з „номером" $\mathbf{y}$ можна подати у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}} == Q(q)\,(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}) + \dot{\mathbf{r}}.$$

Нехай $\mu(\cdot)\colon \bar{D} \mapsto \mathbb{R}_+$ та $\rho(\cdot)\colon \bar{D} \mapsto \mathbb{R}_+$ — функції, які визначають щільність розподілів у тілі відповідно маси і „зарядів".

Початок координат у рухомому просторі, жорстко зв'язаному з тілом, виберемо в центрі інерції. Тоді $\int \mu(\mathbf{y})\mathbf{y}d\mathbf{y} = 0$, і завдяки цьому кінетична енергія розпадається в суму двох незалежних доданків

$$\mathcal{K}\,(\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{K}_0(\boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{K}_1(\dot{\mathbf{r}}),$$

$$\mathcal{K}_0(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\bar{D}} \mu(\mathbf{y}) \left|\frac{d}{dt}Q\mathbf{y}\right|^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{2}\int\limits_{\bar{D}} \mu(\mathbf{y})\,|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}|^2\, d\mathbf{y} =: \frac{1}{2}\, I\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega},$$

$$\mathcal{K}_1(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m|\dot{\mathbf{r}}|^2}{2},$$

де $I\colon \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{E}^3$ — оператор інерції, $m = \int_{\bar{D}} \mu(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ — маса тіла.

З оператором інерції пов'яжемо лівоінваріантний скалярний добуток (лівоінваріантну метрику) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbb{H}_1$, який на довільній парі дотичних векторів $\xi, \eta \in T_q\mathbb{H}_1$ набуває значення

$$\langle\xi, \eta\rangle = I\boldsymbol{\Omega}(\xi)\cdot\boldsymbol{\Omega}(\eta) = 4(Iq^*\xi)\cdot q^*\eta$$

і визначає на $\mathbb{H}_1$ структуру ріманова многовиду. Зокрема, для пари лівоінваріантних векторних полів $\xi_{\mathbf{a}}(q) = q\mathbf{a}$, $\xi_{\mathbf{b}}(q) = q\mathbf{b}$ маємо

$$\langle\xi_{\mathbf{a}}(q), \xi_{\mathbf{b}}(q)\rangle := 4\,(Iq^*\xi_{\mathbf{a}}(q))\cdot(q^*\xi_{\mathbf{b}}(q)) = 4I\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := \langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\,.$$

Тепер в $\mathbb{E}^3$ поряд з $|\cdot|$ виникає ще одна норма $\|\cdot\|$, визначена рівністю $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}, \mathbf{a}\|}$. Якщо I_1, I_2, I_3 — власні числа оператора I, записані в порядку спадання, то ці дві норми задовольняють очевидні нерівності

$$2\sqrt{I_3}|\mathbf{a}| \le \|\mathbf{a}\| \le 2\sqrt{I_1}|\mathbf{a}|, \quad 2\sqrt{I_3}|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| \le 2\sqrt{I_1}|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.$$

При обчисленні силової функції без обмеження загальності вважатимемо, що $\mathbf{g} = 0$. Справді, внаслідок перетворення $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - B^{-1}\mathbf{g}$ перший потенціал набуде вигляду $\Phi_1(\mathbf{x}) =$

$= \dfrac{1}{2}\, B\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{const}$, а другий отримає незалежний від $\mathbf{x}$ приріст. Обома незалежними від $\mathbf{x}$ доданками в потенціалах можна знехтувати, оскільки вони не впливають на рівняння руху. Крім того, без обмеження загальності міркувань далі вважаємо, що власним ортобазисом симетричного оператора B відносно скалярного добутку $\cdot$ є початковий базис $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$, а отже, $B\mathbf{e}_k = b_k\mathbf{e}_k$, де b_1, b_2, b_3 — власні числа оператора B.

Введемо ще один симетричний оператор $J\colon \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{E}^3$, асоційований із квадратичною формою

$$J\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} := \int\limits_D \mu(\mathbf{y})|\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}|^2 d\mathbf{y}.$$

Беручи до уваги (3), отримуємо

$$|\mathbf{a}|^2 \int\limits_D \mu(\mathbf{y})|\mathbf{y}|^2 \mathrm{d}\mathbf{y} = \int\limits_D \mu(\mathbf{y})|\mathbf{a}\mathbf{y}|^2 d\mathbf{y} = \int\limits_D \mu(\mathbf{y})\left|-\mathbf{a}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{a}\times\mathbf{y}\right|^2 d\mathbf{y} = J\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + I\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}.$$

Якщо $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^3$ — власний ортобазис оператора J, то, розклавши $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^3 y_k\mathbf{f}_k$, знайдемо власні числа і слід оператора J:

$$J_k = \int\limits_D \mu(\mathbf{y}) y_k^2 d\mathbf{y}, \quad \mathrm{tr}\, J = \int\limits_D \mu(\mathbf{y})|\mathbf{y}|^2 d\mathbf{y}.$$

Таким чином, $J + I = \mathrm{tr}\, J\cdot \mathrm{Id}$, звідки $\mathrm{tr}\, I = 2\mathrm{tr} J$.

