НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 3 • 1999

УДК 517.9:519.46

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ $u_{00} - \nabla[u\nabla u]$=0

І.І. Юрик

Укр. ун-т харч. технологій,
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 68

New extended classes of exact solutions of the multidimensional nonlinear wave equation $u_{00}-\nabla[u\nabla u] = 0$ *are obtained.*

Побудовані широкі класи точних розв'язків багатовимірного нелінійного хвильового рівняння $u_{00} - \nabla[u\nabla u] = 0$.

Розглянемо рівняння

$$u_{00} - \nabla[F(u)\nabla u] = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $u_{00} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2}$, ∇ — градієнт, $F(u)$ — довільна функція. Рівняння вигляду (1) широко використовуються для опису нелінійних хвильових процесів. Його група інваріантності G детально досліджена в [1]. В [2] при різних обмеженнях на функцію $F(u)$ знайдено оператори умовної симетрії одновимірного рівняння (1). За допомогою операторів умовної симетрії побудовані анзаци, що редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь. Також знайдені деякі класи точних розв'язків одновимірного рівняння (1). Отримані результати, що відносяться до рівняння (1) для $n = 1$, узагальнені на випадок довільного n.

Дана робота присвячена побудові точних розв'язків багатовимірного рівняння (1) в припущенні, що $F(u) = u$. Для побудови точних розв'язків ми використовуємо метод відокремлення змінних, який дозволив, зокрема, знайти нові розв'язки одновимірного рівняння (1) і без суттєвих змін узагальнити ці результати на випадок довільного n.

Рівняння (1) для випадку $F(u) = u$ набирає вигляду

$$u_{00} - (\nabla u)^2 - u\Delta u = 0, \tag{2}$$

де

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Побудуємо деякі класи точних розв'язків рівняння (2). Розглянемо спочатку випадок $n = 1$.

1. Розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді $u = a(x_0) + b(x_1)$, де функції $a(x_0)$ і $b(x_1)$ відмінні від констант. Підставляючи його в рівняння (2), маємо

$$a'' - b'^2 - ab'' - bb'' = 0. \tag{3}$$

З рівняння (3) випливає, що функції 1, a і a'' лінійно залежні. Оскільки функції 1, a лінійно незалежні, то $a'' = \alpha + \beta a$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Підставляючи a'' в рівняння (3), знаходимо

$$(\beta - b'')a + (\alpha - bb'' - b'^2) = 0.$$

Отже,

$$b'' - \beta = 0, \qquad bb'' + b'^2 - \alpha = 0. \tag{4}$$

Система рівнянь (4) має розв'язок $b = \gamma x_1 + \delta$ при $\beta = 0$; $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Діючи відповідним груповим перетворенням з групи G на функцію $b(x_1)$, можемо її перевести в функцію $2x_1$. Тому можна припустити, що $b(x_1) = 2x_1$. Підставивши $b(x_1)$ в друге рівняння системи (4), отримаємо $\alpha = 4$. Отже, $a = 2x_0^2 + \gamma_1 x_0 + \delta_1$, де γ_1, δ_1 — довільні дійсні числа. Оскільки $a = 2\left(x_0 + \frac{\gamma_1}{4}\right)^2 + \delta_1 - \frac{\gamma_1^2}{8}$, то розв'язок u рівняння (2) відповідним груповим перетворенням з групи G переводиться в розв'язок

$$u = 2(x_1 + x_0^2). \tag{5}$$

Маючи частковий розв'язок (5) рівняння (2), побудуємо інший клас розв'язків рівняння (2). Частковий розв'язок цього класу будемо шукати у вигляді

$$u = 2(x_1 + x_0^2) + f(x_0, x_1). \tag{6}$$

Підставивши (6) в (2), отримаємо рівняння

$$f_{00} - f_1^2 - ff_{11} - 2(x_1 + x_0^2)f_{11} - 4f_1 = 0, \tag{7}$$

де $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{11}}$, $f_{00} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{00}}$.

Анзац $f = \varphi(\omega)$, $\omega = x_1 - x_0^2$, редукує рівняння (7) до звичайного диференціального рівняння

$$\varphi\varphi'' + \varphi'^2 + 2\omega\varphi'' + 6\varphi' = 0.$$

Інтегруючи дане рівняння, отримуємо рівняння Абеля

$$(\varphi + 2\omega)\varphi' + 4\varphi = C, \tag{8}$$

де C — довільна стала.

Таким чином, формула

$$u = 2(x_1 + x_0^2) + \varphi(x_1 - x_0^2),$$

де φ — розв'язок рівняння Абеля (8), визначає розв'язок рівняння (2).

2. Розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)b(x_1)$, де функції $a(x_0)$ і $b(x_1)$ відмінні від констант. Підставивши його в рівняння (2), знаходимо

$$a''b - a^2b'^2 - a^2bb'' = 0.$$

Отримана рівність означає, що функції a'' і a^2 лінійно залежні, а отже, $a'' = \alpha a^2$. Якщо $\alpha = 0$, то $a(x_0) = x_0$ (з точністю до перетворень з групи G) і $b'^2 + bb'' = 0$. Звідси знаходимо, що $b(x_1) = Cx_1^{1/2}$, і тому розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$u = Cx_0 x_1^{1/2}. \tag{9}$$

Якщо $\alpha \neq 0$, то, помноживши функцію $a(x_0)$ на число $\dfrac{\alpha}{6}$, а функцію $b(x_1)$ на $\dfrac{6}{\alpha}$, завжди можна вважати, що $\alpha = 6$. Тому $a(x_0)$ є функцією Вейєрштрасса, тобто $a = \wp(x_0)$. В результаті маємо

$$bb'' + b'^2 - 6b = 0. \tag{10}$$

Рівняння (10) за допомогою заміни змінних $p(b) = b'$ зводиться до рівняння Бернуллі

$$bpp' + p^2 - 6b = 0.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$x_1 + C_1 = \pm \int \frac{db}{\sqrt{\dfrac{C}{b^2} + 4b}}, \tag{11}$$

де C_1, C — довільні сталі.

Таким чином, функція

$$u = \wp(x_0) b(x_1),$$

де $b(x_1)$ визначається за допомогою формули (11), є розв'язком рівняння (2). Зокрема, якщо в формулі (11) $C = 0$, то $b(x_1) = (x_1 + C_1)^2$. Подіявши відповідним груповим перетворенням, можна вважати, що в цьому випадку $b = x_1^2$. Тому розв'язком рівняння (2) є функція

$$u = \wp(x_0) x_1^2, \tag{12}$$

а також

$$u = x_1^2 x_0^{-2}. \tag{13}$$

Маючи частковий розв'язок (12) рівняння (2), побудуємо інший клас розв'язків рівняння (2). Частковий розв'язок рівняння цього класу будемо шукати у вигляді

$$u = x_1^2 \wp(x_0) + f(x_0, x_1). \tag{14}$$

Підстановка (14) перетворює рівняння (2) в рівняння

$$(f_{00} - ff_{11} - f_1^2) - \wp(x_1^2 f_{11} + 4x_1 f_1 + 2f) = 0. \tag{15}$$

Якщо функція f не залежить від x_1, то отримуємо $f_{00} = 2\wp f$. Це рівняння є рівнянням Ламе і його розв'язок добре відомий [3]. Отже, функція

$$u = x_1^2 \wp(x_0) + \Lambda(x_0), \qquad \Lambda'' = 2\wp\Lambda,$$

є розв'язком рівняння (2).

Знайдемо далі розв'язок рівняння (15), який залежить від x_0 і x_1. Розв'язок будемо шукати у вигляді $f = c(x_0)d(x_1)$, де функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. Підставивши його в рівняння (15), отримаємо

$$c''d - c^2(d'^2 + dd'') - \wp c(x_1^2 d'' + 4x_1 d' + 2d) = 0. \tag{16}$$

Отже,

$$c'' = \alpha\wp c + \beta c^2, \tag{17}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Розглянемо випадок $\beta = 0$. Підставивши (17) в (16), знайдемо

$$-c^2(d'^2 + dd'') - \wp c(x_1^2 d'' + 4x_1 d' + (2 - \alpha)d) = 0.$$

Оскільки за умовою функції c^2 і $\wp c$ лінійно незалежні, то для визначення функції $d(x_1)$ отримуємо таку систему рівнянь:

$$x_1^2 d'' + 4x_1 d' + (2 - \alpha)d = 0,$$
$$d'^2 + dd'' = 0.$$

Перше рівняння системи є рівнянням Ейлера і його загальний розв'язок добре відомий [3]. Отже, дана система має розв'язок $d(x_1) = x_1^{1/2}$, якщо $\alpha = \dfrac{15}{4}$. Тоді функція

$$u = \wp(x_0)x_1^2 + c(x_0)x_1^{1/2},$$

де $c'' = \dfrac{15}{4}\wp c$, є розв'язком рівняння (2).

