НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 3 • 1999

УДК 517.9

МАТРИЧНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ІЄРАРХІЇ КАДОМЦЕВА – ПЕТВІАШВІЛІ І НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ

Ю. М. Сидоренко

Нац. ун-т ім. Т. Шевченка,
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: matmod@franko.lviv.ua;
topos@franko.lviv.ua

The algebraic constructions of Sato theory are generalized for spatially two-dimensional nonlinear integrable systems, which admit the operator matrix representation by Zakharov – Shabat. The correlation of their different operator representations is demonstrated on the examples of well-known matrix equations of Kadomtsev – Petviashvili and Devi – Stewartson.

Для просторово двовимірних нелінійних інтегровних систем, що допускають матричне операторне зображення Захарова – Шабата, узагальнено алгебраїчні конструкції теорії Сато. На прикладах відомих матричних рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі і Деві – Стюардсона продемонстровано взаємозв'язок їх різних операторних зображень.

1. Основні положення та поняття. Метою данної статті є узагальнення деяких конструкцій і результатів роботи [1] для загального матричного випадку. Доведення тверджень, що аналогічні для скалярного випадку [1 – 4], пропускаємо.

Розглянемо над полем $\mathbf{C}$ лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i : \; i, n(L) \in \mathbf{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i є матричними $(N \times N)$-вимірними функціями „просторової" змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1, t_2, \ldots$.

Матричні коефіцієнти $a_i(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$, вважаються гладкими функціями векторної змінної $\mathbf{t}$, яка має скінченну кількість компонент, і належать деякому функціональному простору $\mathcal{A}$, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\partial := \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \zeta \times \zeta \to \zeta, [L_1, L_2] = L_1L_2 - L_2L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1, L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} \mathcal{D}^{n-j}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad f \in \mathcal{A} \subset \zeta, \quad f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathcal{A} \subset \zeta, \\ &\mathcal{D}^n \mathcal{D}^m := \mathcal{D}^m \mathcal{D}^n := \mathcal{D}^{n+m}, \quad n, m \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Формула (2) задає композицію оператора $\mathcal{D}^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in \in \mathcal{A} \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення

$$\mathcal{D}^k(f) := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbf{Z}_+ .$$

Порядок МДО $S = \sum\limits_{i=-\infty}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i \in \zeta$ визначається формулою

$$\operatorname{ord}(S) := \max\{j \in \mathbf{Z} : s_j \neq 0\},$$

а диференціальна та інтегральна частини МДО S — таким чином:

$$S = S_+ + S_-, \quad S_+ = \sum_{i \geq 0}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i, \quad S_- = \sum_{i=-\infty}^{-1} s_i \mathcal{D}^i. \tag{3}$$

Формула (3) індукує розклад алгебри ζ в лінійну суму підалгебр диференціальних ζ_+ і інтегральних ζ_- операторів $\zeta = \zeta_+ \dot{+} \zeta_-$. Підалгебру Лі ζ_- інтегральних операторів Вольтерра прийнято називати алгеброю Лі – Вольтерра. Елементи $W \in G$ вигляду $W = I + V$, де

$$V \in \zeta_- = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{-1} \nu_i \mathcal{D}^i \right\},$$

мають обернені вигляду $W^{-1} = I + K$, де $K \in \zeta_-$, і утворюють группу Лі – Вольтерра G, що відповідає алгебрі ζ_-.

Означення 1. *Символом L^* позначається відповідне спряження (транспонування) МДО $L \in \zeta_-$ згідно з формулою*

$$L^* = \left(\sum_n a_n \mathcal{D}^n \right)^* := \sum_n (-1)^n \mathcal{D}^n a_n^\top,$$

де $a_n^\top$ — матрична функція, транспонована до $a_n \in A \subset \zeta$.

Очевидно, що $(LM)^* = M^* L^*$ для елементів $L, M \in \zeta$.