Позначимо

$$\mathbf{e}_k(q) := Q^{-1}(q)\mathbf{e}_k \equiv q^*\mathbf{e}_k q. \tag{7}$$

Потенціальна енергія обертального руху тіла $\Pi_{\mathrm{rot}}(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}\times \mathrm{SO}(3) \mapsto \mathbb{R}$ визначає силову функцію на $\mathbb{H}_1$ вигляду

$$-\Pi_{\mathrm{rot}}(t, Q(q)) = V(q) + \tilde{W}(t\omega, q),$$

де

$$
\begin{aligned}
V(q) &:= -\frac{1}{2}\int\limits_D [\mu(\mathbf{y})BQ(q)\mathbf{y}\cdot Q(q)\mathbf{y}]\,d\mathbf{y} = \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_D \mu(\mathbf{y})\left[B\sum_{k=1}^{3}(Q(q)\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_k\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{3}(Q(q)\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_k\right]d\mathbf{y} = \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} b_k\int\limits_D \mu(\mathbf{y})\left(Q^{-1}(q)\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{y}\right)^2 d\mathbf{y} = \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} b_k J\mathbf{e}_k(q)\cdot\mathbf{e}_k(q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} b_k I\mathbf{e}_k(q)\cdot\mathbf{e}_k(q) - \left[\frac{1}{4}\operatorname{tr}B\cdot\operatorname{tr}I\right] = \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{3} b_k\,\|\mathbf{e}_k(q)\|^2 - \left[\frac{1}{4}\operatorname{tr}B\cdot\operatorname{tr}I\right]
\end{aligned}
$$

(останній вираз у квадратних дужках, який не впливає на рівняння руху, у подальшому задля досягнення рівності $V(1) = 0$ буде замінено на $\frac{1}{2}\operatorname{tr}(BI)$),

$$
\tilde{W}(\varphi, q) := Q(q)\mathbf{z}\cdot\mathbf{F}(\varphi), \quad \mathbf{z} := \int\limits_D \rho(\mathbf{y})\mathbf{y}d\mathbf{y}. \tag{8}
$$

Силова функція поступального руху має вигляд $-\Pi_{\mathrm{tra}}(t, \mathbf{r}) = \hat{W}(t\omega, \mathbf{r})$, де

$$
\hat{W}(\varphi, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2}\,B\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \varrho\mathbf{F}(\varphi)\cdot\mathbf{r}, \quad \varrho := \int\limits_D \rho(\mathbf{y})d\mathbf{y}.
$$

Отже, приходимо до висновку, що, як і у випадку $\mathbf{F} \equiv 0$, розглянутому в [6], має місце таке твердження.

Твердження 1. *Рух вільного твердого тіла в полі з потенціалом* $\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(t, \mathbf{x})$ *є суперпозицією двох рухів: поступального руху* $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, *при якому залежність радіуса-вектора центра інерції тіла від часу описується розв'язком лінійної системи*

$$
\ddot{\mathbf{r}} + B\mathbf{r} = \frac{\varrho}{m}\,\mathbf{F}(t\omega), \tag{9}
$$

та обертального руху $t \mapsto R(t) = Q(q(t))$ *навколо центра інерції тіла, де відображення* $q(\cdot)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{H}_1$ *задовольняє лагранжеву систему на* $\mathbb{H}_1$ *з лагранжіаном*

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\,I\mathbf{\Omega}(\dot{q})\cdot\mathbf{\Omega}(\dot{q}) + V(q) + \tilde{W}(t\omega, q).
$$

Тут I — оператор інерції тіла, $V(q) := \dfrac{1}{8}\sum_{k=1}^{3} b_k\|\mathbf{e}_k(q)\|^2 - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(IB)$, де b_1, b_2, b_3 — власні числа оператора B, а $\mathbf{\Omega}(\dot{q})$, $\mathbf{e}_k(q)$ та $\tilde{W}(\varphi, q)$ даються формулами (4), (7) та (8).

3. Теорема існування квазіперіодичного розв'язку. Вище ми припустили, що оператор B є знаковизначеним. Якщо він від'ємно визначений, то, як відомо, система (9) має єдиний обмежений на всій дійсній осі розв'язок, і цей розв'язок квазіперіодичний із базисним частотним вектором ω. Якщо ж B додатно визначений, то існування квазіперіодичних розв'язків системи (9) залежить від обмеженості інтегралів

$$\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{b_k}s}\mathbf{F}(s\omega)\cdot\mathbf{e}_k ds,$$

а отже, від арифметичних властивостей чисел $\sqrt{b_k}$ та компонент вектора ω (див., наприклад, [3]).

