УДК 517.98+517.5

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СУММЫ КВАДРАТОВ S-ЧИСЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА – ШМИДТА*

Е.И. Радзиевская

Укр. ун-т пищ. технологий,
Украина, 252033, Киев, ул. Владимирская, 68
e-mail: radz@imath.kiev.ua

Let A be an integral operator of Hilbert – Schmidt with kernel $\mathcal{A}(t,\xi)$ acting in the space $L_2(0,1;\,\mathbb{C}^m)$ and let $s_k(A)$ its singular values. We establish, in particular, that for all $r = m+1$, $m+2$,... the estimate

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k(A)^2 \le 2\omega_1\left(\frac{m}{r-m}\,,\mathcal{A}\right)^2 \qquad (*)$$

holds. Here $\omega_1(\delta,\mathcal{A})$ is the modulus of continuiti of the kernel $\mathcal{A}(t,\,\xi)$ given by the formulas

$$\omega_1(\delta,\mathcal{A}) := \sup_{0\le h\le\delta}\left(\int_0^1\int_0^{1-h}\|\mathcal{A}(t+h,\xi)-\mathcal{A}(t,\xi)\|^2 dt d\xi\right)^{1/2} \qquad (**)$$

if $0 \le \delta \le 1$ and $\omega_1(\delta,\mathcal{A}) := \omega_1(1,\mathcal{A})$ if $\delta > 1$. The Frobenius's matrix norm $\|\cdot\|$ is contained in the wright part of the formula (**). From the estimate (*) we have obtained both the estimates for every value $s_r(A)$, $r = m+1$, $m+2$,..., and creterion of convergence of the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k(A)^p$ in terms of $\omega_1(\delta,\,\mathcal{A})$.

Нехай A — інтегральний оператор Гільберта – Шмідта, що діє у просторі $L_2(0,1;\,\mathbb{C}^m)$ з ядром $\mathcal{A}(t,\xi)$, і $s_k(A)$ — його сингулярні числа. Встановлено, що для всіх $r = m+1$, $m+2$,... справедлива оцінка

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k(A)^2 \le 2\omega_1\left(\frac{m}{r-m}\,,\mathcal{A}\right)^2, \qquad (*)$$

де модуль неперервності ядра $\mathcal{A}(t,\,\xi)$ задається рівностями

$$\omega_1(\delta,\mathcal{A}) := \sup_{0\le h\le\delta}\left(\int_0^1\int_0^{1-h}\|\mathcal{A}(t+h,\xi)-\mathcal{A}(t,\xi)\|^2 dt d\xi\right)^{1/2}, \qquad (**)$$

якщо $0 \le \delta \le 1$, і $\omega_1(\delta,\mathcal{A}) := \omega_1(1,\mathcal{A})$, якщо $\delta > 1$. У формулі (**) $\|\cdot\|$ — матрична норма Фробеніуса. З оцінки (*) у термінах $\omega_1(\delta,\,\mathcal{A})$ отримані як оцінки кожного конкретного числа $s_r(A)$, $r = m+1$, $m+2$,..., так і ознаки збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k(A)^p$.

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Министерстве науки Украины.

1. Формулировка основных результатов. Пусть m — фиксированное натуральное число, а $\mathbb{C}^m$ — m-мерное комплексное арифметическое евклидово пространство, состоящее из вектор-столбцов $f = \{f_1,...,f_m\} =: \{f_j\}_{j=1}^m$, где $f_j \in \mathbb{C}$, и с нормой $\|f\|_{\mathbb{C}^m} = \left(\sum\limits_{j=1}^m |f_j|^2\right)^{1/2}$. Введем гильбертово пространство $L_2(0,1; \mathbb{C}^m)$, состоящее из всех m-мерных вектор-функций $f(t) = \{f_1(t),..., f_m(t)\} = \{f_j(t)\}_{j=1}^m$, $0 \le t \le 1$, с измеримыми координатами $f_j(t)$, для которых

$$\|f\|_{L_2(0,1;\mathbb{C}^m)} = \left(\int\limits_0^1 \|f(t)\|^2_{\mathbb{C}^m} dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Множество комплексных $(m \times m)$-мерных матриц $\{a_{j,k}\}_{j,k=1}^m$ обозначим через $\mathbb{C}^{m\times m}$ и зададим на нем евклидову норму Фробениуса равенством $\|\{a_{j,k}\}_{j,k=1}^m\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = \left(\sum\limits_{j=1}^m \sum\limits_{k=1}^m |a_{j,k}|^2\right)^{1/2}$.