Аналогічно, виходячи з розв'язку (13), отримуємо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = x_0^{-2}x_1^2 + \left(C_1 x_0^{5/2} + C_2 x_0^{-3/2}\right) x_1^{1/2},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Будемо далі шукати розв'язок рівняння (15) у вигляді $f = a(x_0)b(x_1) + c(x_0)$, де функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. Підставляючи його в рівняння (15), отримуємо

$$c'' + a''b - a^2(bb'' + b'^2) - acb'' - a\wp(x_1^2 b'' + 4x_1 b' + 2b) - 2\wp c = 0. \tag{18}$$

Не вдаючись в деталі міркувань, будемо одразу припускати, що $b'' = 0$. Тоді $b(x_1) = \alpha x_1 + \beta$ і можна вважати, що $\beta = 0$. Рівність (18) набирає вигляду

$$c'' + \alpha a'' x_1 - \alpha^2 a^2 - a\wp(4\alpha x_1 + 2\alpha x_1) - 2\wp c = 0.$$

Тому $a'' - 6\wp a = 0$, $c'' = \alpha^2 a^2 + 2\wp c$. Таким чином, розглядуваний розв'язок рівняння (2) можна записати у вигляді

$$u = x_1^2\wp(x_0) + \alpha x_1 \Lambda(x_0) + c(x_0),$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Lambda'' = 6\wp\Lambda$, а функція $c(x_0)$ є розв'язком рівняння $c'' = \Lambda'' + 2\wp c$.

Якщо виходити з розв'язку (13), то аналогічно знаходимо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = x_0^{-2}x_1^2 + C_1 x_0^3 x_1 + \frac{C_1^2}{54}x_0^8 + C_2 x_0^{-1} + C_3 x_0^2,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)b(x_1) + c(x_0)$, де функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. Підставляючи його в рівняння (2), отримуємо

$$a''b + c'' - a^2(b'^2 + bb'') - acb'' = 0.$$

Якщо $c'' = \alpha a^2$, $a'' = 0$, то

$$a^2(\alpha - b'^2 - bb'') - acb'' = 0.$$

Звідси випливає

$$b'^2 + bb'' - \alpha = 0, \qquad b'' = 0.$$

Розв'язком такої системи з точністю до перетворень з групи G є функція $b = x_1$ при умові $\alpha = 1$. Тоді з умови $c'' = \alpha a^2$, $a'' = 0$ отримуємо $a = x_0$, $c = \dfrac{1}{12}x_0^4 + \gamma x_0 + \delta$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Отже, функція

$$u = x_0 x_1 + \frac{1}{12}x_0^4 + \gamma x_0 + \delta$$

є розв'язком рівняння (2).

3. Перейдемо до побудови точних розв'язків рівняння (2) для випадку $n > 1$. Розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)b(x_1, \ldots, x_k)$, $k \leq n$. Підставляючи його в рівняння (2), знаходимо

$$a''b - a^2\left[b\Delta b + (\nabla b)^2\right] = 0.$$

Тому $a'' = \alpha a^2$ і в результаті отримуємо таке рівняння для визначення функції $b(x_1, \ldots, x_k)$:

$$b\Delta b + (\nabla b)^2 - \alpha b = 0. \tag{19}$$

Якщо $\alpha \neq 0$, то завжди можна вважати, що $\alpha = 6$. При такому значенні α рівняння (19) має розв'язок $b = \dfrac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)$ і, отже, розв'язками рівняння (2) є функції

$$u = \frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)\wp(x_0), \tag{20}$$

$$u = \frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)x_0^{-2}. \tag{21}$$

Виходячи з розв'язку (20), побудуємо інший розв'язок рівняння (2). Цей розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u = \frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)\wp(x_0) + f(x_0, x_1, \ldots, x_k). \tag{22}$$

Підстановка (22) перетворює рівняння (2) в рівняння

$$f_{00} - (\nabla f)^2 - f\Delta f - \\ -\wp\left[\frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)\Delta f + \frac{3}{k+2}(4x_1 f_1 + \cdots + 4x_k f_k) + \frac{6k}{k+2}f\right]. \tag{23}$$

Якщо в рівнянні (23) f не залежить від змінних $x_1, \dots, x_k$, то $f_{00} = \dfrac{6k}{k+2} f$ і тому функція

$$u = \frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)\wp(x_0) + \Lambda(x_0), \Lambda'' = \frac{6k}{k+2}\Lambda, \tag{24}$$

є розв'язком рівняння (2).

Нехай в рівнянні (23) функція f залежить від усіх змінних. Розв'язок рівняння (23) шукаємо у вигляді $f = a(x_0)b(x_1, \dots, x_k) + c(x_0)$, де функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. Підставляючи його в рівняння (23), отримуємо

$$c'' + a''b - a^2\left[b\delta b + (\nabla b)^2\right] - ac\Delta b - a\wp\left[\frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)\Delta b + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{k+2}\left(4x_1b_1 + \cdots + 4x_kb_k\right) + \frac{6k}{k+2}b\right] - \frac{6k}{k+2}\wp c = 0.$$

Нехай, $b = \alpha x_1$, тоді

$$c'' + \alpha x_1 a'' - \alpha^2 a^2 - a\wp\left[\frac{3}{k+2}(4\alpha x_1) + \frac{6k}{k+2}\alpha x_1\right] - \frac{6k}{k+2}\wp c = 0.$$