2. Побудова інтегровних за Лаксом систем у формі Захарова – Шабата. Задамо на алгебрі Лі ζ систему попарно комутуючих диференціювань $\{\partial_n\}$, $n \in \mathbf{N}$; $\partial_n : (\zeta, [\cdot,\cdot]) \to \to (\zeta, [\cdot,\cdot])$:

$$\partial_n L = \partial_n \left(\sum_j a_j \mathcal{D}^j \right) := \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial t_n} \mathcal{D}^j + L \partial_n \equiv L_{t_n} + L \partial_n, \tag{4}$$

$$[\partial_n, \partial_m] = 0, \qquad [\mathcal{D}^j, \partial_n] = 0, \quad j \in \mathbf{Z} .$$

Означення 2. *Символом $\widehat{\zeta}$ позначатимемо лінійний простір елементів $\widehat{L}$ вигляду*

$$\widehat{\zeta} \ni \widehat{L} = \left(\sum_m \alpha_m \partial_m, L \right), \tag{5}$$

де $L \in \zeta$, $m \in \mathbf{N}$, $\alpha_m \in \mathbf{C}$.

Твердження 1. *Упорядкована пара* $(\widehat{\zeta}, [\cdot,\cdot])$, *де операція* $[\cdot,\cdot] : \widehat{\zeta} \times \widehat{\zeta} \to \zeta$ *визначена рівністю*

$$\left[\left(\sum_m \alpha_m \partial_m, L\right), \left(\sum_m \beta_m \partial_m, M\right)\right] := \left(0, \sum_n \beta_n L_{t_n} - \sum_m \alpha_m M_{t_m} + [L, M]\right), \qquad (6)$$

є алгеброю Лі.

Зауваження 1. Елементи $\widehat{L} \in \widehat{\zeta}$ вигляду (5), виходячи з означень (4), (6), природно ототожнити з символами вигляду

$$\sum_m \alpha_m \partial_m - L \sim \widehat{L} \in \widehat{\zeta},$$

які ми далі називатимемо інтегро-диференціальними операторами, а підалгебру Лі $\widehat{\zeta}_+$, що складається з символів $\widehat{L}_+$ вигляду $\widehat{L}_+ := \sum\limits_m \alpha_m \partial_m + L_+$, де $L_+ \in \zeta_+$, — алгеброю диференціальних операторів. При цьому, аналогічно (3), маємо

$$\widehat{\zeta} = \widehat{\zeta}_+ \dot{+} \widehat{\zeta}_- \equiv \widehat{\zeta}_+ \dot{+} \zeta_-,$$

де ζ_- – алгебра символів інтегральних (за змінною $x := t_0$) операторів Вольтерра.

Основною метою цієї роботи є побудова комутуючих пар диференціальних операторів $\widehat{L}_+, \widehat{M}_+ \in \widehat{\zeta}_+$, що рівносильно знаходженню точних розв'язків операторного рівняння

$$[\widehat{L}_+, \widehat{M}_+] = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_m \alpha_m (M_+)_{t_m} - \sum_n \beta_n (L_+)_{t_n} = [L_+, M_+].$$

Зауваження 2. Лінійною заміною $(t_1, t_2, \dots) \to (\xi_1, \xi_2, \dots)$ у просторі параметрів $(t_1, t_2, \dots)$ завжди можна досягти відповідної заміни диференціювань

$$\sum_m \alpha_m \partial_m \to \widetilde{\alpha}_m \partial_{\xi_m}, \;\; \sum_n \beta_n \partial_n \to \widetilde{\beta}_n \partial_{\xi_n},$$

тому, не зменшуючи загальності, далі розглядатимемо тільки диференціальні оператори вигляду $\alpha_n \partial_n - A_+$, де $A_+ \in \zeta_+$.

Опишемо основну алгебраїчну конструкцію даної роботи. Нехай

$$\widehat{\mathcal{B}} = \left\{ \widehat{B}^0 = \alpha_B \partial_B - B^0 : \alpha_B \in \mathbf{C}, \partial_B \in \{\partial_1, \partial_2, \dots\}, B^0 \in \zeta_+ \right\} \subset \widehat{\zeta}_+ \qquad (7)$$

— деяка комутативна (тобто $[\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}}] = \{0\}$) підалгебра алгебри диференціальних операторів $\widehat{\zeta}_+$;

$$W = \sum_{i=-\infty}^{n} w_i \mathcal{D}^i$$

— елемент простору ζ, для якого існує обернений W^{-1}. Тоді, очевидно, перетворення подібності („одягаюче", „калібровочне" тощо) $T_W : \widehat{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathcal{B}}_W \subset \widehat{\zeta}$, де

$$\widehat{\mathcal{B}}_W := \left\{ T_W \widehat{B}^0 := W \widehat{B}^0 W^{-1} : \widehat{B}^0 \in \widehat{\mathcal{B}} \right\},$$

