НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 3 • 1999

517.44:519.46

СИММЕТРИЙНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СНОСА И ДИФФУЗИИ

С.В. Спичак*

Ин-т математики НАН Украины,
Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: spichak@apmat.freenet.kiev.ua

В.И. Стогний

Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”,
Украина, 252056, Киев, пр. Победы, 37
e-mail: valerii@apmat.freenet.kiev.ua

Symmetry properties of the one-dimentional Fokker – Planck equations with arbitrary coefficients of drift and diffusion are investigated. It is proved that the group symmetry of these equations can be one-, two-, four- or six-parametric and corresponding criteries are obtained. The changes of the variables reducing Fokker – Planck equations to the heat equation and Schrödinger one with certain potential are determined.

Вивчається симетрія одновимірних рівнянь Фоккера – Планка для довільних коефіцієнтів знесення та дифузії. Доведено, що група симетрії цих рівнянь може бути одно-, дво-, чотири- чи шестипараметричною, і встановлено відповідні критерії. У випадку, коли рівняння Фоккера – Планка допускають шести- і чотирипараметричну групи, отримано заміни змінних, які зводять ці рівняння відповідно до рівняння теплопровідності і рівняння Шредінгера з певним потенціалом.

Введение. Уравнение Фоккера – Планка (УФП) является основным уравнением в теории непрерывных марковских процессов. В одномерном случае оно имеет вид [1,2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u], \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$ — переходная плотность вероятности, $A(t,x)$ и $B(t,x)$ — достаточно гладкие функции, соответственно называемые коэффициентами сноса и диффузии. Будем предполагать, что все условия, при которых правомерно использование операций дифференцирования, интегрирования, выполняются. Возникновение названия уравнения (1) связано с работами Фоккера [3] и Планка [4], в которых оно встречалось. Фоккер исследовал броуновское движение в поле излучения, а Планк на этой основе попытался построить полную теорию флуктаций. Строгое математическое обоснование УФП было дано А.Н Колмогоровым [1]. Уравнение (1), определяющее временной ход плотности вероятности для данной системы, является основой аналитических методов изучения

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № 1.4/356).

диффузионных процессов в естественных науках [5 – 9]. В последнее время интенсивно развиваются теоретико-групповые методы исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Исследованием симметрийных свойств уравнения теплопроводности (частного случая УФП) занимался еще С. Ли [10]. Нахождению групп симметрии УФП с различными коэффициентами сноса и диффузии посвящены работы [9, 11 – 17]. С использованием замены [6, 18] в работе [17] дана полная классификация с симметрийной точки зрения УФП при $A(t,x) \equiv A(x)$ и $B(t,x) \equiv B(x)$ (соответствующие однородному диффузионному процессу). В настоящей работе мы осуществим полную симметрийную классификацию УФП (1) для произвольных коэффициентов сноса и диффузии. Кроме того, рассмотрим ряд других задач, тесно примыкающих к теоретико-алгебраическим исследованиям уравнения (1). Для исследования симметрийных свойств уравнения (1) используем алгоритм Ли [19, 20]. В подходе Ли операторы алгебры инвариантности записываются в виде

$$X = \xi^0(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2}$$

и определяются из условия инвариантности

$$\underset{2}{\hat{X}} L|_{L=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u],$$

$\underset{2}{\hat{X}}$ — второе продолжение оператора X, которое строится по формулам Ли [19, 20].

Из этих формул и условия инвариантности (3) можно получить следующую систему уравнений для функций ξ^0, ξ^1, η:

$$\begin{gathered}
\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(t,x),\ \eta = \chi(t,x)u, \\
2\xi^1_x B - \xi^0_t B - \xi^1 B_x - \xi^0 B_t = 0, \\
\xi^0_t(A - B_x) - \xi^1_t + \xi^0(A_t - B_{tx}) + \xi^1(A_x - B_{xx}) - \xi^1_x(A - B_x) + \frac{1}{2}B\xi^1_{xx} = B\chi_x, \\
\chi_t + \xi^0_t\left(A_x - \frac{1}{2}B_{xx}\right) + \xi^0\left(A_{tx} - \frac{1}{2}B_{txx}\right) + \\
+\xi^1\left(A_{xx} - \frac{1}{2}B_{xxx}\right) + \chi_x(A - B_x) - \frac{1}{2}B\chi_{xx} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь нижние индексы t, x означают дифференцирование по соответствующим переменным. Введем также обозначения $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$, $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$, $\frac{\partial}{\partial u} = \partial_u$.

