УДК 532.595

ПРО СИЛОВУ ВЗАЄМОДІЮ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ РЕЗЕРВУАРІВ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ

І. О. Луковський

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

We consider the problem, in a nonlinear setting, of determining the forces of interaction between a moving tank with deformed walls and fluid that partially fills it. For the dynamics of the relative motion of the mechanical systems in the gravity field, we establish theorems on a change of impulse principal and kinetic momentum principal vectors of the body-fluid system in the case where the center if mass of the system is not known in advance. We formulate principals for constructing mathematical models for global motion of the mechanical systems under consideration in terms of nonlinear ordinary differential equations.

В нелинейной постановке рассматривается задача об определении сил взаимодействия между подвижным резервуаром с деформируемыми стенками и частично заполняемой его жидкостью. В разрезе динамики относительного движения механических систем в поле сил земного тяготения установлены теоремы об изменении главных векторов количества движения и кинетического момента количества движения системы тело-жидкость при условиях, когда центр масс системы наперед неизвестен. Сформулированы принципы построения нелинейных математических моделей движения рассматриваемых механических систем в целом на языке нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Попередні зауваження і постановка задачі. Ряд практичних проблем, пов'язаних із дослідженнями динаміки та стійкості об'єктів аерокосмічної і морської техніки, до складу яких входять значні маси рідинних вантажів, потребують розробки ефективних математичних моделей з точки зору їх практичних застосувань.

Більшість таких проблем необхідно розглядати з позицій нелінійної теорії. Насамперед слід розглядати математичні проблеми, пов'язані з постановкою і створенням методів дослідження нелінійних крайових задач математичної фізики для областей зі змінними межами. Внаслідок нелінійності математичних моделей єдиність їх розв'язків є швидше винятком, ніж правилом.

Типовою задачею такого роду є задача динаміки пружного тіла, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною.

Розглядаючи просторовий рух цієї механічної системи, вводимо до розгляду дві системи координат: прямокутну систему $O'x'y'z'$, яку умовно будемо вважати нерухомою, і прямокутну систему $Oxyz$, незмінно зв'язану з системою тіло-рідина в їх незбуреному стані. Початок рухомої системи координат $Oxyz$ виберемо на незбуреній вільній поверхні рідини Σ_0, направивши вісь Ox у напрямку, протилежному напрямку вектора прискорення сил земного тяжіння $\boldsymbol{g}$.

Переміщення, що здійснюються частинками стінок резервуара в результаті їх пружних деформацій, будемо позначати вектором $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$, де t — час, а x, y, z — координати, що визначають положення даної частинки резервуара при недеформованому його стані.

Пружні переміщення $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ будуть представляти собою відносні переміщення частинок стінок резервуара в рухомій системі координат x, y, z.

У подальшому розгляді будемо вважати вектор пружних переміщень відомою функцією нарівні з вектором поступального руху $\boldsymbol{v}_0$ і вектором миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$, що характеризують просторовий рух координатної системи $Oxyz$.

Як відомо, в потенціальному силовому полі потенціал сил тяжіння має вигляд

$$U = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}',$$

до того ж

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_0 + \boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{r}'$ — радіус-вектор точки системи тіло-рідина відносно початку O' абсолютної системи координат, $\boldsymbol{r}'_0$ — радіус-вектор точки O відносно нерухомої точки O', $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор довільної точки системи відносно точки O рухомої системи координат $Oxyz$.

З огляду на викладене вище можна сформулювати так звану першу задачу динаміки системи тіло-рідина, яка полягає у визначенні руху рідини, викликаного просторовим рухом резервуара і його пружними стінками, а також сил взаємодії між резервуаром і рідиною.

Будемо припускати, що в початковий момент часу рідина знаходиться у стані спокою або у стані безвихрового руху. Тоді за теоремою Лагранжа її рух у подальшому буде безвихровим. З цього випливає існування скалярної функції Φ, яка має назву потенціалу швидкостей, для якої в занятій рідиною області $Q(t)$ справджується рівність

$$\boldsymbol{v}_a = \operatorname{grad} \Phi,$$

де $\boldsymbol{v}_a$ — абсолютна швидкість частинок рідини в рухомій системі координат.