зберігає комутативність, тобто

$$[\widehat{\mathcal{B}}_W, \widehat{\mathcal{B}}_W] = \{0\}.$$

Твердження 2 [1].

$$\widehat{\mathcal{B}}_W \subset \widehat{\zeta}_+ \Leftrightarrow \alpha_B W_{t_B} = \left(\alpha_B w_{nt_B} w_n^{-1} - (WB^0W^{-1})_-\right) W \ , \tag{8}$$

тобто комутативна алгебра $\widehat{\mathcal{B}}_W$ є підалгеброю Лі алгебри диференціальних операторів $\widehat{\zeta}_+$ тоді і тільки тоді, коли одягаючий оператор W задовольняє систему операторних рівнянь (8).

Зауваження 3. Нехай оператори $\widehat{L}, \widehat{M} \in \widehat{\mathcal{B}}_W$:

$$\widehat{L} = W\widehat{L}^0W^{-1} = W(\alpha_L\partial_L - L^0)W^{-1} = \alpha_L\partial_L - L,$$

$$\widehat{M} = W\widehat{M}^0W^{-1} = W(\alpha_M\partial_M - M^0)W^{-1} = \alpha_M\partial_M - M,$$

$$\alpha_L, \alpha_M \in \mathbf{C}; \quad \partial_L, \partial_M \in \{\partial_1, \partial_2, \ldots\}.$$

Комутативність операторів $\widehat{L}$ і $\widehat{M}$ еквівалентна деякій системі (взагалі кажучи, нелінійній) диференціальних рівнянь для коефіцієнтів цих операторів. Згідно з попереднім твердженням, система операторних рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha_L W_{t_L} &= \left(\alpha_L w_{nt_L} w_n^{-1} - (WL^0W^{-1})_-\right) W, \\ \alpha_M W_{t_M} &= \left(\alpha_M w_{nt_M} w_n^{-1} - (WM^0W^{-1})_-\right) W \end{aligned} \tag{9}$$

рівносильна замкненій системі рівнянь з частинними похідними для функціональних коефіцієнтів диференціальних операторів $L, M \in \zeta_+$ стосовно трьох незалежних змінних $x := t_0, t_L, t_M \in (t_1, t_2, \ldots)$. В свою чергу, система (9) — це нескінченна система рівнянь на коефіцієнти $w_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbf{Z}$, МДО $W \in \zeta$, і кожному точному розв'язку цієї системи відповідає точний розв'язок рівняння

$$[\widehat{L}, \widehat{M}] = \alpha_M L_{t_M} - \alpha_L M_{t_L} + [L, M] = 0,$$

яке прийнято називати [5, 6] рівнянням „нульової кривини" або рівнянням Захарова – Шабата.

Зауваження 4. Довільний МДО W, для якого існує обернений W^{-1}, можна подати у вигляді композиції $w_n(w_n^{-1}W) := w_nW_I$, де

$$W_I = \mathcal{D}^n + \sum_{i=-\infty}^{n-1} \widetilde{w}_i\mathcal{D}^i, \quad \widetilde{w}_i = w_n^{-1}w_i,$$

і твердження 2 в термінах оператора W_I набирає такого вигляду.

Твердження 2*.

$$\widehat{\mathcal{B}}_{W_I} \subset \widehat{\zeta}_+ \Leftrightarrow \alpha_B W_{It_B} = -\left(W_IB^0W_I^{-1}\right)_- W_I, \tag{10}$$

або, вводячи позначення $B := \left(W_IB^0W_I^{-1}\right)_+$, (10) переписуємо так:

$$\widehat{\mathcal{B}}_{W_I} \subset \widehat{\zeta}_+ \Leftrightarrow \alpha_B W_{It_B} = BW_I - W_IB^0.$$