Замечание 1. Здесь не рассматриваются операторы симметрии $f(t,x)\frac{\partial}{\partial u}$, где $f(t,x)$ — произвольное решение уравнения (1).

1. Основная теорема. Теорема 1. *Если УФП (1) имеет хотя бы один оператор симметрии (2) $Q \neq u\partial_u$, то существует преобразование вида*

$$\tilde{t} = T(t),\ \tilde{x} = X(t,x),\ u = v(t,x)\tilde{u},$$

которое сводит его к уравнению (1) с $A = A(\tilde{x})$, $B = B(\tilde{x})$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует решение ξ^0, ξ^1, χ определяющих уравнений (4) такое, что ξ^0, ξ^1 не равны тождественно нулю одновременно. Действительно, из условий $\xi^0 \equiv \xi^1 \equiv 0$ следует, что $\chi = \lambda = \mathrm{const}$, т. е. $Q = u\partial_u$. Далее рассмотрим две возможности:

1) существует решение $\xi^0 \not\equiv 0, \xi^1, \chi$;

2) существует решение $\xi^0 \equiv 0, \xi^1 \not\equiv 0, \chi$ (в этом случае все $\xi^0 \equiv 0$).

Докажем теорему для каждого из этих случаев.

1. Пусть $\xi^0 \not\equiv 0,\ \xi^1,\ \chi$ — решение определяющих уравнений (4). Рассмотрим преобразование

$$\tilde{t} = T(t),\ \tilde{x} = \omega,\ u = v(t,x)\tilde{u}, \tag{5}$$

где $T(t) = \displaystyle\int \frac{dt}{\xi^0(t)}$, а функции $\omega = \omega(t,x)$, $v(t,x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\xi^0\omega_t + \xi^1\omega_x = 0, \\ &\xi^0 v_t + \xi^1 v_x = \chi v. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть далее $\omega \neq \mathrm{const}$ — любое фиксированное решение. Нетрудно показать, что оператор симметрии

$$Q = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \chi u\partial_u$$

в новых переменных $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u})$ имеет вид $\tilde{Q} = \partial_{\tilde{t}}$. Покажем теперь, что среди класса преобразований (5) существует такое, которое уравнение (1) переводит в УФП с коэффициентами $\tilde{A}(\tilde{t},\tilde{x})$, $\tilde{B}(\tilde{t},\tilde{x})$. Но поскольку преобразованное уравнение имеет оператор симметрии $\tilde{Q} = \partial_{\tilde{t}}$, то отсюда будет следовать $\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{x})$, $\tilde{B} = B(\tilde{x})$. Итак, применяя преобразование (5) к уравнению (1), получаем следующее уравнение в новых переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\tilde{t}} = \frac{\xi^0}{v}\Bigg\{&\left[-v_t + \left(\frac{1}{2}B_{xx} - A_x\right)v + (B_x - A)v_x + \frac{1}{2}Bv_{xx}\right]\tilde{u} + \\ &+\left[-v\omega_t + (B_x - A)v\omega_x + \frac{1}{2}B(2v_x\omega_x + v\omega_{xx})\right]\tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{1}{2}Bv\omega_x^2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь подразумевается, что в выражениях, которые зависят от переменных (t,x), нужно сделать замену $(t,x) \to (\tilde{t},\tilde{x})$. Для того чтобы уравнение (7) было УФП, необходимо, чтобы существовали такие функции $\tilde{A}(\tilde{t},\tilde{x})$, $\tilde{B}(\tilde{t},\tilde{x})$, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\tilde{B}(\tilde{t},\tilde{x}) = B\xi^0\omega_x^2, \\ &\tilde{B}_{\tilde{x}} - \tilde{A} = -\xi_0\omega_t + (B_x - A)\xi_0\omega_x + \frac{v_x}{v}\xi_0\omega_x B + \frac{1}{2}\xi_0\omega_{xx}B, \\ &\frac{1}{2}\tilde{B}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \tilde{A}_{\tilde{x}} = -\xi_0\frac{v_t}{v} + \left(\frac{1}{2}B_{xx} - A_x\right)\xi_0 + \xi_0\frac{v_x}{v}(B_x - A) + \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}\xi_0 B. \end{aligned} \tag{8}$$