Для встановлення умов існування квазіперіодичного розв'язку системи з лагранжіаном $\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}$ ми скористаємося теоремою 2 [30] та теоремою 5 [31]. У розглядуваному випадку рівняння руху мають вигляд лагранжевої системи на рімановому многовиді $(\mathbb{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$:

$$\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = \nabla V(q) + \nabla\tilde{W}(t\omega, q) =: f(t\omega, q). \tag{10}$$

Тут ∇ — зв'язність Леві – Чивіти на $\mathbb{H}_1$, асоційована з лівоінваріантною метрикою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\nabla V(\cdot)$ та $\nabla\tilde{W}(\varphi,\cdot)$ — градієнти функцій $V(\cdot)$ та $\tilde{W}(\varphi,\cdot)$ відповідно. Через $H_V(\cdot)$ та $H_{\tilde{W}}(\varphi,\cdot)$ позначимо відповідно гессіани зазначених функцій. Квазіперіодичний розв'язок системи (10) шукатимемо в певним чином визначеній зв'язній компоненті підрівневої множини функції $V(\cdot)$, яка (множина) містить точку p локального мінімуму функції $V(\cdot)$. Така точка існує внаслідок компактності многовиду $\mathbb{H}_1$. Оскільки перетворення параметрів вигляду $q \mapsto pq$ не змінює лівоінваріантну метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то далі без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що $p = 1$. Знайдемо умови, які гарантують, що ця точка є невиродженою точкою локального мінімуму функції $V(\cdot)$, тобто гессіан $H_V(1)$ додатно визначений. Уведемо позначення для найменшого з власних значень гессіана $H_V(q)$:

$$\lambda_V(q) := \min\left\{\langle H_V(q)q\mathbf{a}, q\mathbf{a}\rangle : \|\mathbf{a}\| = 1\right\}.$$

Твердження 2. *Якщо числа b_1, b_2, b_3 попарно різні, то точка $q = 1$ є стаціонарною для функції $V(\cdot)\colon \mathbb{H}_1 \mapsto \mathbb{R}$ тоді й лише тоді, коли репер $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$ утворює власний базис оператора I:*

$$I\mathbf{e}_k = I_k\mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Якщо до того ж справджуються нерівності

$$I_1 > I_2 > I_3, \quad b_1 < b_2 < b_3, \tag{12}$$

то в точці $q = 1$ гессіан функції $V(\cdot)$ додатно визначений, причому

$$\lambda_V(1) = \min_{1\le i<j\le 3}\left\{\frac{(b_j - b_i)(I_i - I_j)}{I_k},\ k \ne i, j\right\} > 0.$$

Доведення. Формула (6) при $\mathbf{a} = \mathbf{e}_k$ набирає вигляду

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathbf{e}_k(q) = \mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q}).$$

З урахуванням цієї рівності маємо

$$\langle \nabla V(q), \dot{q} \rangle = \sum_{k=1}^{3} b_k I \mathbf{e}_k(q) \cdot [\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q})],$$

і умовою стаціонарності точки $q = 1$ є рівність

$$\sum_{k=1}^{3} b_k I_k \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_k \times \mathbf{a}) \equiv \sum_{k=1}^{3} (b_k I_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}^3 \simeq T_1\mathbb{H}_1.$$

Неважко перевірити, що звідси й випливають рівності (11) за умови, що числа b_1, b_2, b_3 попарно різні.

Далі, нехай $t \mapsto q(t)$ — геодезична лівоінваріантної метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{H}_1$, проведена з точки q. За означенням уздовж геодезичної справджується рівність $\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = 0$, яку можна записати у вигляді рівняння Ейлера [1]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Omega}(\dot{q}) = I^{-1} [I\mathbf{\Omega}(\dot{q}) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q})]. \tag{13}$$

Тоді

$$\frac{d}{dt} \langle \nabla V(q), \dot{q} \rangle = \langle \nabla_{\dot{q}} \nabla V(q), \dot{q} \rangle = \sum_{k=1}^{3} b_k \{ I [\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q})] \cdot [\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q})] +$$

$$+ I\mathbf{e}_k(q) \cdot [\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q})] \times \mathbf{\Omega}(\dot{q}) + I\mathbf{e}_k(q) \cdot \mathbf{e}_k(q) \times I^{-1} \left(I\mathbf{\Omega}(\dot{q}) \times \mathbf{\Omega}(\dot{q}) \right) \big\}.$$

Поклавши тут $\dot{q} = \xi_{\mathbf{a}}(q) := q\mathbf{a}$ та взявши до уваги, що $\mathbf{\Omega}(q\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$, дістанемо

$$\langle H_V(q)\xi_{\mathbf{a}}(q), \xi_{\mathbf{a}}(q) \rangle = \langle \nabla_{q\mathbf{a}} \nabla V(q), q\mathbf{a} \rangle = \sum_{k=1}^{3} b_k \big[\, \|\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{a}\|^2 + \langle \mathbf{e}_k(q), (\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} \rangle +$$

$$+ \left\langle \mathbf{e}_k(q), \mathbf{e}_k(q) \times I^{-1}(I\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \right\rangle \big]$$

або, якщо скористатися рівністю $(\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{e}_k(q) \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} - |\mathbf{a}|^2 \mathbf{e}_k(q)$,

$$\langle H_V(q)\xi_{\mathbf{a}}(q), \xi_{\mathbf{a}}(q) \rangle = \sum_{k=1}^{3} b_k \left[\|\mathbf{e}_k(q) \times \mathbf{a}\|^2 + (\mathbf{e}_k(q) \cdot \mathbf{a}) \langle \mathbf{e}_k(q), \mathbf{a} \rangle - |\mathbf{a}|^2 \|\mathbf{e}_k(q)\|^2 \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} b_k \left\langle \mathbf{e}_k(q), \mathbf{e}_k(q) \times I^{-1}(I\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \right\rangle. \tag{14}$$