Позначаючи через $\boldsymbol{r}\{x(t), y(t), z(t)\}$ радіус-вектор частинки рідини відносно резервуара (тобто системи координат $Oxyz$), а через $\overset{*}{\boldsymbol{r}}\{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}$ її відносну швидкість, на основі теореми про розподіл швидкостей у складному русі механічної системи маємо

$$\boldsymbol{v}_a = \bigtriangledown\Phi = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \overset{*}{\boldsymbol{r}}. \tag{1}$$

Тут і в подальшому зірочкою позначено вектори, проекції яких на осі зв'язаної системи координат $Oxyz$ дорівнюють похідним за часом від проекцій на них відповідних векторів [1].

За визначенням величина $\overset{*}{\boldsymbol{r}}$ є вектором швидкості, зв'язаним із частинкою. Для цієї частинки аргументи x, y, z довільної гідродинамічної величини $A(x, y, z, t)$ є функціями часу t, які характеризують рух частинки. За правилом диференціювання складної функції маємо

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \bigtriangledown A.$$

Нелінійна крайова задача для потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$, що описує абсолютний рух рідини в рухомій системі координат, формулюється таким чином [2]:

$$\bigtriangledown^2 \Phi = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu}) + v_\nu, \quad \boldsymbol{r} \in \Sigma(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}) + \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \quad \boldsymbol{r} \in S(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bigtriangledown \Phi)^2 - \bigtriangledown \Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \Sigma(t), \tag{5}$$

де $\boldsymbol{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області $Q(t)$, $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точок об'єму рідини $Q(t)$ у зв'язаній системі координат, $\Sigma(t)$ і $S(t)$ — відповідно вільна поверхня рідини і змочувана поверхня резервуара, v_ν — відносна нормальна швидкість частинок вільної поверхні рідини, u_ν — проекція пружного переміщення $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ на напрям зовнішньої нормалі до поверхні $S(t)$.

Так звану динамічну умову на вільній поверхні рідини $\Sigma(t)$ (5) одержано з інтеграла Лагранжа – Коші у зв'язаній системі координат

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bigtriangledown \Phi)^2 - \bigtriangledown \Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U + \frac{p}{\rho} = 0, \tag{6}$$

де ρ — масова густина рідини, при умові рівності тиску p на вільній поверхні сталій величині p_0.

Похідна по часу $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ в (6) обчислюється в рухомій системі координат, тобто для точки M, яка незмінно зв'язана з рухомою системою координат і має відносно неї координати x, y, z.

При формулюванні кінематичних умов крайової задачі (2) – (5) використовувалося співвідношення (1), згідно з яким

$$\operatorname{grad} \Phi \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{\nu},$$

де $\boldsymbol{v}_r$ — відносна швидкість частинок рідини на пружній стінці резервуара чи на вільній поверхні рідини. Для частинок рідини, що лежать на змочуваній поверхні резервуара $S(t)$, вона визначається похідною за часом від пружного переміщення цієї частинки $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$, тоді як для частинок рідини вільної поверхні $\Sigma(t)$, заданої рівнянням $\zeta(x, y, z, t) = 0$, маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{|\bigtriangledown \zeta|^z}} = v_\nu,$$

де v_ν — спільна швидкість рідини і вільної поверхні в напрямку зовнішньої нормалі до поверхні $\Sigma(t)$.

2. Визначення сил взаємодії між пружними стінками резервуара і рідиною, що частково його заповнює. Найбільш складним для аналізу силової взаємодії резервуара з рідиною є випадок просторового руху механічної системи при значних деформаціях вільної поверхні коливального типу. Для класу потенціальних рухів рідини нижче ми одержимо вирази для головного вектора і головного моменту сил тиску відносно точки O в термінах кінематичних і динамічних величин аналітичної механіки.