а) Рассмотрим первое из уравнений (8). Покажем, что $\partial_{\tilde{t}}\tilde{B} = 0$. Из преобразований (5), (6) нетрудно получить

$$\partial_{\tilde{t}} = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x. \tag{9}$$

Тогда из первого уравнения (6) и (9) вытекает

$$\partial_{\tilde{t}}(B\xi^0\omega_x^2) = \xi^0\omega_x^2[\xi^0 B_t + \xi^1 B_x + \xi_t^0 B - 2B\xi_x^1] = 0.$$

Последнее равенство выполняется в силу уравнений (4).

б) Рассмотрим второе уравнение системы (8). Из первого уравнения этой системы получаем

$$\tilde{B}_{\tilde{x}} = \frac{\xi^0}{\omega_x}\partial_x(B\omega_x^2).$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (8), находим $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \xi^0\omega_t + A\xi^0\omega_x - \frac{v_x}{v}\xi^0\omega_x B + \frac{3}{2}\xi^0\omega_{xx}B. \tag{10}$$

Как и в п. а), можно показать, что следствием системы уравнений (4) является соотношение

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{A} = (\xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x)\left[\xi^0\omega_t + A\xi^0\omega_x - \frac{v_x}{v}\xi^0\omega_x B + \frac{3}{2}\xi^0\omega_{xx}B\right] = 0.$$

Отсюда получаем $\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{x})$.

в) Рассмотрим третье уравнение системы (8). Из пп. а) и б) следует, что левая часть этого уравнения $\frac{1}{2}\tilde{B}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \tilde{A}_{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) = F(\omega)$. Из второго уравнения системы (6) следует, что $v(t,x) = v^*(t,x)G(\omega)$, где $v^*(t,x)$ — частное решение этого уравнения, $G(\omega)$ — произвольная функция. Подставляя это соотношение в правую часть третьего из уравнений (8), получаем

$$F(\omega) = F_1(t,x) + F_2(t,x)G' + F_3(t,x)[G'' + G'^2],\ F_3(t,x) \neq 0.$$

Так же, как и в пп. а), б), можно убедиться, что с учетом уравнений (4), (6) выполняются соотношения

$$\partial_{\tilde{t}}F_i(t,x) = [\xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x]F_i(t,x) = 0, \quad i = 1,2,3.$$

Таким образом, $F_i = F_i(\tilde{x}) = F_i(\omega)$. Окончательно имеем

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega)G' + F_3(\omega)[G'' + G'^2], \quad F_3 \neq 0.$$

Выбирая в качестве функции $G(\omega)$ частное решение этого уравнения, получаем преобразование (5), где $T = \int \frac{dt}{\xi^0}$, $v(t,x) = v^*(t,x)G(\omega)$, которое сводит соответствующее УФП (1) к УФП с коэффициентами $\tilde{B}(\tilde{x})$, $\tilde{A}(\tilde{x})$.

2. Пусть существует решение определяющих уравнений (4) $\xi^0 \equiv 0,\ \xi^1 \neq 0,\ \chi$. В этом случае выберем преобразование

$$\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = R(t,x),\ u = v(t,x)\tilde{u} \tag{11}$$

при условии

$$\xi^1 R_x = 1, \qquad \xi^1 v_x = \chi v. \tag{12}$$

Доказательство того, что существует преобразование (11), (12), сводящее УФП к уравнениям того же типа, аналогично доказательству, приведенному в п. 1. При этом оператор $Q = \xi^1 \partial_x + \chi u \partial_u$ сводится к $\tilde{Q} = \partial_{\tilde{x}}$. Таким образом, новые коэффициенты $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ в преобразованном УФП зависят только от t. Как известно, такие уравнения сводятся к уравнению теплопроводности преобразованиями вида

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = R(t,x), \quad u = v(t,x)\tilde{u}. \tag{13}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *УФП (1) может иметь алгебру инвариантности 1, 2, 4, 6.*

Доказательство. Если алгебра размерности больше 1, то она сводится к уравнению с $\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{x})$, $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{x})$, а классификация таких уравнений известна: размерность их алгебры инвариантности либо 2, либо 4, либо 6.