Далі, розклавши $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i$, знайдемо

$$\sum_{k=1}^{3} b_k \|\mathbf{e}_k \times \mathbf{a}\|^2 = 4\left[(b_2 I_3 + b_3 I_2)a_1^2 + (b_1 I_3 + b_3 I_1)a_2^2 + (b_1 I_2 + b_2 I_1)a_3^2\right],$$

$$\sum_{k=1}^{3} b_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{a}) \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{a}\rangle = 4\sum_{k=1}^{3} b_k I_k a_k^2, \quad \sum_{k=1}^{3} b_k \left\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \times I^{-1}(\mathbf{a} \times I\mathbf{a})\right\rangle = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} b_k \|\mathbf{e}_k\|^2 = 4\sum_{k=1}^{3} b_k I_k,$$

а тоді з (14) одержимо

$$\langle H_V(1)\xi_{\mathbf{a}}(1), \xi_{\mathbf{a}}(1)\rangle = 4 \sum_{\substack{1 \le i < j \le 3 \\ k \ne i,j}} (b_i - b_j)(I_j - I_i) a_k^2 =$$

$$= 4 \sum_{\substack{1 \le i < j \le 3 \\ k \ne i,j}} I_k^{-1} (b_i - b_j)(I_j - I_i)\left(\sqrt{I_k} a_k\right)^2. \tag{15}$$

Звідси, оскільки виконується рівність $\|\mathbf{a}\|^2 = 4\sum_{k=1}^{3}\left(\sqrt{I_k} a_k\right)^2$, випливає формула для $\lambda_V(1)$.

Твердження 2 доведено.

Зауваження 1. На підставі доведеного можна дійти висновку, що при зроблених припущеннях функція $V(\cdot)$ має принаймні шість стаціонарних точок. Усі вони невироджені, тобто морсівські, і серед них є точки всіх індексів від 0 до 3. Щоб обчислити значення $\langle \nabla_{q\mathbf{a}} \nabla V(q), q\mathbf{a}\rangle$ у відповідній стаціонарній точці p, достатньо у формулі (15) виконати заміну $b_i \mapsto b_{\pi(i)}$, $b_j \mapsto b_{\pi(j)}$, де $\pi\colon \{1,2,3\} \mapsto \{1,2,3\}$ — перестановка, асоційована зі стаціонарною точкою, а саме, $\mathbf{e}_i(p) = \sigma_i \mathbf{e}_{\pi(i)}$, де числа $\sigma_i \in \{+1,-1\}$ такі, що $(\mathbf{e}_1(p) \times \mathbf{e}_2(p)) \cdot \mathbf{e}_3(p) = +1$.

Уведемо позначення $\mathcal{D}_v$, де $v > 0$, для тієї зв'язної компоненти підрівневої множини $V^{-1}([0,v))$, яка містить точку $q = 1$ (нагадаємо, що $V(1) = 0$), і визначимо функцію

$$l(v) := \min\left\{\lambda_V(q)\colon q \in \partial\mathcal{D}_v\right\}. \tag{16}$$

Оскільки $l(0) = \lambda_V(1) > 0$, то для достатньо малих додатних значень v функція $l(v)$ набуває додатних значень, однак знайдеться таке найменше значення $v_* > 0$, що $l(v_*) = 0$ (у противному разі функція $V(\cdot)$ не мала б жодної точки максимуму, а це неможливо через компактність $\mathbb{H}_1$). Очевидно, що

$$v_* = \sup\left\{v > 0\colon l(s) > 0 \ \forall s \in [0,v)\right\}. \tag{17}$$

Достатні умови існування гіперболічного квазіперіодичного розв'язку лагранжевої системи на $\mathbb{H}_1$ з лагранжіаном $\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}$ встановлює така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються нерівності (12). Покладемо*

$$L := \max\left\{\langle H_V(q)q\mathbf{a}, q\mathbf{a}\rangle : q \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{D}_{v_*}\right), \|\mathbf{a}\| = 1\right\},$$

$$K_* := \frac{(I_1 - I_2)^2 + [2(I_1 + I_2) - 3I_3]\, I_3}{4I_1 I_2 I_3},$$

$$J := \left[\frac{1}{\sqrt{I_3}} + \frac{\sqrt{I_3}}{2} \max_{1\le i<j\le 3}\left\{\frac{I_i - I_j}{I_k\sqrt{I_i I_j}} : k \ne i, j\right\}\right]$$

і для кожного числа $K > 0$ визначимо

$$c_K := \max\left\{c \in [0, v_*] \colon l(v) \ge (c - v)K \ \ \forall v \in [0, v_*]\right\},$$

де $l(v)$ і v_* взято з (16) та (17) відповідно. Якщо знайдеться $K \ge K_*$ таке, що

$$|\mathbf{z}|\,|\mathbf{F}(\varphi)|/\sqrt{I_3} < \epsilon := \min\left\{c_K\sqrt{K}, \frac{2Jc_K^2 K}{L + 2J^2 c_K}\right\} \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^k,$$

то у тій зв'язній компоненті множини $V^{-1}([0, c_K])$, яка містить точку $q = 1$, система (10) має єдиний квазіперіодичний розв'язок і цей розв'язок гіперболічний.