Як буде показано далі, при побудові найбільш відомих нелінійних систем і їх узагальнень достатньо обмежитись мікродиференціальним одягаючим оператором Захарова – Шабата W вигляду

$$G \ni W = I + w_1\mathcal{D}^{-1} + w_2\mathcal{D}^{-2} + \ \dots \ = I + \sum_{i=1}^{\infty} w_i\mathcal{D}^{-i}. \tag{11}$$

Як зазначалось вище, оператори W (11) з групи Лі – Вольтерра G мають обернені W^{-1}, коефіцієнти яких послідовно знаходяться з означення $WW^{-1} = I$, або з розвинення оператора W^{-1} в ряд Неймана

$$W^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \left(\sum_{i=1}^{\infty} w_i\mathcal{D}^{-i}\right)^j. \tag{12}$$

Безпосередні обчислення дозволяють виписати достатню для наших цілей кількість коефіцієнтів оператора $W^{-1} = I + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i\mathcal{D}^{-i}$:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = -w_1, \qquad \omega_2 = -w_2 + w_1^2,\\
&\omega_3 = -w_3 - w_1w_{1x} + w_1w_2 + w_2w_1 - w_1^3,\\
&\omega_4 = -w_4 + w_1w_{1xx} - w_1w_{2x} - w_2w_{1x} + w_1^2w_{1x} + w_1w_{1x}w_1 +\\
&\qquad + w_1w_3 + w_3w_1 + w_2^2 - w_1^2w_2 - w_2w_1^2 - w_1w_2w_1 + w_1^4.
\end{aligned}$$

Як неважко бачити, з формули (12) випливає, що коефіцієнти $\omega_k, k \in \mathbf{N}$, оператора W^{-1} є диференціальними поліномами від коефіцієнтів $w_i, i = \overline{1,k}$, оператора W :

$$\omega_k = P_k\left[w_i^{(j)} : i = \overline{1,k};\ \ j = \overline{1, k-i-1}\right], \quad k \in \mathbf{N}.$$

3. Основні приклади. ***3.1. Матричне узагальнення ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі.*** Розглянемо комутативну алгебру Лі (7), що містить такі елементи:

$$\begin{aligned}
&B^0 := J\mathcal{D}, \qquad J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_N) = \mathrm{const} \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{C}),\\
&\widehat{B}_i^{01} := \alpha_i\partial_i^{(1)} - J^{(i)}\mathcal{D}^i := \alpha_i\partial_i^{(1)} - B_i^{01}, \quad J^{(i)} = \operatorname{diag}(J_1^i, \dots, J_N^i) = \mathrm{const},\\
&\widehat{B}_j^{02} := \beta_j\partial_j^{(2)} - \mathcal{J}^{(j)}\mathcal{D}^j := \beta_j\partial_j^{(2)} - B_j^{02}, \quad \mathcal{J}^{(j)} = \operatorname{diag}(\mathcal{J}_1^j, \dots \mathcal{J}_N^j) = \mathrm{const},
\end{aligned}$$

де

$$\partial_i^{(1)}, \partial_j^{(2)} \in \{\partial_1, \partial_2, \dots\}; \quad i, j \in \mathbf{N}; \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{C}.$$

Нехай оператор $W \in G$ має вигляд (11). Введемо такі позначення:

$$L := WB^0W^{-1} \in \widehat{\mathcal{B}}_W, \tag{13}$$

$$\alpha_i\partial_i^{(1)} - B_i^1 = W\widehat{B}_i^{01}W^{-1} \in \widehat{\mathcal{B}}_W, \tag{14}$$

$$\beta_j\partial_j^{(2)} - B_j^2 = W\widehat{B}_j^{02}W^{-1} \in \widehat{\mathcal{B}}_W. \tag{15}$$

Твердження 2* в термінах операторів (14), (15) набирає вигляду

$$[\alpha_i \partial_i^{(1)}, W] = B_{i+}^1 W - W B_i^{01} \Leftrightarrow B_i^1 \equiv B_{i+}^1 \in \zeta_+, \tag{16}$$

$$[\beta_j \partial_j^{(2)}, W] = B_{j+}^2 W - W B_j^{02} \Leftrightarrow B_j^2 \equiv B_{j+}^2 \in \zeta_+. \tag{17}$$

Означення 3. *Послідовність операторних рівнянь в лівій частині тверджень (16), (17) називатимемо матричною ієрархією Кадомцева – Петвіашвілі.*

Зауваження 5. Означення 3 має досить умовний характер, оскільки серед рівнянь (16), (17) крім матричного узагальнення відомого рівняння Кадомцева – Петвіашвілі [7] містяться також, як буде показано далі, не менш відомі моделі Деві – Стюардсона [8] та системи нелінійної взаємодії n хвиль [9].