2. Критерии инвариантности УФП относительно четырех- и шестипараметрической группы симметрии. В работе [21] показано, что любой диффузионный процесс с коэффициентом переноса $A(t,x)$ и коэффициентом диффузии $B(t,x)$ можно свести с помощью случайной замены времени $\tau(t)$ к диффузионному процессу с соответствующими коэффициентами $\tilde{A}(t,x) = A(t,x)/B(t,x)$ и $\tilde{B}(t,x) = 1$. Используя результат теоремы 1, выполним классификацию УФП для коэффициента $B(t,x) = 1$ и произвольного $A(t,x)$ подобно тому, как это было сделано в [17] для случая $A = A(x)$ (однородный процесс). Итак, полагая в уравнениях (4) $B = 1$, можно показать, что выполняются соотношения

$$\begin{gathered}
\xi^0 = \tau(t), \quad \xi^1 = \frac{1}{2}x\tau' + \varphi(t), \\
\frac{3}{2}\tau' M + \tau M_t + \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right) M_x = \frac{1}{2}\tau''' x + \varphi'', \\
\chi = \frac{1}{2}\tau' x A(t,x) - \frac{1}{4}x^2\tau'' - \varphi' x + \varphi A(t,x) + \tau \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial A(t,\xi)}{\partial t} d\xi + \theta(t),
\end{gathered} \tag{14}$$

где $M = A_t + \frac{1}{2}A_{xx} + AA_x$, x_0 — произвольная точка, $\theta(t)$ — произвольная функция.

Найдем условие, которому удовлетворяет M, такое, чтобы существовало, по крайней мере, 2 линейно независимых решения $\tau(t)$ уравнения (14). Из следствия теоремы 1 вытекает, что существует либо 3, либо 5 операторов симметрии (помимо тривиального $u\partial_u$). Предположим, что $M_{xx} \neq 0$. Продифференцировав дважды по x обе части (14), получим

$$\frac{5}{2}\tau' M_{xx} + \tau M_{txx} + \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right) M_{xxx} = 0. \tag{15}$$

Теперь, если предположить, что $M_{xxx} = 0$, т. е. $M_{xx} = F(t)$, получим условие

$$\frac{5}{2}\tau' F + \tau F' = 0. \tag{16}$$

Для этого уравнения существует только одно линейно независимое решение, поэтому $M_{xxx} \neq 0$. Тогда из (15) получаем

$$-\varphi(t) = \frac{5M_{xx} + xM_{xxx}}{2M_{xxx}}\tau' + \frac{M_{txx}}{M_{xxx}}\tau = h(t,x)\tau' + r(t,x)\tau.$$

Отсюда следует, что если (τ_1, φ_1), (τ_2, φ_2) — линейно независимы, то и τ_1, τ_2 — линейно независимы, а также $h_x\tau' + r_x\tau = 0$. Таким образом,

$$h_x\tau_1' + r_x\tau_1 = 0, \quad h_x\tau_1' + r_x\tau_1 = 0.$$

Поскольку вронскиан $\begin{vmatrix} \tau_1' & \tau_1 \\ \tau_2' & \tau_2 \end{vmatrix} \neq 0$, из этой системы вытекает $h_x \equiv 0, r_x \equiv 0$, т. е.

$$\frac{5M_{xx} + xM_{xxx}}{2M_{xxx}} = h(t), \quad \frac{M_{xxt}}{M_{xxx}} = r(t). \tag{17}$$

Из условий (17) нетрудно получить

$$M = \lambda(x - H(t))^{-3} + F(t)x + G(t), \tag{18}$$

где $\lambda = \text{const} \neq 0$, H, F, G — произвольные функции.