Доведення. Для встановлення існування квазіперіодичного розв'язку скористаємося теоремою 5 з [31]. З цією метою потрібно виділити область $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}_1$ і побудувати функцію $U(\cdot) \colon \mathbb{H}_1 \mapsto \mathbb{R}$ так, щоб вони задовольняли умови:

A) межа $\partial\mathcal{D}$ області $\mathcal{D}$ є гладкою гіперповерхнею і при цьому

$$\langle \nu(q), f(\varphi, q)\rangle > 0, \quad \lambda_{II}(q) > 0 \quad \forall (\varphi, q) \in \mathbb{T}^k \times \partial\mathcal{D},$$

де $\nu(q)$ і $\lambda_{II}(q)$ відповідно позначають одиничний вектор зовнішньої нормалі та мінімальну головну кривину межі в точці $q \in \partial\mathcal{D}$, тобто

$$\lambda_{II}(q) := \min\left\{\langle \nabla_\xi \nu(q), \xi\rangle : \xi \in T_q\partial\mathcal{D}, \|\xi\| = 1\right\};$$

B) існує функція $U(\cdot) \colon \mathbb{H}_1 \mapsto \mathbb{R}$ така, що

$$\lambda_U(q) := \min\left\{\langle H_U(q)\xi, \xi\rangle : \xi \in T_q\mathbb{H}_1, \|\xi\| = 1\right\} > 0 \quad \forall q \in \mathrm{cl}(\mathcal{D}),$$

$$\lambda_{II}(q) + \frac{1}{2}\,\langle \nabla U(q), \nu(q)\rangle > 0 \quad \forall q \in \partial\mathcal{D},$$

$$\min\Big\{\langle \nabla U(q), f(\varphi, q)\rangle : (\varphi, q) \in \mathbb{T}^k \times \mathrm{cl}(\mathcal{D})\Big\} < 0;$$

C) система (10) є U-монотонною в $\mathcal{D}$ в сенсі [31], тобто

$$\begin{gathered} \lambda_f(\varphi, q) + \frac{\langle \nabla U(x), f(\varphi, q)\rangle}{2} > 0 \quad \forall (\varphi, q) \in \mathbb{T}^k \times \mathrm{cl}(\mathcal{D}), \\ \mu_U(q) \ge 2K(q) \quad \forall q \in \mathcal{D}, \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$\lambda_f(\varphi,q) := \min\left\{\left\langle H_{V+\tilde W}(\varphi,q)\xi,\xi\right\rangle : \xi\in T_q\mathbb{H}_1, \|\xi\|=1\right\},$$

$$\mu_U(q) := \min\left\{\langle H_U(q)\xi,\xi\rangle - \frac{\langle\nabla U(x),\xi\rangle^2}{2} : \xi\in T_q\mathbb{H}_1, \|\xi\|=1\right\},$$

а $K_*(q)$ — максимальна секційна (ріманова) кривина ріманового многовиду $(\mathbb{H}_1,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ по двовимірних площинах дотичного простору $T_q\mathbb{H}_1$. Обчислення кривини $K_*(q)$ див. у додатку (п. 4).

Тепер перейдемо до побудови області $\mathcal{D}$ та функції $U(\cdot)$. Для як завгодно малого $\delta>0$ візьмемо $c\in(c_K-\delta,c_K)$ і визначимо

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_c.$$

Зауваживши, що

$$\nabla_{\nabla V}V(q) = \|\nabla V(q)\|^2, \quad \nabla_{\nabla V}\langle\nabla V(q),\nabla V(q)\rangle \geq 2\lambda_V(q)\|\nabla V(q)\|^2,$$

неважко показати, що $\mathrm{cl}(\mathcal{D}_c)\setminus\{1\}$ не містить особливих точок векторного поля $\nabla V(\cdot)$ і, більш того,

$$\|\nabla V(q)\|^2 \geq 2\int\limits_0^v l(s)ds \geq (2c-v)vK \quad \forall q\in\partial\mathcal{D}_v, \quad v\in[0,c]; \tag{19}$$

зокрема,

$$\|\nabla V(q)\| \geq c\sqrt{K} \quad \forall q\in\partial\mathcal{D}_c.$$

Аналогічно

$$\|\nabla V(q)\|^2 \leq 2Lv \quad \forall q\in\partial\mathcal{D}_v. \tag{20}$$

Оскільки

$$\nu(q) = \frac{\nabla V(q)}{\|\nabla V(q)\|}, \quad \lambda_{II}(q) = \frac{\lambda_V(q)}{\|\nabla V(q)\|} > 0 \quad \forall q\in\partial\mathcal{D}_c,$$

то тепер для виконання умови A) достатньо, щоб

$$2\int\limits_0^c l(s)ds > \left\|\nabla\tilde W(\varphi,q)\right\|^2 \quad \forall(\varphi,q)\in\mathbb{T}^k\times\partial\mathcal{D}_c. \tag{21}$$

Далі, з урахуванням (8), (5) обчислюємо

$$\left\langle\nabla\tilde W(\varphi,q),\dot q\right\rangle = Q(q)\left(\mathbf{\Omega}(\dot q)\times\mathbf{z}\right)\cdot\mathbf{F}(\varphi). \tag{22}$$

Покладаючи тут $\dot{q} = q\mathbf{a}$ та використовуючи рівність $\mathbf{\Omega}(q\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$, легко переконуємося в тому, що

$$\max\left\{\left\|\nabla\tilde{W}(\varphi, q)\right\| : (\varphi, q) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{H}_1\right\} < \epsilon,$$

і тепер очевидно, що нерівність (21) є наслідком нерівності

$$c_K\sqrt{K} \geq \epsilon$$

за умови, що δ є достатньо малим.