3.1.1. Матричне рівняння Кадомцева* – *Петвіашвілі. Розглянемо окремий випадок системи (16), (17):

$$\partial_n^{(1)} := \partial_n, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad \beta_j = 0; \quad j \in \mathbf{N}.$$

Твердження 3. *Нехай оператор $W \in G$ є розв'язком системи рівнянь*

$$\alpha_n W_{t_n} = B_{n+} W - W B_n^0. \tag{18}$$

Тоді оператор L (13) задовольняє послідовність рівнянь Лакса

$$\alpha_n L_{t_n} = [B_{n+}, L], \quad n \in \mathbf{N}. \tag{19}$$

Прямими обчисленнями можна отримати формули, які в подальшому будуть неодноразово використовуватись:

$$\begin{aligned} L := W J \mathcal{D} W^{-1} = J\mathcal{D} + [w_1, J] - \Big(J w_{1x} + [w_1, J] w_1 - [w_2, J]\Big) \mathcal{D}^{-1} - \\ - \Big\{ J w_{2x} + [w_1, J] w_2 - [w_3, J] - \Big(J w_{1x} + [w_1, J] w_1 - [w_2, J]\Big) w_1 \Big\} \mathcal{D}^{-2} + \ldots, \end{aligned} \tag{20}$$

$$B_1 = B_{1+} := (W J^{(1)} \mathcal{D} W^{-1})_+ = J^{(1)} \mathcal{D} + [w_1, J^{(1)}], \tag{21}$$

$$\begin{aligned} B_2 = B_{2+} := (W J^{(2)} \mathcal{D}^2 W^{-1})_+ = J^{(2)} \mathcal{D}^2 + [w_1, J^{(2)}] \mathcal{D} - 2 J^{(2)} w_{1x} - \\ - [w_1, J^{(2)}] w_1 + [w_2, J^{(2)}], \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} B_3 = B_{3+} := (W J^{(3)} \mathcal{D}^3 W^{-1})_+ = J^{(3)} \mathcal{D}^3 + [w_1, J^{(3)}] \mathcal{D}^2 - \Big(J^{(3)} w_{1x} + \\ + [w_1, J^{(3)}] w_1 - [w_2, J^{(3)}] + 2 J^{(3)} w_{1x}\Big) \mathcal{D} - 3 \Big(J^{(3)} w_{1x} + [w_1, J^{(3)}] w_1 - \\ - [w_2, J^{(3)}]\Big)_x - \Big(J^{(3)} w_{2x} + [w_1, J^{(3)}] w_2 - [w_3, J^{(3)}]\Big) + \\ + \Big(J^{(3)} w_{1x} + [w_1, J^{(3)}] w_1 - [w_2, J^{(3)}]\Big) w_1 + [w_1, J^{(3)} w_{1x}] - \\ - [w_{2x}, J^{(3)}] - 2 w_{2x} J^{(3)} + [w_{1x}, J^{(3)} w_1] + 2 w_{1x} J^{(3)} w_1. \end{aligned} \tag{23}$$

При $J^{(n)} = J^n = \operatorname{diag}(J_1^n, J_2^n, \ldots, J_N^n)$ послідовність рівнянь (19) набирає стандартного вигляду операторної ієрархії Лакса

$$\alpha_n L_{t_n} = [L_+^n, L], \quad n = 2, 3, 4, \ldots . \tag{24}$$

Розглянемо найпростіший випадок рівнянь (24) при $n = 2, 3$ і $J = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$. При цьому формули (20) – (23) суттєво спрощуються і набирають такого вигляду:

$$L = \mathcal{D} - w_{1x}\mathcal{D}^{-1} - (w_{2x} - w_{1x}w_1)\mathcal{D}^{-2} - (w_{3x} + w_{1x}^2 - w_{1x}w_2 - w_{2x}w_1 -$$

$$- w_2 w_{1x} + w_{1x}w_1^2 + w_1^2 w_{1x})\mathcal{D}^{-3} + \ldots := \mathcal{D} + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathcal{D}^{-i},$$

$$L_+^2 = B_2 = \mathcal{D}^2 - 2w_{1x} = \mathcal{D}^2 + 2u_1,$$

$$L_+^3 = B_3 = \mathcal{D}^3 - 3w_{1x}\mathcal{D} - 3w_{1xx} - 3w_{2x} + w_{1x}w_1 = \mathcal{D}^3 + 3u_1\mathcal{D} + 3u_{1x} + 3u_2 .$$