За означенням головний вектор $\boldsymbol{P}$ і головний момент $\boldsymbol{N}$ сил тиску, які діють з боку рідини на рухомий резервуар, мають вигляд

$$\boldsymbol{P} = \int\limits_S p\boldsymbol{\nu}\, dS, \quad \boldsymbol{N} = \int\limits_S \boldsymbol{r} \times p\boldsymbol{\nu}\, dS, \tag{7}$$

де $S(t)$ — змочувана поверхня резервуара.

Пов'язуючи визначення головних векторів $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{N}$ із розв'язком нелінійної крайової задачі для потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$ (2)–(5), підставляємо у (7) значення тиску p з інтеграла Лагранжа–Коші (6). Тоді для головного вектора $\boldsymbol{P}$ одержимо

$$\boldsymbol{P} = -\rho \int\limits_S \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\triangledown\Phi)^2 - \triangledown\Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U\right] \boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{8}$$

Вираз (8) перетворимо, застосувавши інтегральні теореми теорії поля.

Спочатку за інтегральною теоремою Гаусса–Остроградського знайдемо

$$\rho \int\limits_{S+\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\boldsymbol{\nu}\, dS = \rho \int\limits_Q \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) dQ = \rho \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) dQ. \tag{9}$$

До інтеграла (9) застосуємо формулу

$$\frac{d}{dt}\int\limits_Q f\, dQ = \int\limits_Q f_t dQ + \int\limits_{S+\Sigma} f v_\nu dS, \tag{10}$$

справедливу для довільної функції $f(x, y, z, t)$ у випадку, коли область Q залежить від часу t. У співвідношенні (10) v_ν означає нормальну швидкість точок межі області Q, яка приймається позитивною в напрямку зовнішньої нормалі до межі. Після цього отримаємо

$$\rho \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) dQ = \overset{*}{\dot{\boldsymbol{K}}} - \rho \int\limits_{S+\Sigma} \nabla\Phi v_\nu\, dS, \tag{11}$$

де $\overset{*}{\boldsymbol{K}} = \rho \int_Q \nabla\Phi dQ$ — кількість руху об'єму рідини $Q(t)$, обмеженого вільною поверхнею $\Sigma(t)$ і пружною стінкою $S(t)$.

В результаті для першого члена у формулі (8) маємо

$$\rho \int\limits_S \frac{\partial \Phi}{\partial t}\boldsymbol{\nu}\, dS = \overset{*}{\dot{\boldsymbol{K}}} - \rho \int\limits_\Sigma \nabla\Phi v_\nu\, dS - \rho \int\limits_\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t}\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{12}$$

Другий доданок у виразі (8) перетворимо за допомогою формули

$$\frac{1}{2}\int\limits_{S+\Sigma} \left[\boldsymbol{\nu} a^2 - 2(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}\right] dS = \int\limits_Q \left[\boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{a})\right] dQ, \tag{13}$$

яка є наслідком теореми Гаусса – Остроградського і таких співвідношень векторної алгебри:

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a},$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}.$$

Якщо у (13) покласти $\boldsymbol{a} = \nabla\Phi$, то знайдемо

$$\frac{1}{2}\rho\int\limits_S (\nabla\Phi)^2\boldsymbol{\nu}dS = \rho\int\limits_{S+\Sigma}\nabla\Phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,dS - \frac{1}{2}\rho\int\limits_\Sigma(\nabla\Phi)^2\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{14}$$

За теоремою Гаусса – Остроградського можна встановити співвідношення

$$\int\limits_{S+\Sigma}\left[\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\right]\,dS = \int\limits_Q\left[\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\right]\,dQ,$$

з якого при $\boldsymbol{a} = \nabla\Phi$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ випливає вираз

$$\rho\int\limits_S\left[\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{\nu}\,dS = \rho\int\limits_{S+\Sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\nabla\Phi\,dS - \rho\int\limits_Q(\boldsymbol{\omega}\times\nabla\Phi)\,dQ -$$

$$-\rho\int\limits_\Sigma\left[\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{\nu}\,dS - \rho\int\limits_\Sigma v_\nu\nabla\Phi\,dS. \tag{15}$$