Заметим, что если $M_{xx} = 0$, то M имеет вид (18) с $\lambda = 0$. Таким образом, условие (18) является необходимым для того, чтобы алгебра инвариантности имела размерность либо 4, либо 6. Подставляя (18) в (15) и приравнивая нулю коэффициенты при $x - H$, $(x-H)^{-4}$ и 1, получаем следующие условия:

$$\begin{aligned} &2\tau' F + \tau F' = \frac{1}{2}\tau''', \quad \lambda\left(\tau H' - \frac{1}{2}\tau' H - \varphi\right) = 0, \\ &\frac{3}{2}\tau'(FH + G) + \tau(F'H + G') + F\left(\frac{1}{2}\tau' H + \varphi\right) = \frac{1}{2}\tau''' H + \varphi'''. \end{aligned} \tag{19}$$

1. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда, выражая из второго уравнения $\varphi(t) = \tau H' - \dfrac{1}{2}\tau' H$ и подставляя его в третье уравнение, получаем $\dfrac{3}{2}\tau'(FH + G - H'') + \tau(FH + G - H'')' = 0$. Условие существования по крайней мере двух независимых решений τ_1, τ_2 приводит к уравнению $FH + G - H'' = 0$. В этом случае система (19) имеет три фундаментальных решения. Действительно, есть три линейно независимых решения τ_1, τ_2, τ_3 первого уравнения (19). Из второго уравнения (19) φ_i выражается через τ_i, $i = 1, 2, 3$.

2. Если $\lambda = 0$, то система уравнений (19) имеет 5 решений (τ_i, φ_i), $i = \overline{1, 5}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *1. Класс УФП (1) при $B = 1$, допускающих четырехмерную алгебру инвариантности, описывается условием*

$$A_t + \frac{1}{2}A_{xx} + AA_x = \lambda(x - H(t))^{-3} + F(t)x + G(t), \tag{20}$$

где $\lambda = \text{const} \neq 0$, *$G$ удовлетворяет условию*

$$G = H'' - FH, \tag{21}$$

$F(t)$, $H(t)$ — произвольные функции.

2. Класс УФП (1) при $B = 1$, допускающих шестимерную алгебру инвариантности, описывается условием (20), в котором $\lambda = 0$, F и G — произвольные функции.

Замечание 2. В частности, если коэффициент $A(t, x)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса, то УФП (1) сводится к уравнению теплопроводности (см. [22]).

3. Преобразование УФП к однородным. 1. Оказывается, что УФП (1) ($B = 1$), (20) при $\lambda = 0$ сводится к уравнению теплопроводности [12, 23]. Найдем соответствующее преобразование (5), (6). Пусть τ — любое решение системы (19) и $\tau > 0$. С помощью формул (6), (14) нетрудно убедиться, что $\omega = \tau^{-1/2}x - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\tau^{-3/2}dt$, где t_0 — произвольное фиксированное значение (всегда можно выбрать решение $\tau(t) > 0$ на каком-либо интервале). Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned}
&\tilde{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\tau},\\
&\tilde{x} = \omega = \tau^{-1/2}x - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\tau^{-3/2}d\xi,\\
&u(t, x) = v(t, x)\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}).
\end{aligned} \tag{22}$$

Выполнив в (1), (20) замену переменных (22), получим уравнение

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = -2\tau\left(\frac{v_t}{v} + A_x + A\frac{v_x}{v} - \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}\right)\tilde{u} - 2\left(-\frac{1}{2}\tau^{1/2}\tau' x - \right.$$

$$\left. -\varphi\tau^{-1/2} + A\tau^{1/2} - \frac{v_x}{v}\tau^{1/2}\right)\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \tag{23}$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\tilde{u}_{\tilde{x}}$, имеем

$$v = \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^{-1}\tau' x^2 - \tau^{-1}\varphi x + \int\limits_{x_0}^{x} A(t, \xi)d\xi + h(t)\right), \tag{24}$$

где $h(t)$ — произвольная функция, x_0 — произвольное фиксированное число. Подставляя (24) в выражение $\dfrac{v_t}{v} + A_x + A\dfrac{v_x}{v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{v_{xx}}{v}$ (коэффициент при $\tilde{u}$ в (23)) и приравнивая его нулю, получаем

$$h'(t) = \frac{1}{2}\left[\tau^{-2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\tau^{-1}\tau^1 - A_x(t, x_0) - A^2(t, x_0)\right], \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}\tau^{-1}\tau'' - \frac{1}{4}\tau^2(\tau')^2 = F, \quad \tau^{-1}\varphi' - \frac{1}{2}\tau^2\tau'\varphi = G. \tag{26}$$

Нетрудно убедиться, что если $(\tau \neq 0,\ \varphi)$ — любое решение системы (26), то оно удовлетворяет системе (19) $(\lambda = 0, M = 0)$. Всегда можно считать, что $\tau > 0$ на каком-либо промежутке (сделав, если необходимо, замену $\tau \to \tau$, $\varphi \to -\varphi$). Тогда мы имеем преобразование (22), (24), (25), сводящее УФП (1), (20) $(c\ \lambda = 0)$ к уравнению теплопроводности