Твердження 4. *Система операторних рівнянь (24) при $n = 2, 3$ рівносильна такій нескінченній системі диференціальних рівнянь для коефіцієнтів $u_i = u_i(x, t_2, t_3)$, $i \in \mathbf{N}$:*

$$\alpha_2 u_{it_2} = u_{ixx} + 2u_{i+1,x} + 2u_1 u_i - 2\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j} u_j u_1^{(i-j)}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 u_{it_3} = u_{ixxx} + 3u_{i+1,xx} + 3u_{i+2,x} + 3u_1 u_{ix} + 3[u_1, u_{i+1}] + \\ + 3(u_{1x} + u_2)u_i - 3\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j} u_j u_2^{(i-j)} . \end{aligned} \tag{26}$$

Зауваження 6. Послідовність рівнянь (25) дозволяє рекурентним чином записати коефіцієнти $u_i(x, t_2, t_3)$, $i \geq 2$, оператора Лакса L в термінах функції $u_1(x, t_2, t_3) := u$, а саме:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 u_{t_2} = u_{xx} + 2u_{2x} \rightarrow u_{2x} = \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}u_{xx}, \\ &\alpha_2 u_{2t_2} = u_{2xx} + 2u_{3x} + 2uu_x + 2uu_2 - 2u_2 u \rightarrow \\ &\qquad \rightarrow u_{3x} = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{1}{2}uu_x - \frac{1}{2}u_x u - \frac{1}{4}\alpha_2 u_x - \\ &\qquad - \frac{1}{4}\alpha_2 u_{xt_2} + \frac{1}{4}\alpha_2^2 \partial^{-1} t_{t_2 t_2} - \frac{1}{2}\alpha_2[u, \partial^{-1}u_{t_2}, \ldots] . \end{aligned} \tag{27}$$

Підставляючи отримані вирази для u_{2x}, u_{3x} (27) в перше рівняння системи (26) вигляду

$$\alpha_3 u_{t_3} = u_{xxx} + 3u_{2xx} + 3u_{3x} + 3uu_x + 3u_x u,$$

отримуємо нелінійне рівняння з частинними похідними стосовно однієї функції $u :=$ $:= u_1(x, t_2, t_3)$:

$$\alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + \frac{3}{2}u_x u + \frac{3}{4}\alpha_2^2 \partial^{-1} u_{t_2 t_2} - \frac{3}{2}\alpha_2[u, \partial^{-1}u_{t_2}]. \tag{28}$$

Рівняння (28) є $(N \times N)$-вимірним матричним узагальненням рівняння Кадомцева – Петвіашвілі

$$\alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4} u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}\alpha_2^2 \partial^{-1} u_{t_2 t_2} \ ,$$

яке отримується з (28) в скалярному випадку.

Задача побудови розв'язків рівняння (28) рівносильна, таким чином, задачі знаходження розв'язків нескінченної системи диференціальних рівнянь (25), (26), яка, в свою чергу, є наслідком вихідної системи (16), (17) для одягаючого оператора W. А саме, має місце такий ланцюжок імплікацій:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 W_{t_2} = B_2 W - W\mathcal{D}^2 \\ \alpha_3 W_{t_3} = B_3 W - W\mathcal{D}^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_2 L_{t_2} = [L_+^2, L] \\ \alpha_3 L_{t_3} = [L_+^3, L] \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha_3 B_{2t_3} - \alpha_2 B_{3t_2} + [B_2, B_3] = 0, \tag{29}$$

де $B_i = (W\mathcal{D}^i W^{-1})_+ = L_+^i, \ \ i = 2, 3.$

Зауваження 7. Рівняння першої системи в ланцюжку (29) деколи називають рівнянням Сато – Вільсона [3]. Друге рівняння в (29) — це зображення „нульової кривини” [7], яке ще називають рівнянням Захарова – Шабата [5].