Далее определим пространство $L_2([0,1]\times [0,1]; \mathbb{C}^{m\times m})$, элементами которого являются матрицы-функции $\mathcal{A}(t,\xi) = \{a_{j,k}(t,\xi)\}_{j,k=1}^m$ с измеримыми на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ элементами $a_{j,k}(t,\xi)$ такими, что

$$\|\mathcal{A}\|_{L_2\left([0,1]\times[0,1];\mathbb{C}^{m\times m}\right)} = \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \|\mathcal{A}(t,\xi)\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} dt d\xi\right)^{1/2} < \infty.$$

Для каждого $\mathcal{A} \in L_2([0,1]\times[0,1];\mathbb{C}^{m\times m})$ определим оператор A, действующий в пространстве $L_2(0,1;\mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(Af)(t) = \int\limits_0^1 \mathcal{A}(t,\xi)f(\xi)d\xi =: \left\{\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^m a_{j,k}(t,\xi)f_k(\xi)d\xi\right\}_{j=1}^m. \tag{1}$$

Матрица-функция $\mathcal{A}(t,\xi)$ называется ядром оператора A. Известно, что равенство (1) задает общий вид оператора Гильберта – Шмидта, действующего в пространстве $L_2(0,1;\mathbb{C}^m)$, а величина $\|\mathcal{A}\|_{L_2\left([0,1]\times[0,1];\mathbb{C}^{m\times m}\right)}$ совпадает с нормой Гильберта – Шмидта этого оператора, т. е.

$$\sum_{k=1}^\infty s_k(A)^2 = \|\mathcal{A}\|^2_{L_2\left([0,1]\times[0,1];\mathbb{C}^{m\times m}\right)}, \tag{2}$$

где через $s_k(A)$ обозначены s-числа оператора A [1] (гл. III, § 9).

Равенствами

$$\omega_1(\delta,\mathcal{A}) := \sup_{0\le h\le\delta}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-h} \|\mathcal{A}(t+h,\xi)-\mathcal{A}(t,\xi)\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} dt d\xi\right)^{1/2}, \tag{3}$$

$$\omega_2(\delta,\mathcal{A}) := \sup_{0\le h\le\delta}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-h} \|\mathcal{A}(t,\xi+h)-\mathcal{A}(t,\xi)\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} d\xi dt\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где $0 \le \delta \le 1$, задаются модули непрерывности соответственно по первой и второй переменной ядра $\mathcal{A}\,(t,\xi)$ и пусть $\omega_j(\delta,\mathcal{A}) := \omega_j(1,\mathcal{A})$ при $\delta > 1$ и $j = 1$ или $j = 2$.

Следующий модуль непрерывности ядра $\mathcal{A}\,(t,\xi)$ учитывает влияние как первой, так и второй переменной:

$$\Omega(\delta,\mathcal{A}) = \min\{\omega_1(\delta,\mathcal{A}),\, \omega_2(\delta,\mathcal{A})\}, \quad \delta \ge 0. \tag{5}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A} \in L_2([0,1]\times[0,1];\, \mathbb{C}^{m\times m})$. Тогда для s-чисел оператора A, заданного равенством (1), справедлива оценка*

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k(A)^2 \le 2\,\Omega\left(\frac{m}{r-m},\mathcal{A}\right)^2, \quad r = m+1, m+2, \ldots\,. \tag{6}$$

Приведем частные случаи этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A} \in L_2([0,1]\times[0,1];\, \mathbb{C}^{m\times m})$. Тогда для s-чисел оператора A, заданного равенством (1), справедлива оценка*

$$s_r(A) \le \left(\frac{2(m+1)}{mr-m^2+1}\right)^{1/2} \Omega\left(\frac{m}{[\![r/(m+1)]\!]},\mathcal{A}\right), \quad r = m+1, m+2, \ldots.$$

Здесь и далее $[\![\gamma]\!]$ — целая часть положительного числа γ.