Тому

$$a'' = 6\wp a, \qquad c'' = \alpha^2 a^2 + \frac{6k}{k+2}\wp c.$$

Таким чином, розглядуваний розв'язок рівняння (2) можна подати у вигляді

$$u = \frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)\wp(x_0) + \alpha x_1\Lambda(x_0).$$

Якщо в рівнянні (19) $\alpha = 0$, то $a = x_0$ (з точністю до перетворень з групи G). Для визначення функції $b(x_1, \dots, x_k)$ отримуємо рівняння $b\Delta + (\nabla b)^2 = 0$. Дане рівняння за допомогою заміни $b = G^{1/2}$ зводиться до рівняння $\Delta G = 0$. Отже, $b = G^{1/2}$, де G — довільна гармонічна функція. Тому розв'язок рівняння (2) в даному випадку має вигляд

$$u = x_0 G^{1/2}.$$

Цей розв'язок є узагальненням розв'язку (9) для одновимірного рівняння (2).

Якщо виходити з розв'язку (21), то аналогічно знаходимо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = \frac{3}{k+2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)x_0^{-2} + C_1 x_1 x_0^3 + \frac{(k+2)C_1^2}{50k+112}x_0^8 +$$
$$+ C_2 x_0^{\left(1+\sqrt{\frac{25k+2}{k+2}}\right)/2} + C_3 x_0^{\left(1-\sqrt{\frac{25k+2}{k+2}}\right)/2},$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Новий клас розв'язків рівняння (2) побудуємо, якщо використаємо підстановку

$$u = x_1^2\wp(x_0) + f(x_0, x_2, x_3).$$

Підставляючи в рівняння (2), знаходимо

$$f_{00} - (\nabla f)^2 - f(\Delta f) - \wp\left[x_1^2\Delta + 2f\right] = 0.$$

Оскільки функція f не залежить від x_1, то $\Delta f = 0$ і ми отримуємо систему рівнянь для визначення функції f:

$$f_{22} + f_{33} = 0,$$
$$f_{00} - f_2^2 - f_3^2 - 2\wp f = 0.$$

Розв'язок системи шукаємо у вигляді $f = a(x_0)x_2 + b(x_0)x_3 + c(x_0)$. Підставляючи його в друге рівняння системи, отримуємо

$$a''x_2 + b''x_3 + c'' - a^2 - b^2 - 2\wp(ax_2 + bx_3 + c) = 0.$$

Тому $a'' = 2\wp a$, $b'' = 2\wp b$, $c'' = a^2 + b^2 + 2\wp c$ і, отже, розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$u = \wp(x_0)x_1^2 + a(x_0)x_2 + b(x_0)x_3 + c(x_0),$$

де $a'' = 2\wp a$, $b'' = 2\wp b$, $c'' = a^2 + b^2 + 2\wp c$.

Якщо використовувати анзац

$$u = x_0^{-2}x_1^2 + f(x_0, x_2, x_3),$$

то аналогічним чином будуємо розв'язок рівняння (2):

$$u = x_0^{-2}x_1^2 + \left(C_1x_0^2 + C_2x_0^{-1}\right)x_2 + \left(C_3x_0^2 + C_4x_0^{-1}\right)x_3 +$$
$$+\frac{C_1^2 + C_3^2}{28}x_0^6 + \frac{C_1C_2 + C_3C_4}{2}x_0^3 - \frac{C_2^2 + C_4^2}{2}.$$

Використовуючи анзац

$$u = \frac{3}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\wp(x_0) + f(x_0, x_3),$$

отримуємо ще один розв'язок рівняння (2):

$$u = \frac{3}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\wp(x_0) + \Lambda(x_0)x_3 + c(x_0),$$

де $\Lambda'' = 3\wp\lambda$, $c'' = \Lambda^2 + 3\wp c$.

У випадку, коли використовуємо анзац

$$u = \frac{3}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_0^{-2} + f(x_0, x_3),$$

знаходимо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = \frac{3}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_0^{-2} + \left(C_1x_0^{(1+\sqrt{13})/2} + C_2x_0^{(1-\sqrt{13})/2}\right)x_3 +$$
$$+\frac{C_1^2}{19 + 5\sqrt{13}}x_0^{3+\sqrt{13}} + \frac{C_2^2}{19 - 5\sqrt{13}}x_0^{3-\sqrt{13}} + \frac{2C_1C_2}{3}x_0^3.$$

1. *Amines W.F., Lokner R.J.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. — 1981. — **16**, № 16. — P. 439 – 497.
2. *Фущич В.І., Серов М.І., Репета В.К.* Умовна симетрія, редукція і точні розв'язки нелінійного хвильового рівняння // Допов. АН України. — 1991. — № 5. – С. 29 – 34.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

Одержано 14.05.98