Для останнього доданка у виразі (8) одержуємо

$$\rho\int\limits_S U\boldsymbol{\nu}\,dS = -\rho\int\limits_S\left[\boldsymbol{g}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{r}\right)\right]\boldsymbol{\nu}\,dS = -\rho\int\limits_Q\nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r})\,dQ +$$

$$+\rho\int\limits_\Sigma\left[\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{\nu}dS = -m_1\boldsymbol{g} + \rho\int\limits_\Sigma\left[\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{16}$$

де m_1 — маса рідини.

Підставляючи вирази (11), (14) – (16) і використовуючи при цьому динамічну умову (5) на вільній поверхні рідини $\Sigma(t)$, із (8) отримуємо

$$\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{g} - \overset{*}{\boldsymbol{K}} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}. \tag{17}$$

Перейдемо до визначення головного моменту сил тиску $\boldsymbol{N}$ відносно початку рухомої системи координат $Oxyz$.

Підставляючи p із (6) у (7), одержуємо

$$\boldsymbol{N} = -\rho\int\limits_S\boldsymbol{r}\times\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + U\right]\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{18}$$

Перетворимо цей вираз, застосувавши відповідні інтегральні теореми.

Спочатку знаходимо

$$\rho \int\limits_{S+\Sigma} \left(\boldsymbol{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \boldsymbol{\nu} \right) dS = \rho \int\limits_{Q} \left(\boldsymbol{r} \times \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dQ = \rho \int\limits_{Q} \left[\boldsymbol{r} \times \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) \right] dQ =$$

$$= \rho \int\limits_{Q} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi) dQ - \rho \int\limits_{Q} (\boldsymbol{v}_r \times \nabla \Phi) dQ =$$

$$= \rho \frac{d}{dt} \int\limits_{Q} (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi)\, dQ - \rho \int\limits_{\Sigma+S} (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi) v_\nu \, dS - \rho \int\limits_{Q} (\boldsymbol{v}_r \times \nabla \Phi)\, dQ,$$

де $\boldsymbol{v}_r$ — відносна швидкість руху рідини.

Таким чином,

$$\rho \int\limits_{S} \left(\boldsymbol{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \boldsymbol{\nu} \right) dS = \overset{*}{\boldsymbol{G}} - \rho \int\limits_{\Sigma+S} (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi) v_\nu dS -$$

$$- \rho \int\limits_{Q} (\boldsymbol{v}_r \times \nabla \Phi) dQ - \rho \int\limits_{\Sigma} \left(\boldsymbol{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \boldsymbol{\nu} \right) dS, \qquad (19)$$

де $\boldsymbol{G} = \rho \int_Q (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi)\, dQ$ — момент кількості руху обмеженого об'єму рідини Q відносно точки O.

По аналогії з (13) маємо співвідношення

$$\frac{1}{2} \int\limits_{S+\Sigma} \boldsymbol{r} \times \left[\boldsymbol{\nu} a^2 - 2(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{a} \right] dS = \int\limits_{Q} \boldsymbol{r} \times \left[\boldsymbol{a} (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \right] dQ,$$

з якого при $\boldsymbol{a} = \nabla \Phi$ випливає

$$\frac{1}{2} \rho \int\limits_{S} \left[\boldsymbol{r} \times (\nabla \Phi)^2 \boldsymbol{\nu} \right] dS = \rho \int\limits_{S+\Sigma} \left(\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) dS -$$

$$- \frac{1}{2} \rho \int\limits_{\Sigma} \left[\boldsymbol{r} \times (\nabla \Phi)^2 \boldsymbol{\nu} \right] dS = \rho \int\limits_{S+\Sigma} \left(\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) dS +$$

$$+ \rho \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{r} \times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla \Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U \right] \boldsymbol{\nu} dS. \qquad (20)$$