Доказательство. Для произвольного натурального числа $r \ge m+1$ выполнено неравенство

$$s_r(A)^2 \le \frac{m+1}{mr-m^2+1} \sum_{k=m+[\![r/(m+1)]\!]}^{r} s_k(A)^2. \tag{7}$$

Действительно, число слагаемых в сумме, находящихся в правой части этого неравенства, равно

$$r - m - \left[\!\!\left[\frac{r}{m+1}\right]\!\!\right] + 1 \ge \frac{mr-m^2+1}{m+1},$$

а наименьшее слагаемое в ней — $s_r(A)^2$, откуда и следует (7). Применяя последовательно неравенства (7) и (6), заключаем, что

$$s_r(A)^2 \le \frac{m+1}{mr-m^2+1} \sum_{k=m+[\![r/(m+1)]\!]}^{\infty} s_k(A)^2 \le 2\frac{m+1}{mr-m^2+1}\Omega\left(\frac{m}{[\![r/(m+1)]\!]},\mathcal{A}\right)^2.$$

Из этих оценок вытекает утверждение следствия 1.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{A} \in L_2([0,1]\times[0,1];\, \mathbb{C}^{m})$ и при некотором $p > 0$*

$$\int_0^1 \frac{\Omega(\delta,\mathcal{A})^p}{\delta^{2-p/2}}\, d\delta < \infty. \tag{8}$$

Тогда для s-чисел оператора A, заданного равенством (1), ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k\,(A)^p$ сходится.

Доказательство. Из утверждения следствия 1 и обычных свойств модуля непрерывности заключаем, что найдется такая постоянная c_m, для которой $s_r(A) \le c_m r^{-1/2}\Omega(r^{-1}, \mathcal{A})$ при всех $r = m+1, m+2, \ldots$. Отсюда выводим, что

$$\sum_{r=m+1}^{\infty} s_r(A)^p \le c_m^p \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{1}{r^{p/2}}\Omega\left(\frac{1}{r}, \mathcal{A}\right)^p \le c_m^p \int\limits_m^{\infty} \frac{1}{\xi^{p/2}}\,\Omega\left(\frac{1}{\xi}, \mathcal{A}\right)^p d\xi.$$

Из этих оценок и условия (8) вытекает утверждение следствия 2.

Следствие 3. *Пусть* $\mathcal{A} \in L_2([0,1]\times [0,1]; \mathbb{C}^{m\times m})$ *и для некоторых фиксированных* $c > 0$ *и* $\alpha \in (0,1]$ *модуль непрерывности ядра* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет оценке* $\Omega(\delta, \mathcal{A}) \le c\,\delta^{\alpha}$ *при всех* $\delta > 0$. *Тогда для* s*-чисел оператора* A*, заданного равенством (1), ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k(A)^p$ *сходится при* $p > 2\,(2\alpha+1)^{-1}$.

Утверждение следствия 3 непосредственно вытекает из утверждения следствия 2 и оно является уточнением одного результата Фредгольма [2]. Интересно отметить, что вопрос о справедливости ослабленного варианта утверждения следствия 3 был поставлен в [1] (гл. III, § 10, п. 3). Впоследствии положительный ответ на этот вопрос был дан, например, в теореме 2 из работы [3] и в следствии к теореме 3.1 из работы [4] методами, отличными от изложенного в настоящей работе.

2. Доказательство теоремы опирается на простое распространение леммы 3 работы П.Л. Ульянова [5] на вектор-функции f со значением в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. А именно, обозначим через $L_p(0,1; \mathfrak{B})$ банахово пространство сильно измеримых функций f, определенных на отрезке $[0,1]$, для которых

$$\|f\|_{L_p(0,1;\mathfrak{B})} = \left(\int\limits_0^1 \|f(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt\right)^{1/p} < \infty,$$

$1 \le p < \infty$ (см., например, п. 3.5 и 3.8 в [6]). Определим модуль непрерывности вектор-функции $f \in L_p(0,1;\mathfrak{B})$ равенством

$$\omega(\delta, f)_{L_p(0,1;\mathfrak{B})} = \sup_{0\le h\le\delta}\left(\int\limits_0^{1-h} \|f(t+h)-f(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt\right)^{1/p},\ 0 \le \delta \le 1.$$

В введенных обозначениях, полностью повторяя доказательство леммы 3 из работы [5] с заменой в соответствующих местах модуля числа на норму вектора, получаем такое утверждение.