3.1.2. Нелінійні моделі Деві – Стюардсона. Розглянемо рівняння (18) при $n = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 W_{t_1} &= B_1 W - W B_1^0 \ , \\ \alpha_2 W_{t_2} &= B_2 W - W B_2^0 \ , \end{aligned} \tag{30}$$

де $B_1^0 = J^{(1)}\mathcal{D}, \ B_2^0 = J^{(2)}\mathcal{D}^2$, а вигляд операторів B_1 і B_2 наведено в формулах (21), (22) відповідно.

Твердження 5. *Система операторних рівнянь для одягаючого оператора W (30) рівносильна нескінченній системі диференціальних рівнянь для коефіцієнтів $w_i = w_i(x, t_1, t_2)$, $i \in \mathbf{N}$, такого вигляду:*

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_{it_1} &= J^{(1)} w_{ix} + [w_1, J^{(1)}] w_i - [w_{i+1}, J^{(1)}] = B_1(w_i) - [w_{i+1}, J^{(1)}], \\ \alpha_2 w_{it_2} &= J^{(2)} w_{ixx} + [w_1, J^{(2)}] w_{ix} - 2J^{(2)} w_{1x} w_i - [w_1, J^{(2)}] w_1 w_i + \\ &\quad + [w_2, J^{(2)}] w_i + 2J^{(2)} w_{i+1,x} + [w_1, J^{(2)}] w_{i+1} - [w_{i+2}, J^{(2)}] = \\ &= B_2(w_i) + 2J^{(2)} w_{i+1,x} + [w_1, J^{(2)}] w_{i+1} - [w_{i+2}, J^{(2)}]. \end{aligned} \tag{31}$$

Нижче ми розглянемо два спеціальних випадки системи (31), коли вона суттєво спрощується. Перший із них відповідає вибору (значенням)

$$J^{(2)} = J^{(1)} = \sigma_3 = \mathrm{diag}(1, -1) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbf{C}) \ .$$

При цьому перші рівняння в системі (21) ($i = 1$) мають вигляд

$$\alpha_1 w_{1t_1} = \sigma_3 w_{1x} + [w_1, \sigma_3] w_1 - [w_2, \sigma_3], \tag{32}$$

$$\alpha_2 w_{1t_2} = \sigma_3 w_{1xx} + [w_1, \sigma_3] w_{1x} - (\alpha_1 w_{1t_1} + \sigma_3 w_{1x}) w_1 + \alpha_1 w_{2t_1} + \sigma_3 w_{2x}. \tag{33}$$

Введемо такі позначення:

$$w_1 = -\frac{1}{2}\sigma_3 P - \frac{1}{2}S,$$

де

$$P = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(s_1, s_2).$$

З рівняння (32) неважко отримати співвідношення

$$\alpha_1 S_{t_1} - \sigma_3 S_x = -\sigma_3 P^2 \tag{34}$$

і вираз для антидіагональних елементів матриці w_2 в термінах матриць P і S:

$$[w_2, \sigma_3] = -2\sigma_3 w_2^{\text{off}} = \frac{1}{2}\alpha_1 \sigma_3 P_{t_1} - \frac{1}{2}P_x - \frac{1}{2}PS\ . \tag{35}$$

Використовуючи (35), після нескладних перетворень з рівняння (33) отримуємо таку еволюцію матриці $P = P(x, t_1, t_2)$ за часом t_2 :

$$\alpha_2 \sigma_3 P_{t_2} = \frac{1}{2}(P_{xx} + \alpha_1^2 P_{t_1 t_1}) - P^3 + PS_x + S_x P. \tag{36}$$

Система рівнянь (36) і (34) при $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$ допускає комплексну редукцію $r = \mu\,\overline{q}$, $\mu \in \mathbf{R}$, і залежно від того, яка нерівність виконується ($\alpha_1^2 > 0$ чи $\alpha_1^2 < 0$), називається моделлю Деві – Стюардсона I (ДС-I) чи моделлю Деві – Стюардсона II (ДС-II) [8]. Наслідком системи (30) є зображення Захарова – Шабата для систем ДС-I та ДС-II:

$$\Big[\alpha_1\partial_{t_1} - \sigma_3\mathcal{D} - [w_1, \sigma_3], \alpha_2\partial_{t_2} - \sigma_3\mathcal{D}^2 - [w_1, \sigma_3]\mathcal{D} + \sigma_3 w_{1x} - \alpha_{1t_1}\Big] = 0\ .$$