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \tag{27}$$

Заметим, что система (26) сводится к следующей:

$$2y' + y^2 = 4F, \quad y = \frac{\tau'}{\tau}, \quad \varphi = \tau^{1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\tau^{1/2}G dt. \tag{28}$$

2. Рассмотрим теперь УФП (1), (20) с $\lambda \neq 0$. Как и в случае 1, преобразование (22) сводит это уравнение к уравнению (23). Условие того, что (23) является УФП, следующее:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \tilde{A}(\omega) &= -\frac{1}{2}\tau^{-1/2}\tau' x - \varphi\tau^{-\frac{1}{2}} + A\tau^{1/2}\tau^{1/2}\frac{v_x}{v}, \\ \tilde{A}_\omega &= \tau\left(\frac{v_t}{v} + A_x + A\frac{v_x}{v} - \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

где ω задано в (22).

Первое условие эквивалентно уравнению (см. (9))

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{A}\left[\tau\partial_t + \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right)\partial_x\right]\left(\frac{1}{2}\tau^{-1/2}\tau' x - \varphi\tau^{\frac{1}{2}} + A\tau^{1/2} - \tau^{1/2}\frac{v_x}{v}\right) = 0. \tag{30}$$

Опуская промежуточные вычисления, записываем общее решение $v(t,x)$ уравнения (30) в виде

$$v(t,x) = \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x} A(t,\xi)d\xi - \frac{1}{4}\tau^{-1}\tau' x^2 - \tau^{-1}\varphi x + k(\omega)\right], \tag{31}$$

где $k(\omega)$ — произвольная функция, x_0 — фиксированная точка.

Подставляя (31) в первое уравнение (29), нетрудно убедиться, что $\tilde{A} = -k'(\omega)$ $\left(k'(\omega) = \dfrac{dk(\omega)}{d\omega}\right)$. Подставим далее $\tilde{A}(\omega) = -k'(\omega)$, $v(t,x)$ (31) во второе уравнение (29). Можно убедиться, что выбрав условия

$$\tau^{1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\varphi\tau^{-3/2}dt = H, \quad \frac{1}{2}\tau^{-1}\tau'' - \frac{1}{4}\tau^{-2}\tau'^2 = F, \quad \tau^{-1}\varphi' - \frac{1}{2}\tau^{-2}\tau'\varphi = G, \tag{32}$$

$$k'' - k'^2 = \lambda\omega^{-2}, \tag{33}$$

мы удовлетворим уравнение (29). Условие (32) можно выбрать потому, что любое решение $\tau \neq 0, \varphi$ данной системы, как нетрудно убедиться, является частным решением системы уравнений (19), (21), чего достаточно для построения преобразования (22). Система (32) (с учетом (21)) эквивалентна следующей:

$$2y' + y^2 = 4F, \quad y = \frac{\tau'}{\tau}, \quad \varphi = \tau^{3/2}(\tau^{-1/2}H)'. \tag{34}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *УФП (1), (20), (21) с $\lambda \neq 0$, инвариантное относительно четырехмерной алгебры инвариантности, с помощью преобразований*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \tau^{-1/2}x - \tau^{-1/2}H(t), \quad u = v(t,x)\tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x}),$$

где $T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dt}{\tau(t)}$, $v(t,x)$ имеет вид (31), $\tau \neq 0$ — произвольное решение первого уравнения (34), $k(\omega)$ — решение уравнения (33), сводится к уравнению

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = 2k''(\omega)\tilde{u} + 2k'(\omega)\tilde{u}_\omega + \tilde{u}_{\omega\omega}.$$

Если в последнем уравнении сделать замену

$$\bar{t} = \tilde{t}, \quad \bar{x} = \omega, \quad \tilde{u} = \exp(-k(\omega))\bar{u},$$

то это уравнение в силу условия (33) сведется к уравнению Шредингера

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{\lambda}{\bar{x}^2}\bar{u}.$$

Таким образом, в случае УФП с четырехпараметрической группой симметрии существует „каноническое” уравнение, к которому они сводятся, хотя оно и не является УФП, как это имело место в случае шестипараметрической группы.