Лемма. *Пусть* $f \in L_p(0,1;\mathfrak{B})$, $1 \le p < \infty$, *а для натурального числа* n *функции* ψ_n *определены равенствами*

$$\psi_n(t) = n \int\limits_{l/n}^{(l+1)/n} f(\tau)d\tau, \quad l/n \le t < (l+1)/n,\ l = 0, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\|f-\psi_n\|_{L_p(0,1;\mathfrak{B})} \le 2^{1/p}\omega\Big(1/n, f\Big)_{L_p(0,1;\mathfrak{B})}.$$

Используя эту лемму, приведем теперь доказательство теоремы. Вначале покажем, что

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k(A)^2 \leq 2\omega_1 \left(\frac{m}{r-m}, \mathcal{A} \right)^2, \quad r = m+1, m+2, \ldots . \tag{9}$$

Для произвольного натурального числа n определим матрицы-функции

$$\mathcal{B}_{l,n}(\xi) = n \int\limits_{l/n}^{(l+1)/n} \mathcal{A}(\tau, \xi) d\tau, \quad l = 0, \ldots, n-1, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \tag{10}$$

Очевидно, что $\mathcal{B}_{l,n} \in L_2(0,1;\mathbb{C}^{m\times m})$, где через L_2 $(0,1;\,\mathbb{C}^{m\times m})$ обозначено гильбертово пространство матриц-функций $\mathcal{B}(\xi) = \{b_{j,k}\ (\xi)\}_{j,k=1}^{m}$ с измеримыми на отрезке $[0,1]$ элементами $b_{j,k}(\xi)$ и с нормой

$$\|\mathcal{B}\|_{L_2(0,1;\mathbb{C}^{m\times m})} = \left(\int\limits_0^1 \|\mathcal{B}(\xi)\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

Теперь по матрицам-функциям $\mathcal{B}_{l,n}$ зададим ядро

$$\mathcal{B}_n(t,\xi) := \mathcal{B}_{l,n}(\xi), \quad l/n \leq t < (l+1)/n, \quad l = 0, \ldots,\ n-1,\ 0 \leq \xi \leq 1, \tag{11}$$

которое принадлежит $L_2([0,1]\ \times\ [0,1];\mathbb{C}^{m\times m})$, и рассмотрим это ядро, как вектор-функцию, зависящую от $t\ \in [0,1]$ и принимающую свои значения по ξ (т. е. при почти каждом фиксированном t из $[0,1]$) в пространстве L_2(0,1; $\mathbb{C}^{m\times m}$). Отсюда, учитывая определение (3) модуля непрерывности $\omega_1(\delta,\ \mathcal{A})$ и вид (10), (11) ядра $\mathcal{B}_n\ (t,\xi)$, на основании сформулированной леммы (в которой полагаем $p\ =\ 2$, а банахово пространство $\mathfrak{B}\ = L_2$(0,1; $\mathbb{C}^{m\times m}$), и значит, L_2(0,1; $\mathfrak{B}$) $=$ $= L_2$([0,1]$\times$ [0,1]; $\mathbb{C}^{m\times m}$)) имеем

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{B}_n\|_{L_2([0,1]\times[0,1];\mathbb{C}^{m\times m})} \leq 2^{1/2}\omega_1\left(\frac{1}{n}, \mathcal{A}\right). \tag{12}$$

Обозначим через B_n интегральный оператор с ядром $\mathcal{B}_n\ (t,\xi)$, заданным равенствами (10) и (11). Тогда в левой части неравенства (12) находится норма Гильберта – Шмидта оператора $A - B_n$, т. е., согласно равенству (2),

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(A - B_n)^2 \leq 2\omega_1\left(\frac{1}{n}, \mathcal{A}\right)^2. \tag{13}$$

Пусть B_n^* — сопряженный в пространстве $L_2(0,1;\mathbb{C}^m)$ оператор к оператору B_n. Тогда из равенств (10) и (11) следует, что ядром оператора B_n^* является матрица-функция

$$\mathcal{C}_n(t,\xi) = \mathcal{B}_{l,n}(t)^*, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad l/n \leq \xi \leq (l+1)/n,\ l = 0, \ldots, n-1,$$

где через $\mathcal{B}_{l,n}(t)^*$ обозначена матрица, получаемая из $\mathcal{B}_{l,n}(t)$ транспонированием с последующей заменой элементов на комплексно-сопряженные. В этих обозначениях оператор B_n^* действует по правилу

$$(B_n^* f)(t) = \int\limits_0^1 \mathcal{C}_n(t,\xi) f(\xi) d\xi = \sum_{l=0}^{n-1} \mathcal{B}_{l,n}(t)^* \int\limits_{l/n}^{(l+1)/n} f(\xi) d\xi, \quad f \in L_2(0,1;\mathbb{C}^m).$$