Третій доданок у (18) перетворимо, взявши до уваги (15):

$$\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times[\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{\nu}\,dS=\rho\int\limits_{S+\Sigma}\boldsymbol{r}\times\nabla\Phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,dS-\rho\int\limits_Q \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\nabla\Phi)dQ-$$

$$-\rho\int\limits_\Sigma \boldsymbol{r}\times[\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{\nu}\,dS-\rho\int\limits_{\Sigma+S}(\boldsymbol{r}\times\nabla\Phi)v_\nu\,dS. \tag{21}$$

Для четвертої складової в формулі (18) маємо

$$\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times U\boldsymbol{\nu}\,dS=-\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times\left[\boldsymbol{g}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0'+\boldsymbol{r}\right)\right]\boldsymbol{\nu}\,dS=$$

$$=-\rho\int\limits_Q \boldsymbol{r}\times\nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r})\,dQ+\rho\int\limits_\Sigma \boldsymbol{r}\times\left[\boldsymbol{g}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0'+\boldsymbol{r}\right)\right]\boldsymbol{\nu}\,dS=$$

$$=-m_1\boldsymbol{r}_{1C}\times\boldsymbol{g}+\rho\int\limits_\Sigma \boldsymbol{r}\times\left[\boldsymbol{g}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0'+\boldsymbol{r}\right)\right]\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{22}$$

Підставимо (19) і (20) – (22) у (18). Тоді отримаємо

$$\boldsymbol{N}=m_1r_{1C}\times\boldsymbol{g}-\overset{*}{\boldsymbol{G}}+\rho\int\limits_Q \boldsymbol{v}_r\times\nabla\Phi-\rho\int\limits_Q \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\nabla\Phi)\,dQ.$$

Зважаючи на те, що

$$\boldsymbol{v}_r\times\nabla\Phi=-\boldsymbol{v}_0\times\nabla\Phi-(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\nabla\Phi,$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}\times\nabla\Phi)=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\nabla\Phi)-\nabla\Phi\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),$$

остаточно знаходимо

$$\boldsymbol{N}=m_1\boldsymbol{r}_{1C}\times\boldsymbol{g}-\overset{*}{\boldsymbol{G}}-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G}-\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{K}. \tag{23}$$

Вирази (17) і (23) — це ***математичне формулювання теорем про зміну кількості руху та моменту кількості руху відносно точки O механічної системи резервуар-рідина.***

Кінематичні крайові умови крайової задачі (2) – (4) дозволяють записати потенціал швидкостей $\Phi(x,y,z,t)$ абсолютного руху рідини в рухомій системі координат у вигляді

$$\Phi(x,y,z,t)=\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}+\varphi, \tag{24}$$

де $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ і $\boldsymbol{\Omega}$ — гармонічні вектори, тобто вектори, проекції яких V_1, V_2, V_3 і Ω_1, Ω_2, Ω_3 на осі рухомої системи координат $Oxyz$ є гармонічними функціями, що задовольняють крайові умови

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial \nu}\right|_{S+\Sigma} = \nu_1, \quad \left.\frac{\partial V_2}{\partial \nu}\right|_{S+\Sigma} = \nu_2, \quad \left.\frac{\partial V_3}{\partial \nu}\right|_{S+\Sigma} = \nu_3,$$

$$\left.\frac{\partial \Omega_1}{\partial \nu}\right|_{S+\Sigma} = y\nu_3 - z\nu_2, \quad \left.\frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu}\right|_{S+\Sigma} = z\nu_1 - x\nu_3,$$

$$\left.\frac{\partial \Omega_3}{\partial \nu}\right|_{S+\Sigma} = x\nu_2 - y\nu_1,$$

де ν_1, ν_2, ν_3 — проекції орта $\boldsymbol{\nu}$ на осі системи $Oxyz$.

Гармонічна функція φ у (24) задовольняє граничні умови

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_{S} = \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{|\nabla\zeta|^2}} = \frac{f_t}{N},$$

де $\zeta(x,y,z,t) = x - f(y,z,t) = 0$ — рівняння вільної поверхні $\Sigma(t)$.