4. Примеры однородных УФП, имеющих шести- и четырехпараметрическую группу симметрии. В п. 3 мы указали необходимое и достаточное условие сводимости УФП (1) с коэффициентом диффузии $B = 1$ к однородному УФП с $B = 1$, т. е. к уравнению с коэффициентом сноса $A = A(x)$. Также построены соответствующие замены переменных $(t,x,u) \to (\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u})$. Поэтому вполне естественно теперь привести примеры однородных уравнений, которые часто встречаются в приложениях.

А. Уравнения, сводящиеся к уравнению теплопроводности.

1. Уравнение, описывающее процесс Орнштейна – Уленбена [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k}(kxu) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{35}$$

Здесь $A = -kx$, $B = D = \mathrm{const}$.

Далее во всех примерах, где $B = \mathrm{const} \neq 0$, можно, без ограничения общности, положить $B = 1$. С помощью замены

$$u(t,x) = v(t,x)\tilde{u}(\tilde{t}(t), \tilde{x}(t,x)), \tag{36}$$

где $v(t,x)$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$ — функции, которые находятся из формул (22), (24) – (26):

$$v = \exp(kt), \quad \tilde{x} = \exp(kt)x, \quad \tilde{t} = \frac{1}{4k}\exp(2kt),$$

уравнение Орнштейна – Уленбена (35) сводится к уравнению теплопроводности (27).

2. Процесс диффузии в поле силы тяжести [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(gu) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{37}$$

Уравнение (37) сводится к (27) с помощью замены (36), где

$$v = \exp\left(-gx - \frac{g^2}{2}t\right), \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{t} = \frac{1}{2}t.$$

3. Уравнение процесса рэлеевского типа [15]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x - \frac{1}{x}\right)u\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{38}$$

сводится к (27) с помощью замены (36), где

$$v = \exp(2\gamma t)x, \quad \tilde{x} = \exp(\gamma t)x, \quad \tilde{t} = \frac{1}{4\gamma}\exp(2\gamma t).$$

Рассмотрим три уравнения, описывающие модели в популяционной генетике [9].

4. Первое из них

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(1-x^2)^2 u]. \tag{39}$$

Используя замену [6]

$$u = \frac{1}{\sqrt{B(x)}}w(\tau, y), \quad \tau = t, \quad y = \int \frac{dx}{\sqrt{B(x)}},$$

сводим уравнение (39) к виду

$$W_\tau = -(A(y)w)\tau + \frac{1}{2}w_{yy},$$

где $A(y) = \sqrt{2}th(\sqrt{2}y)$, $B = 1$.

Легко проверить, что $A(y)$ удовлетворяет условию (20) ($\lambda = 0$). Тогда суперпозиция приведенного преобразования и соответствующей замены (22), (24) – (26) дает замену (36), где

$$v = \exp(-t)(1-x^2)^{-3/2}, \quad \tilde{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \tilde{t} = t,$$

которая сводит уравнение (39) к уравнению теплопроводности (27).

5. Второе из указанных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x^2(1-x^2)u]. \tag{40}$$

Поступая так же, как и в п. 4, получаем замену (36), где

$$v = \exp\left(-\frac{\alpha}{8}t\right) x^{-3/2}(1-x^2)^{-3/2}, \quad \tilde{x} = \ln\frac{x}{1-x}, \quad \tilde{t} = \frac{\alpha}{2}t.$$

6. Третье из указанных уравнений таково:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(x-c)^2 u] + \beta\frac{\partial}{\partial x}[(x-c)u]. \tag{41}$$

Уравнение (41) сводится к уравнению теплопроводности (27) заменой (36), где

$$v = \exp\left\{-\left(\frac{\beta^2}{2\alpha} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{8}\right)t\right\}(x-c)^{(-3/2+\beta/\alpha)}, \quad \tilde{x} = \sqrt{2/\alpha}\,\ln(x-c), \quad \tilde{t} = t.$$

7. УФП вида [6, 14]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial k}[a(t)x + b(t)]u + c(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{42}$$

сводится к уравнению теплопроводности (27) заменой (36), где [6, 15]

$$v = \exp\{\alpha(t)\}, \quad \tilde{x} = \exp\{\alpha(t)\}x + \beta(t), \quad \tilde{t} = \gamma(t)$$