Функцію $U(\cdot)$ шукаємо у вигляді суперпозиції $y \circ V(\cdot)$. Нехай $\gamma(\cdot)\colon (-1,1) \mapsto \mathbb{H}_1$ — натурально параметризована геодезична лівоінваріантної метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ така, що $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = \xi$. Тоді умова (18) набирає вигляду

$$\langle H_U(q)\xi, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle\nabla U(q), \xi\rangle^2 = \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} U\circ\gamma(s) - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} U\circ\gamma(s)\right]^2 =$$

$$= \Bigg[y'(v)\langle H_V(q)\xi, \xi\rangle +$$

$$+ \left(y''(v) - \frac{[y'(v)]^2}{2}\right)\langle\nabla V(q), \xi\rangle^2\Bigg]_{v=V(q)} \geq 2K_* \quad \forall q \in \mathcal{D}_c.$$

Якщо покласти

$$y(v) := -2\ln\left(c_K - v\right),$$

то остання нерівність зведеться до

$$\frac{l(v)}{c_K - v} \geq K \geq K_* \quad \forall v \in [0, c].$$

Тепер зрозуміло, що функція

$$U(\cdot) = -2\ln\left(c_K - V(\cdot)\right)$$

коректно визначена в $\mathrm{cl}\,(\mathcal{D}_c)$ і задовольняє на цій множині не лише умову (18), але й перші дві нерівності в умові B). Зазначимо, що цю функцію з області $\mathrm{cl}\,(\mathcal{D}_c)$ можна розширити до гладкої функції на всьому многовиді $\mathbb{H}_1$.

Для перевірки третьої нерівності умови B) обчислимо

$$\langle\nabla U(q), f(\varphi, q)\rangle = \frac{2}{c_K - V(q)}\left[\|\nabla V(q)\|^2 + \left\langle\nabla V(q), \nabla\tilde{W}(\varphi, q)\right\rangle\right]. \tag{23}$$

Внаслідок невиродженості $H_V(1)$ для довільного вектора $\mathbf{b}$ існує вектор $\mathbf{a}$ такий, що $H_V(1)\mathbf{a} = \mathbf{b}$. З урахуванням рівностей $\nabla V(1) = 0$ та (22) дістанемо

$$\nabla_{q\mathbf{a}}\left[\|\nabla V(q)\|^2 + \left\langle\nabla V(q), \nabla\tilde{W}(\varphi, q)\right\rangle\right]_{q=1} = \left\langle H_V(1)\mathbf{a}, \nabla\tilde{W}(\varphi, 1)\right\rangle = (\mathbf{b}\times\mathbf{z})\cdot\mathbf{F}(\varphi).$$

Оскільки відображення $\mathbf{F}(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^3$ має нульове среднє й не є тотожно колінеарним із вектором $\mathbf{z}$, то існує точка $\varphi_0 \in \mathbb{T}^k$, для якої в малому околі точки $q = 1$ знайдеться точка $q_0 \in \mathbb{H}_1$ така, що $\langle \nabla U(q_0), f(\varphi_0, q_0)\rangle < 0$. Отже, й третя нерівність умови B) виконується.

Залишилося перевірити виконання першої нерівності умови C). З урахуванням (8), (22), (5) та (13) знаходимо

$$\left\langle \nabla_{\dot q} \nabla \tilde W(\varphi, q), \dot q \right\rangle = Q(q)\left[\boldsymbol{\Omega}(\dot q) \times (\boldsymbol{\Omega}(\dot q) \times \mathbf{z})\right] \cdot \mathbf{F}(\varphi) +$$

$$+ Q(q)\left\{I^{-1}\left[I\boldsymbol{\Omega}(\dot q) \times \boldsymbol{\Omega}(\dot q)\right] \times \mathbf{z}\right\} \cdot \mathbf{F}(\varphi).$$

Якщо тут покласти $\dot q = q\mathbf{a}$ та використати рівність $\boldsymbol{\Omega}(q\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$ та нерівність

$$\left|I^{-1}\left(I\mathbf{a} \times \mathbf{a}\right)\right| \le \frac{1}{8} \max_{1 \le i < j \le 3} \left\{ \frac{I_i - I_j}{I_k \sqrt{I_i I_j}} \colon k \ne i, j \right\} \|\mathbf{a}\|^2,$$

то легко переконатися в тому, що

$$\max\left\{ \left| \left\langle \nabla_{q\mathbf{a}} \nabla \tilde W(\varphi, q), q\mathbf{a} \right\rangle \right| \colon (\varphi, q) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{H}_1,\ \|\mathbf{a}\| = 1 \right\} < J\epsilon.$$