Потенціал швидкостей φ характеризує рух рідини, викликаний пружними коливаннями стінок резервуара і гравітаційними силами.

Вирази для $\boldsymbol{P}$ (17) і $\boldsymbol{N}$ (23) перетворимо з урахуванням потенціалу швидкостей $\Phi(x,y,z,t)$ (24).

Спочатку для вектора кількості руху $\boldsymbol{K}$ одержимо

$$\boldsymbol{K} = \rho\int\limits_Q \nabla\Phi\, dQ = m_1\boldsymbol{v}_0 + \rho\int\limits_Q \nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\, dQ + \rho\int\limits_Q \nabla\varphi\, dQ. \tag{25}$$

Перетворимо другий і третій доданки у (25) з урахуванням крайових умов задачі (2)–(5). Маємо

$$\rho\int\limits_Q \nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\, dQ = \rho\int\limits_{S+\Sigma} (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\nu}\, dS = \rho\int\limits_{S+\Sigma}\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\nu}\right)\boldsymbol{r}\, dS =$$

$$= \rho\int\limits_{S+\Sigma}\left[\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nu})\right]\boldsymbol{r}\, dS = \rho\int\limits_Q\left[\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\nabla)\right]\boldsymbol{r}\, dQ =$$

$$= \rho\int\limits_Q (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\; dQ = m_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{1C}, \tag{26}$$

$$\rho\int\limits_Q \nabla\varphi\, dQ = \rho\int\limits_{S+\Sigma}\varphi\,\boldsymbol{\nu}\, dS = \rho\int\limits_{S+\Sigma}\boldsymbol{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, dS, \tag{27}$$

де $\boldsymbol{r}_{1C}$ — радіус-вектор відносно точки O центра мас обмеженого об'єму рідини.

Запишемо потенціал швидкостей φ у вигляді суми

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

складові якої задовольняють такі крайові задачі:

$$\triangle\varphi_1 = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q(t),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\right|_{S(t)} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_0} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{|\nabla\zeta|^2}} = \frac{f_t}{N}, \quad N = \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}, \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\triangle\varphi_2 = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q(t),\\ \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\nu}\right|_{S(t)} = \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\nu}\right|_{\Sigma(t)} = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Крайова задача (28) природно виникає в динаміці твердого тіла з порожнинами, частково заповненими рідиною [2], а крайова задача (29) може бути об'єктом досліджень динаміки пружних тіл із порожнинами, повністю заповненими рідиною.

В розглядуваній тут задачі пружні переміщення $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ трактуються на основі лінійної моделі теорії пружності, в якій розглядається дія поверхневих сил на недеформовану поверхню пружного тіла S_0.

За означенням радіус-вектор центра мас обмеженого об'єму рідини $Q(t)$ визначається формулою

$$m_1\boldsymbol{r}_{1C} = \rho \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{r}\, dQ,$$

у відповідності з якою на основі (10) знаходимо

$$\frac{m_1}{\rho}\overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} = \int\limits_{S+\Sigma} \boldsymbol{r} v_\nu\, dS = \int\limits_{S+\Sigma} \boldsymbol{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, dS = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{r}\frac{f_t}{N}\, dS + \int\limits_{S_0} \boldsymbol{r}\frac{\partial u_\nu}{\partial t}\, dS. \tag{30}$$

Таким чином, вектор кількості руху $\boldsymbol{K}$ на підставі (26), (27) і (30) набирає вигляду

$$\boldsymbol{K} = m_1(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C} + \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C}),$$

а головний вектор сил тиску рідини (17) остаточно має вигляд

$$\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{g} - m_1\left[\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C} + 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} + \overset{**}{\boldsymbol{r}}_{1C}\right]. \tag{31}$$