и, кроме того,

$$\alpha(t) = -\int_0^t a(s)ds, \quad \beta(t) = \int_0^t b(s)\exp\{\alpha(s)\}ds, \quad \gamma = \int_0^t c(s)\exp\{2\alpha(s)\}ds.$$

B. Уравнения с четырехпараметрической группой симметрии.

1. В работе [5] рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\beta x u). \tag{43}$$

Используя замену

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\beta x}}w(\tau, y), \quad \tau = t, \quad y = \sqrt{2x/\beta},$$

уравнение (43) переводим в следующее УФП:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\alpha y}{2} - \frac{1}{2y}\right)w\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где $A(y) = \left(\frac{\alpha y}{2} - \frac{1}{2y}\right)$ удовлетворяет условию (20).

2. Рассмотрим УФП [9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}x^{-2p}u\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}x^{1-2p}u\right), \tag{44}$$

где $p \neq -\dfrac{1}{2}$ (случай $p = \dfrac{1}{2}$ соответствует шестипараметрической группе (см. пример 6)). Используя замену

$$u = \sqrt{2}x^{(2p-1)/2}w(\tau, y), \quad \tau = t, \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{2p+1}x^{(2p+1)/2},$$

уравнение (44) переводим в следующее УФП:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2y}w\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где $A(y) = \dfrac{1}{2y}$ удовлетворяет условию (20).

3. Рассмотрим УФП для процесса Рэлея:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu}{x} - \gamma x\right)u\right] + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{45}$$

где γ, μ — произвольные постоянные. Функция $\dfrac{A(x)}{2\mu} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{\gamma x}{2\mu}$ удовлетворяет условию (20). Таким образом, группа инвариантности уравнения (45) не изоморфна группе инвариантности уравнения теплопроводности и не сводится к нему с помощью локальных преобразований.

1. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятности // Успехи мат. наук. — 1938. — **5**. — С. 5 – 41.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 353 с.
3. *Fokker A.D.* Ann. Phys. — 1915. — **43**. — 310 p.
4. *Planck M.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. — 1917. — 325 p.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. — М.: Мир, 1984. — 738 с.
6. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
7. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.
8. *Портенко М.І.* Дифузія в середовищах з напівпрозорими мембранами. — Київ: І-т математики НАН України, 1994. — 134 с.
9. *Nariboli G.A.* Group-invariant solutions of the Fokker – Planck equation // Stochast. Process. and Appl. — 1977. — № 5. — P. 157 – 171.
10. *Lie S.* Gesammelte Abhandlungen. – Leipzig: B.G. Teubner; Oslo: H.Aschehoug & Co., 1922. — Bd. 3.
11. *Bluman G.W., Cole J.D.* Similarity methods for differential equations. — Berlin: Springer, 1974. — 332 p.
12. *Blumen G.W.* J. Appl. Math. — 1980. — **39**. — P. 238.
13. *Sastri C.C.A., Dann K.A.* Lie symmetries of some equations of the Fokker – Planck type // J. Math. Phys. — 1985. — **26**, № 12. — P. 3042 – 3047.
14. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Fokker – Planck equations // Ibid. — 1988. — **29 (2)**. — P. 305 – 307.
15. *Shtelen W.M., Stogny V.I.* Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker – Planck equations // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1989. — **22**. — P. 539 – 543.
16. *Rudra P.* Symmetry classes of Fokker – Planck equations // Ibid. — 1990. — **23**. — P. 1663 – 1670.
17. *Cicogna G., Vitali D.* Classification on the extended symmetries of Fokker – Planck equations // Ibid. — 1990. — **23**. — P. 85 – 88.

18. *Miyadzawa T.* Theory of the one-variable Fokker – Planck equation // Phys. Rev. A. — 1989. — **39**, № 3. — P. 1447 – 1468.

19. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

20. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 335 с.

21. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 860 с.

22. *Жданов Р.З., Лагно В.И.* О критерии разделения переменных для уравнения Фоккера – Планка, инвариантного относительно сдвигов по временной переменной // Докл. НАН Украины. — 1993. — № 2. — С. 18 – 21.

23. *Черкасов И.Д.* О преобразовании диффузионного процесса в винеровский // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — **2**, вып. 3. — С. 384 – 388.

Получено 26.05.99