Тепер, беручи до уваги (23), (19) та (20), маємо

$$\lambda_f(\varphi, q) + \frac{\langle \nabla U(q), f(\varphi, q)\rangle}{2} > l(v) - J\epsilon + \frac{1}{c_K - V(q)} \left[\|\nabla V(q)\|^2 + \left\langle \nabla V(q), \nabla \tilde W(\varphi, q) \right\rangle \right] \ge$$

$$\ge (c_K - v)K - J\epsilon + \frac{1}{c_K - v}\left[(2c_K - v)vK - \sqrt{2Lv}\epsilon\right] \quad \forall q \in \partial \mathcal{D}_v.$$

Останній вираз набуватиме невід'ємних значень при всіх $v \in [0, c]$, якщо таку ж властивість матиме функція

$$G(v) := (c_K - v)^2 K - (c_K - v)J\epsilon + (2c_K - v)\, vK - \epsilon\sqrt{2Lv} = J\epsilon v - \epsilon\sqrt{2Lv} + (c_K K - J\epsilon)c_K.$$

Звідси дістаємо умову, яка фігурує в твердженні теореми:

$$2J(c_K K - J\epsilon)c_K \ge L\epsilon \;\Leftrightarrow\; \epsilon \le \frac{2Jc_K^2 K}{(L + 2J^2 c_K)}.$$

Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Як випливає з результатів [29, 30], знайдений квазіперіодичний розв'язок мінімізує усереднений лагранжіан (2) в певному класі квазіперіодичних за Безіковичем функцій.

4. Додаток. Для обчислення секційної кривини ріманового многовиду $(\mathbb{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ скористаємося результатами [33].

Твердження 3. *Якщо* $I_3 < I_2 < I_1$, *то*

$$K_*(q) \equiv K_* = \frac{(I_1 - I_2)^2 + \left[2(I_1 + I_2) - 3I_3\right] I_3}{4I_1 I_2 I_3} > 0. \tag{24}$$

Доведення. Для довільної гладкої функції $f : \mathbb{H}_1 \mapsto \mathbb{R}$ справджується рівність

$$(\xi_{\mathbf{a}}\xi_{\mathbf{b}} - \xi_{\mathbf{b}}\xi_{\mathbf{a}})f(q) = \langle \nabla f(q), q(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})\rangle = \langle \nabla f(q), 2q(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\rangle \,,$$

з якої випливає формула для комутатора

$$[\xi_{\mathbf{a}}, \xi_{\mathbf{b}}] := \xi_{\mathbf{a}}\xi_{\mathbf{b}} - \xi_{\mathbf{b}}\xi_{\mathbf{a}} = \xi_{2\mathbf{a}\times\mathbf{b}}.$$

Лівоінваріантні векторні поля

$$\varepsilon_k := \frac{q\mathbf{e}_k}{2\sqrt{I_k}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

утворюють ортонормальний базис відносно скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і з урахуванням рівності

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \frac{q}{2\sqrt{I_i I_j}}\,\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$$

задовольняють комутаційні співвідношення

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \lambda_3\varepsilon_3, \quad [\varepsilon_2, \varepsilon_3] = \lambda_1\varepsilon_1, \quad [\varepsilon_3, \varepsilon_1] = \lambda_2\varepsilon_2$$

зі сталими

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2 I_3}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{I_2}{I_1 I_3}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{I_3}{I_1 I_2}}.$$

Як і в [33], покладемо

$$\mu_i := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k - \lambda_i.$$

Тоді згідно з теоремою 4.3 [33] секційна кривина вздовж площини, породженої парою ε_i, ε_j,

$$K(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - 2\mu_i\mu_j,$$

звідки шляхом безпосередніх обчислень дістаємо

$$K(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \frac{(I_i - I_j)^2 + [2(I_i + I_j) - 3I_k]\,I_k}{4I_1 I_2 I_3}, \quad k \neq i, j.$$

Оскільки $K(\varepsilon_i, \varepsilon_j) - K(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = (I_j - I_k)(I_j + I_k - I_i)/(I_1 I_2 I_3)$ і, як відомо, $I_j + I_k > I_i$ (див., наприклад, [1, с. 125]), то за умови, що $I_1 > I_2 > I_3$, маємо

$$\max_{1\leq i<j\leq 3} K(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0.$$

Як випливає з теореми 4.3 [33], для довільної пари векторів

$$\xi = \sum_{j=1}^{3}\xi_j\varepsilon_j, \quad \eta = \sum_{j=1}^{3}\eta_j\varepsilon_j$$

справджується рівність

$$K(\xi,\eta) = \sum_{1\le i<j\le 3} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}^2 K(\varepsilon_i,\varepsilon_j).$$

Якщо ця пара ортонормована відносно скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то

$$\sum_{1\le i<j\le 3} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}^2 = \|\xi\|^2\,\|\eta\|^2 - \langle\xi,\eta\rangle^2 = 1,$$

а отже,

$$K(\xi,\eta) = \theta_1 K(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \theta_2 K(\varepsilon_1,\varepsilon_3) + \theta_3 K(\varepsilon_2,\varepsilon_3),$$

де числа $\theta_k \in [0,1]$ задовольняють рівність $\sum_{i=1}^{3}\theta_j = 1$. Звідси й випливає, що саме $K(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ є максимальною секційною кривиною.