У відповідності із загальною теорією динаміки відносного руху вираз у квадратних дужках формули (31) є абсолютним прискоренням центра мас обмеженого об'єму рідини $Q(t)$. При цьому група членів

$$\boldsymbol{w}_e = \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C})$$

визначає переносне прискорення, що складається із прискорення полюса $\boldsymbol{w}_0$, відцентрового $\boldsymbol{w}^{\mathrm{c}}$ і обертального $\boldsymbol{w}^{\mathrm{rot}}$:

$$\boldsymbol{w}_0 = \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C}), \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{rot}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C}.$$

Доданки

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{Cor}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{w}_r = \overset{**}{\boldsymbol{r}}_{1C}$$

є відповідно прискоренням Коріоліса і відносним прискоренням.

Знайдемо тепер момент кількості руху $\boldsymbol{G}$ об’єму рідини Q відносно точки O з урахуванням виразу (24) для потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$ абсолютного руху рідини в рухомій системі координат $Oxyz$. Маємо

$$\boldsymbol{G} = \rho \int\limits_Q \boldsymbol{r} \times \nabla\Phi \, dQ = \rho \int\limits_Q \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 \, dQ + \rho \int\limits_Q \boldsymbol{r} \times \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \Omega) \, dQ +$$

$$+ \rho \int\limits_Q \boldsymbol{r} \times \nabla\varphi \, dQ = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 +$$

$$+ \rho \int\limits_{S+\Sigma} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu}) \, dS + \rho \int\limits_{S+\Sigma} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu})\varphi \, dS. \tag{32}$$

Беручи до уваги граничні умови (3), (4) крайової задачі (2)–(5), записуємо вираз (32) у вигляді

$$\boldsymbol{G} = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \rho \int\limits_{S+\Sigma} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \nu} \, dS + \rho \int\limits_{S+\Sigma} \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dS =$$

$$= m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}^1 + \rho \int\limits_{S+\Sigma} \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dS = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}^1 +$$

$$+ \rho \frac{d}{dt} \int\limits_Q \boldsymbol{\Omega} \, dQ - \rho \int\limits_Q \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \, dQ = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}^1 + \overset{*}{\boldsymbol{l}}_\omega - \boldsymbol{l}_{\omega t}, \tag{33}$$

де $J^1_{ij} = \rho \int_{S+\Sigma} \dfrac{\partial \Omega_i}{\partial \nu} \Omega_j \, dS$ — компоненти тензора інерції об’єму рідини $Q(t)$ відносно точки O, $\boldsymbol{l}_\omega = \rho \int_Q \boldsymbol{\Omega} \, dQ$, $\boldsymbol{l}_{\omega t} = \rho \int_Q \dfrac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \, dQ$, $\overset{*}{\boldsymbol{l}}_\omega$ — вектор, проекції якого на осі зв’язаної системи координат дорівнюють похідним від проекцій на них вектора $\boldsymbol{l}_\omega$.

Після визначення моменту кількості руху об’єму рідини $Q(t)$ у формі (33) головний момент сил тиску $\boldsymbol{N}$ відносно точки O набере вигляду

$$\boldsymbol{N} = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \Big(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 - \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0\Big) - \boldsymbol{J}^1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \overset{*}{\boldsymbol{J}}{}^1 \cdot \boldsymbol{\omega} -$$

$$- \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{J}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}\big) - \overset{**}{\boldsymbol{l}}_\omega + \overset{*}{\boldsymbol{l}}_{\omega t} - \boldsymbol{\omega} \times (\overset{*}{\boldsymbol{l}}_\omega - \boldsymbol{l}_{\omega t}).$$

Зазначимо, що $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \overset{*}{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \overset{*}{\boldsymbol{\omega}}$, оскільки система координат $Oxyz$ зв'язана з несучим тілом.

Таким чином, у випадку заданого просторового руху резервуара з пружними стінками рух рідини можна вважати відомим, якщо знайдено розв'язки крайових задач для складових потенціалу швидкостей Ω_i, φ_1 та φ_2. Для побудови цих розв'язків можна використати модальні методи, які ґрунтуються на конструктивних зображеннях збуреної вільної поверхні рідини $\Sigma(t)$ та пружних переміщень стінок резервуара $S(t)$ у вигляді узагальнених рядів Фур'є за системами власних функцій спектральних задач із параметром у крайових умовах.