Из этих равенств следует, что область значений оператора B_n^* находится в линейной оболочке столбцов матриц $\mathcal{B}_{l,n}(t)^*$, $l = 0, ..., n-1$. Но число столбцов у каждой матрицы $\mathcal{B}_{l,n}\ (t)^*$ равно m и поэтому размерность области значений оператора B_n^* не превышает mn. Иными словами, размерность оператора B_n^*, а значит, и размерность B_n не превышает mn. Отсюда, согласно следствию 2.1 из книги [1] (гл. II, § 2, п. 3), вытекает оценка $s_{k+mn}(A) \leq s_k(A- B_n)$, подставляя которую в левую часть неравенства (13), получаем

$$\sum_{k=1+mn}^{\infty} s_k(A)^2 \leq 2\omega_1\left(\frac{1}{n}, \mathcal{A}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Пусть теперь r — произвольное натуральное число, больше или равное $m+1$. Тогда найдется такое натуральное число n_1, для которого справедливы неравенства $1 + mn_1 \leq$ $\leq r \leq mn_1 + m$. Полагая в (14) $n = n_1$, выводим

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k(A)^2 \leq \sum_{k=1+mn_1}^{\infty} s_k(A)^2 \leq 2\omega_1\left(\frac{1}{n_1}, \mathcal{A}\right)^2. \tag{15}$$

Но так как $r \leq mn_1 + m$, то $1/n_1 \leq m/(r-m)$, а учитывая неубываемость модуля непрерывности $\omega_1(\delta, \mathcal{A})$ по δ, имеем $\omega_1(1/n_1, \mathcal{A}) \leq \omega_1(m/(r- m), \mathcal{A})$. Из этой оценки и оценки (15) следует (9).

Выведем теперь из (9) утверждение (6). Действительно, пусть $\mathcal{A}^*(t,\ \xi) :=$ $:= \mathcal{A}(\xi, t)^*$. Тогда, согласно определениям (3) и (4) модулей непрерывности $\omega_1(\delta, \mathcal{A})$ и $\omega_2(\delta, \mathcal{A})$, имеем $\omega_1(\delta, \mathcal{A}^*) = \omega_2(\delta, \mathcal{A})$, а поскольку сопряженный оператор к оператору A действует по правилу

$$(A^* f)(t) = \int_0^1 \mathcal{A}^*(t, \xi) f(\xi) d\xi,$$

то для него оценка (9) запишется в виде

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k(A^*) \leq \omega_2\left(\frac{m}{r-m}, \mathcal{A}\right), \quad r = m+1, m+2, \ldots . \tag{16}$$

Но [1] (гл. II, § 2, п. 2) $s_k(A) = s_k(A^*)$, $k = 1, 2,...$, поэтому из (5), (9) и (16) следует утверждение (6) доказываемой теоремы.

Замечание. Оценить сумму $\sum\limits_{k=r}^{\infty} s_k\ (A)^2$ и индивидуальное s-число $s_r(A)$ непосредственно через модуль непрерывности ядра $\Omega(\delta,\mathcal{A})$ в случае $r = 1,..., m$, вообще говоря, нельзя. Действительно, пусть ядро оператора равно $\mathcal{I}_m$, где $\mathcal{I}_m$ — единичная $(m \times m)$-мерная матрица. Тогда, как несложно видеть, у соответствующего этому ядру оператора I_m первые m сингулярных чисел равны 1, а остальные — 0. Очевидно также, что $\Omega(\delta, \mathcal{I}_m) = 0$ для всех $\delta \geq 0$. Поэтому для указанного здесь оператора оценить сверху $\sum\limits_{k=r}^{\infty} s_k\ (I_m)^2 = m+1-$ $-r$ и $s_r\ (I_m) = 1$ для $r = 1,..., m$ через $\Omega(\delta, \mathcal{I}_m) = 0$ при всех $\delta \geq 0$ невозможно.

1. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
2. *Fredholm I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta math. — 1903. — **27**. — P. 365 – 390.
3. *Мирошин Н.В., Хромов В.В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. — 1982. – **32**, № 5. — С. 721 – 726.
4. *Темляков В.А.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 191 – 215.
5. *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. — 1970. — **81**, №1. — С. 104 – 131.
6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иност. лит., 1962. — 830 с.

Получено 01.12.98