Твердження 3 доведено.

Література

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1969. — 248 с.
3. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. — 313 p.
4. *Tisserand F.* Traite de mecanique celeste. Theorie de la figure des corps celestes et de leur mouvement de rotation. — Paris: Gauthier-Villars, 1891. — 552 p.
5. *Brun F.* Rotation kring fix punkt// Öfvers. Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Förhadl. Stokholm. — 1893. — **7**. — P. 455–468.
6. *Богоявленский О. И.* Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. — М.: Наука, 1991. — 320 с.
7. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмурд. ун-та, 1995. — 432 с.
8. *Борисов А. В.,Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. — Москва; Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 384 с.
9. *Broer H. W., Sevryuk M. B.* KAM theory: quasi-periodicity in dynamical systems // Handb. Dyn. Syst. — Amsterdam: Elsevier, 2010. — Vol. 3. — P. 249–344.
10. *Hanßmann H.* Quasi-periodic motions of a rigid body I. Quadratic Hamiltonians on the sphere with a distinguished parameter // Regul. Chaotic Dyn. — 1997. — **2**. — P. 41–57.
11. *Hanßmann H.* Quasi-periodic motion of a rigid body under weak forces // NATO ASI Ser. — 1999. — **533.** — P. 398–402.
12. *Cheresiz V. M.* Stable and conditionally stable almost-periodic solutions of V-monotone systems // Sib. Math. J. — 1974. — **15**, № 1. — P. 116–125.
13. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — **134**, № 2. — P. 312–321.
14. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians II // Bull. Austral. Math. Soc. — 1989. — **40**, № 3. — P. 457–463.
15. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians III // Isr. J. Math. — 1989. — **67**, № 3. — P. 337–344.

16. *Blot J.* Almost periodically forced pendulum // Funkc. Ekvacioj. — 1993. — **36**. — P. 235 – 250.

17. *Berger M. S., Zhang Luping.* A new method for large quasiperiodic nonlinear oscillations with fixed frequencies for nondissipative second order conservative systems of second type // Commun. Appl. Nonlinear Anal. — 1996. — **3**, № 1. — P. 25 – 49.

18. *Blot J., Cieutat P., Mawhin J.* Almost-periodic oscillations of monotone second-order systems // Adv. Different. Equat. — 1997. — **2**. — P. 693 – 714.

19. *Carminati C.* Forced systems with almost periodic and quasiperiodic forcing term // Nonlinear Anal. — 1998. — **32**. — P. 727 – 739.

20. *Mawhin J.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear differential equations: variational vs nonvariational approach // Calc. Var. and Different. Equat. Res. Notes Math. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. — **410**. — P. 167 – 184.

21. *Zakharin S. F., Parasyuk I. O.* Generalized and classical almost periodic solutions of Lagrangian systems // Funkc. Ekvacioj. — 1999. — **42**. — P. 325 – 338.

22. *Blot J., Pennequin D.* Spaces of quasi-periodic functions and oscillations in differential equations // Acta Appl. Math. — 2001. — **65**, № 1 – 3. — P. 83 – 113.

23. *Cieutat P.* Bounded and almost periodic solutions of convex Lagrangian systems // J. Different. Equat. — 2003. — **190**. — P. 108 – 130.

24. *Ayachi M., Blot J.* Variational methods for almost periodic solutions of a class of neutral delay equations // Abstr. Appl. Anal. — 2008. — **2008**. — Article ID 153285. — 13 p.

25. *Cheban D. N., Mammana C.* Invariant manifolds, almost periodic and almost automorphic solutions of seconde-order monotone equations // New Research on Evolution Equations / Ed. G. M. N'Guerekata. — New York: Nova Sci. Publ., Inc., 2009. — P. 123 – 145.

26. *Kuang J.* Variational approach to quasi-periodic solution of nonautonomous second-order Hamiltonian systems // Abstr. and Appl. Anal. — 2012. — **2012**. — Article ID 271616. — 14 p.

27. *Захарін С. Ф., Парасюк І. О.* Узагальнені квазіперіодичні розв'язки лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. — 1999. — Вип. 3. — С. 15 – 20.

28. *Захарін С. Ф., Парасюк І. О.* Про гладкість квазіперіодичних розв'язків лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, №. 2. — С. 180 – 193.

29. *Parasyuk I., Rustamova A.* Variational approach for weak quasiperiodic solutions of quasiperiodically excited Lagrangian systems on Riemannian manifolds // Electron. J. Different. Equat. — 2012. — **2012**, № 66. — P. 1 – 22.

30. *Парасюк І. О.* Квазіперіодичні екстремалі неавтономних лагранжевих систем на ріманових многовидах // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 10. — С. 1387 – 1406.

31. *Parasyuk I. O.* Hyperbolic quasiperiodic solutions of U-monotone systems on Riemannian manifolds // arXiv:1703.04109 [math.DS].

32. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. —М.: Наука, 1986. — 760 с.

33. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — **21**. — P. 293 – 329.

Одержано 25.10.17