За аналогією нелінійних задач динаміки рухомих резервуарів з абсолютно жорсткими стінками запишемо шукану збурену вільну поверхню $f(y, z, t)$ у вигляді розвинення

$$f(y, z, t) = \sum_i \beta_i(t) f_i(y, z),$$

де $f_i(y, z)$ — повна ортогональна разом з константою система функцій, задана на незбуреній вільній поверхні рідини Σ_0, а $\beta_i(t)$ — узагальнені коефіцієнти Фур'є, які залежать від часу як від параметра і відіграють у подальшому роль узагальнених координат, що характеризують відхилення вільної поверхні від положення рівноваги:

$$\beta_i(t) = \int\limits_{\Sigma_0} f(y, z, t)\, f_i(y, z)\, dS. \tag{34}$$

В аналогічній формі запишемо також і проекцію вектора пружного переміщення стінок резервуара на зовнішню нормаль до поверхні S_0

$$u_\nu(x, y, z, t) = \sum_k q_k(t)\, f_k^*(x, y, z),$$

де $f_k^* = \varkappa_k^* \varphi_k^*(x, y, z)$ — повна система, задана на недеформованій поверхні резервуара S_0 і породжена введеною раніше автором задачею на власні значення з параметром $\varkappa^*$ у граничній умові (див., наприклад, [3], розд. II, § 5):

$$\begin{gathered} \nabla^2 \varphi^* = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q, \\ \left.\frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu}\right|_{S_0} = \varkappa^* \varphi^*. \end{gathered} \tag{35}$$

Крайова задача на власні значення (35) нарівні з аналогічною задачею

$$\begin{gathered} \nabla^2 \varphi = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q, \\ \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_0} = \varkappa \varphi, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_{S_0} = 0, \end{gathered}$$

яка природно виникає в задачі про гравітаційні хвилі в обмеженому об'ємі рідини з вільною поверхнею, відносяться до базових задач лінійної і нелінійної теорії модальних методів.

Введення до розгляду узагальнених координат $\beta_i(t)$ (34) і $q_k(t)$ за принципом

$$q_k(t) = \int_{S_0} u_\nu(x, y, z, t)\, f_k^*(x, y, z)\, dS \tag{36}$$

дозволяє описувати змінність у часі положення центра мас механічної системи резервуар-рідина зліченною системою координат $\beta_i(t)$ і $q_k(t)$, що дає змогу включити до розгляду більш широке коло задач аналітичної механіки. Зокрема, відкривається можливість більш ґрунтовно розглянути другу задачу динаміки оболонок, частково заповнених рідиною, на основі математичної моделі у вигляді нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Вектор пружних переміщень $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ у другій задачі динаміки також підлягає визначенню, що зумовлює включення до розгляду відповідних рівнянь із частинними похідними теорії оболонок. Кожна із трьох компонент вектора переміщень тепер зображується своєю сукупністю узагальнених координат типу $q_k(t)$ (36), так що розмірність математичних моделей із ростом числа додаткових ступенів вільності в цьому випадку значно збільшується.

В більш повній постановці можуть бути розглянуті також задачі про вільні і вимушені коливання оболонок, частково заповнених рідиною, без додаткових обмежень на мализну деформацій вільної поверхні рідини, які часто виключають із поля зору важливі фізичні процеси [4, 5], та інші.

Література

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
2. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики тел с жидкостью. — Киев: Наук. думка, 2010. — 407 с.
3. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.
4. *Брусиловский А. Д., Шмаков В. П., Яблуков В. А.* Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. —1973. — № 3. — С. 99 – 110.
5. *Троценко В.А., Троценко Ю.В.* Неосесимметричные колебания оболочки вращения, частично заполненной жидкостью // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 3. — С. 394 – 412.

Одержано 21.11.17