Другий цікавий випадок системи (31) отримуємо при $J^{(1)} = \sigma_3$, $J^{(2)} = I = \mathrm{diag}\,(1,1)$. При цьому рівняння (33) має вигляд

$$\alpha_2 w_{1t_2} = w_{1xx} - 2w_{1x}w_1 + 2w_{2x}\ . \tag{37}$$

Система рівнянь (32), (37) аналогічно попередньому випадку зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} &\alpha_2 P_{t_2} = \alpha_1\sigma_3 P_{xt_1} + S_x P - PS_x, \\ &\alpha_1 S_{t_1} - \sigma_3 S_x = -\sigma_3 P^2\ , \end{aligned} \tag{38}$$

і після допустимих редукцій $r = \mu\bar{q}$ (див. [10]) при $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$, $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ або $\alpha_2 \in \mathbf{R}$, $\alpha_1 \in i\mathbf{R}$ є іншою інтегровною версією просторово-двовимірних нелінійних рівнянь Шредінгера, зображення Захарова – Шабата для яких має вигляд

$$\Big[\alpha_1\partial_{t_1} - \sigma_3\mathcal{D} - [w_1, \sigma_3], \alpha_2\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 + 2w_{1x}\Big] = 0\ .$$

4. Заключні зауваження. В даній роботі продемонстровано прості взаємозв'язки між різними алгебраїчними конструкціями, що виникають при побудові нелінійних інтегровних моделей теорії солітонів в розмірності (2+1) і допускають матричне зображення Захарова – Шабата. За браком місця не розглянуто загальну систему n-хвильової взаємодії

[9, 10], яка відповідає рівнянням (16), (17) при $i = j = 1$. Багато інших відомих моделей, зокрема таких як модифіковане рівняння Кадомцева – Петвіашвілі та просторово-двовимірне узагальнення рівняння Ландау – Ліпшица (відоме в літературі також під назвою ізотропного магнетика Гейзенберга), виникають при розгляді загальної операторної системи (9). Це питання планується розглянути окремо. Зауважимо також, що задача побудови точних розв'язків нелінійних інтегровних систем типу (28), (36), (38) еквівалентна побудові у явному вигляді відповідного одягаючого оператора W. Ефективним методом розв'язання цієї задачі є знаходження та дослідження допустимих редукцій в нескінченних системах диференціальних рівнянь для функціональних коефіцієнтів операторів W типу (31) або L вигляду (25), (26) [1, 11]. Цьому питанню планується присвятити окрему статтю.

На завершення звернемо увагу на питання, яке також чекає свого дослідження – побудова нелокально редукованих інтегровних матричних ієрархій та їх розв'язків по аналогії зі скалярним випадком (див., наприклад, [4] та цитовану там літературу).

1. *Сидоренко Ю. М.* Про узагальнення τ-функції для ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. математика і механіка. — 1998. — С. 40 – 49.
2. *Ohta Y., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T.* An elementary introduction to Sato theory // Progress Theoret. Phys. Suppl. — 1988. — **94**. — P. 210 – 241.
3. *Dickey L. A.* Soliton equations and Hamiltonian systems // Adv. Ser. in Math. Phys. — 1991. — **12**. — 310 p.
4. *Самойленко А. М., Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями: багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 1. — С. 78 – 97.
5. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. — 1974. — **8**, № 3. — С. 43 – 53.
6. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
7. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. — 1970. — **192**, № 4. — С. 753 – 756.
8. *Davey A., Stewartson K.* On three dimensional pachets of surface waves // Proc. Roy. Soc. London A. — 1974. — **338**. — P. 101 – 110.
9. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир, 1983. — 408 с.
10. *Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві – Стюардсона // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 252 – 264.
11. *Сидоренко Ю. М.* Нелокальні редукції в системах, інтегровних методом оберненої задачі // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. — С. 199 – 203.

Одержано 30.12.98